

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**Građevinsko-arhitektonski fakultet**

**Prof. dr. sc. Mile Dželalija**

**FIZIKA**

*(NIJE KONAČAN IZGLED)*

Split, 2007.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>UVOD</b>	<b>4</b>
1.1	O fizici . . . . .	4
1.2	Fizikalne veličine i jedinice . . . . .	4
1.3	Međunarodni sustav jedinica . . . . .	5
1.4	Svijet oko nas . . . . .	6
<b>2</b>	<b>MEHANIKA</b>	<b>8</b>
2.1	Kinematika . . . . .	8
2.1.1	Gibanje sa stalnom akceleracijom . . . . .	9
2.1.2	Jednoliko gibanje po kružnici . . . . .	10
2.2	Osnove dinamike . . . . .	11
2.2.1	Newtonovi zakoni . . . . .	12
2.2.2	Zakon očuvanja količine gibanja . . . . .	13
2.2.3	Neki primjeri sila . . . . .	13
2.3	Rad, energija i snaga . . . . .	17
2.4	Gravitacija . . . . .	19
2.4.1	Keplerovi zakoni . . . . .	19
2.4.2	Newtonov zakon gravitacije . . . . .	19
2.4.3	Gravitacijska potencijalna energija . . . . .	20
2.5	Inercijski i neinercijski sustavi . . . . .	20
2.6	Osnove relativističke mehanike . . . . .	20
2.6.1	Fizikalne posljedice Lorentzovih transformacija . . . . .	21
2.6.2	Relativistička dinamika . . . . .	22
<b>3</b>	<b>TITRANJE I VALOVI</b>	<b>24</b>
3.1	Titranje . . . . .	24
3.1.1	Jednostavno harmonijsko titranje . . . . .	24
3.1.2	Prigušeno titranje . . . . .	25
3.2	Valovi . . . . .	25
3.2.1	Valna funkcija . . . . .	26
3.2.2	Energija vala . . . . .	26
3.2.3	Grupna brzina . . . . .	26
3.2.4	Interferencija i difrakcija valova; odbijanje i lom valova . . . . .	27
3.3	Zvučni valovi . . . . .	28
3.4	Elektromagnetski valovi . . . . .	28
<b>4</b>	<b>TOPLINA</b>	<b>30</b>
4.1	Pojam temperature . . . . .	30
4.2	Toplinsko rastezanje čvrstih tijela i tekućina . . . . .	30
4.3	Jednadžba stanja plina . . . . .	31
4.4	Termodinamički zakoni . . . . .	32
4.4.1	Pojam unutrašnje energije . . . . .	32
4.4.2	Pojam rada i topline . . . . .	32

4.4.3	Prvi zakon termodinamike . . . . .	32
4.4.4	Entalpija . . . . .	34
4.4.5	Drugi zakon termodinamike . . . . .	35
4.5	Kinetičko-molekularna teorija topline . . . . .	35
4.5.1	Tlak idealnog plina . . . . .	36
4.5.2	Kinetičko objašnjenje temperature . . . . .	37
4.5.3	Maxwell-Boltzmannova raspodjela . . . . .	37
4.5.4	Molarni toplinski kapacitet . . . . .	38
4.6	Jednadžba stanja realnih plinova . . . . .	39
4.7	Fazni prijelazi . . . . .	40
4.7.1	Isparavanje i kondenzacija . . . . .	40
4.7.2	Taljenje i skrućivanje . . . . .	40
4.7.3	Svojstva vodene pare . . . . .	41
4.7.4	Vlažnost . . . . .	41
<b>5</b>	<b>ELEKTROMAGNETSKE POJAVE</b>	<b>44</b>
5.1	Atomska struktura tvari. Električni naboj . . . . .	44
5.1.1	Očuvanje električnog naboja . . . . .	45
5.2	Coulombov zakon . . . . .	45
5.3	Električno polje . . . . .	45
5.4	Elektrostatska potencijalna energija . . . . .	46
5.5	Električna struja . . . . .	46
5.6	Električna vodljivost i Ohmov zakon . . . . .	47
5.6.1	Valjanost Ohmovog zakona . . . . .	47
5.7	Električna struja u vakuumu . . . . .	47
5.8	Električna struja u plinovima . . . . .	48
5.9	Magnetsko polje . . . . .	48
<b>6</b>	<b>OPTIKA</b>	<b>50</b>
6.1	Priroda svjetlosti i osnovni pojmovi . . . . .	50
6.2	Elektromagnetski valovi . . . . .	50
6.3	Spektar elektromagnetskih valova . . . . .	51
6.4	Valna optika . . . . .	52
6.4.1	Interferencija svjetlosti . . . . .	52
6.4.2	Difrakcija svjetlosti . . . . .	52
6.4.3	Polarizacija svjetlosti . . . . .	53
6.5	Osnovni zakoni geometrijske optike . . . . .	53
6.6	Veličine u fotometriji . . . . .	54
6.6.1	Jakost svjetlosti . . . . .	54
6.6.2	Osvjetljenost . . . . .	54
6.7	Boje svjetlosti . . . . .	54
6.8	Osnove rada lasera . . . . .	55
<b>7</b>	<b>KVANTNA OPTIKA</b>	<b>57</b>
7.1	Toplinsko zračenje . . . . .	57
7.2	Stefan-Boltzmannov zakon . . . . .	57
7.3	Wienov zakon . . . . .	57
7.4	Planckova hipoteza kvanta zračenja . . . . .	58
7.5	Fotoelektrični učinak . . . . .	59
7.6	Comptonov učinak . . . . .	59
7.7	Dvojna priroda elektromagnetskog zračenja . . . . .	60

<b>8</b>	<b>STRUKTURA ATOMA</b>	<b>62</b>
8.1	Modeli atoma . . . . .	62
8.1.1	Model pudinga . . . . .	62
8.1.2	Rutherfordov model . . . . .	62
8.1.3	Atomski spektri. Vodikovi nizovi . . . . .	63
8.1.4	Bohrov model . . . . .	64
8.1.5	Franck-Hertzov pokus neelastičnog raspršenja elektrona . . . . .	66
8.2	Kvantni brojevi . . . . .	66
8.2.1	Kvantizacija momenta količine gibanja . . . . .	66
8.2.2	Magnetski kvantni broj . . . . .	66
8.2.3	Eksperiment Sterna i Gerlacha. Spin elektrona. . . . .	67
8.3	Paulijev princip i objašnjenje periodičnog sustava elemenata . . . . .	67
<b>9</b>	<b>VALOVI MATERIJE</b>	<b>69</b>
9.1	Dvojna priroda materije . . . . .	69
9.2	Ogib elektrona . . . . .	69
9.3	Posljedice dvojne prirode materije . . . . .	70
9.3.1	Neodređenost položaja i količine gibanja . . . . .	70
9.3.2	Valna funkcija i vjerojatnost . . . . .	70
<b>10</b>	<b>ATOMSKA JEZGRA</b>	<b>71</b>
10.1	Građa atomske jezgre . . . . .	71
10.1.1	Struktura atomske jezgre. Model ljuske . . . . .	71
10.2	Radioaktivnost . . . . .	72
10.2.1	Priroda radioaktivnog zračenja . . . . .	72
10.2.2	Vremenski zakoni radioaktivnog raspada . . . . .	72
10.3	Međudjelovanje radioaktivnog zračenja s materijom . . . . .	73
10.3.1	Zaštita od zračenja . . . . .	73
10.3.2	Doza zračenja . . . . .	74
10.3.3	Biološko djelovanje zračenja . . . . .	74
10.4	Nuklearna fisija i fuzija . . . . .	74

# Poglavlje 1

## UVOD

### 1.1 O fizici

Riječ **fizika** potječe od grčke riječi  $\varphi\upsilon\sigma\iota\varsigma$  (fizis) što znači priroda. Pa se fizika dugo vremena zvala filozofija prirode.

Fizika je fundamentalna prirodna znanost koja se bavi proučavanjem ponašanja materije u njenom najosnovnijem smislu. Pojam **materije** se koristi za sve ono što postoji u prirodi, a pojam **tvari** kao jedan od osnovnih oblika materije rezerviran je za sva masena tijela. Ostali dio materije nazivamo **zračenjem**.

Iskustva nam kazuju kako je materija u neprestanom **gibanju** u najopćenitijem smislu. Pod gibanjem podrazumijevamo svake mehaničke, kemijske, misaone i druge procese koji se događaju u prirodi. Stoga, kažemo da je gibanje osnovno svojstvo materije. Uz pojam gibanja vezan je i pojam **prostora** i **vremena**. Prostor i vrijeme su manifestacija određenih univerzalnih svojstava materije. Stoga možemo zaključiti kako su gibanje, prostor i vrijeme tri osnovna svojstva materije.

Fizika izučava ona objektivna svojstva materijalnog svijeta koja su osnovna i najopćenitija. Fizika pred sebe ne postavlja zadatak koji bi odgovarao na pitanje **zašto** materija ima takva svojstva koja ima, već izučava **kako** se materija ponaša u svojim najjednostavnijim oblicima. Fizika npr. daje odgovor na pitanje kakva je sila između atoma željeza, ali ne daje npr. odgovor na pitanje: zašto je sila između dva naboja baš takvog oblika.

Prožimanje s drugim znanostima i područjima ljudskog djelovanja je neizbježno te je ponekad teško povući granicu između fizike i ostalih znanosti. Fizika ima fundamentalno značenje za ostale prirodne i tehničke znanosti. Kao tipična eksperimentalna znanost fizika se zasniva na promatranju prirodnih pojava, izvođenju eksperimenata i mjerenja. Rezultati opažanja, nakon što su svedeni na najopćenitiji oblik, formuliraju se u obliku principa i zakona. Ponekad se do određenih fizikalnih zakona dolazi teorijski, a zatim se njihova valjanost provjerava eksperimentima.

Fizikalne zakone najčešće simbolički iskazujemo matematičkim jednadžbama.

### 1.2 Fizikalne veličine i jedinice

**Fizikalna veličina** je mjerljivo svojstvo fizikalnog stanja sustava (npr. položaj tijela, masa tijela, temperatura zraka, izvršeni rad, ...), a označavamo ih malim i velikim slovima latinske abecede i grčkog alfabeta<sup>1</sup>. Znakovi fizikalnih veličina međunarodno su dogovoreni (ISO<sup>2</sup>), a uglavnom su određeni uzimajući početna slova engleskih ili latinskih naziva odgovarajućih fizikalnih veličina. Tako je npr. znak za brzinu  $v$  (velocity, velocitas), za vrijeme  $t$  (time, tempus), za silu  $F$  (force), za rad  $W$  (work), za kutnu brzinu  $\omega$ , itd.

<sup>1</sup>Grčki alfabet:  $A \alpha, B \beta, \Gamma \gamma, \Delta \delta, E \varepsilon, Z \zeta, E \eta, \Theta \theta, I \iota, K \kappa, \Lambda \lambda, M \mu, N \nu, \Xi \xi, O \omicron, \Pi \pi, P \rho, \Sigma \sigma, T \tau, Y \upsilon, \Phi \phi, \chi, \Psi \psi, \Omega \omega$  (čitaj: alfa, beta, gama, delta, epsilon, zeta, eta, theta, iota, kapa, lambda, mi, ni, ksi, omikron, pi, ro, sigma, tau, ipsilon, fi, hi, psi, omega)

<sup>2</sup>International Standard Organisation

Mjeriti neku veličinu znači odrediti brojčanu vrijednost koja pokazuje koliko puta ta veličina sadrži u sebi istovrsnu veličinu dogovorom uzetu za jedinicu. Na primjer, izmjeriti duljinu stola znači usporediti duljinu stola s jedinicom duljine (metrom) i utvrditi koliko promatrana duljina ima tih jedinica duljine. Tako se dobije brojčana vrijednost fizikalne veličine koju mjerimo. Nije dovoljno poznavati samo brojčanu vrijednost, već treba znati i njezinu jedinicu. Stoga zaključujemo da fizikalnu veličinu izražavamo pomoću **brojčane vrijednosti i mjerne jedinice**.

Na primjer, ako je duljina stola 1.8 metara, tada je brojčana vrijednost 1.8, a mjerna jedinica metar. Nije dovoljno reći da je duljina stola 1.8, već 1.8 metara. Ako izaberemo drugu mjernu jedinicu (npr. centimetar), tada se i brojčana vrijednost promijeni.

### 1.3 Međunarodni sustav jedinica

U listopadu 1960. godine prihvaćen je međunarodni sustav mjernih jedinica, SI<sup>3</sup>. Dogovorom je odabrano sedam osnovnih mjernih jedinica Međunarodnog sustava iz kojih se mogu izvesti sve ostale mjerne jedinice. Osnovne jedinice SI sustava dane su u tablici 1.1. Izvedene mjerne jedinice određuju se iz osnovnih jedinica

Fizikalna veličina	Mjerna jedinica	Oznaka
Duljina	metar	m
Vrijeme	sekunda	s
Masa	kilogram	kg
Temperatura	kelvin	K
Jakost el. struje	amper	A
Jakost svjetlosti	candela	cd
Količina tvari	mol	mol

Tablica 1.1: Fizikalne veličine i osnovne mjerne jedinice.

kroz algebarske izričaje definicija i zakona. Na primjer, mjerna jedinica za brzinu tijela je metar po sekundi,  $m/s$ , a određuje se iz definicije brzine. Pojedine mjerne jedinice koje nisu u popisu jedinica SI sustava (npr. morska milja, čvor, hektar, litra, minuta, sat, Celsiusov stupanj, ...) toliko su udomaćene u pojedinim područjima da se mogu i dalje upotrebljavati.

Pomoću određenih prefiksa dobivamo decimalne višekratnike fizikalnih jedinica. U tablicama 1.2 i 1.3 dani su međunarodno prihvaćeni prefiksi fizikalnih jedinica.

Oznaka	Naziv	Vrijednost	
da	deka	$10^1$	10
h	hekto	$10^2$	100
k	kilo	$10^3$	1 000
M	mega	$10^6$	1 000 000
G	giga	$10^9$	1 000 000 000
T	tera	$10^{12}$	1 000 000 000 000
P	peta	$10^{15}$	1 000 000 000 000 000
E	eksa	$10^{18}$	1 000 000 000 000 000 000

Tablica 1.2: Prefiksi za tvorbu decimanlnih jedinica.

Fizikalne su veličine većinom skalarne ili vektorske veličine. Skalarne veličine su potpuno određene svojom brojčanom vrijednošću i mjernom jedinicom. Vektorske veličine su određene ako poznamo još smjer i orijentaciju. Skalarne veličine su npr. vrijeme, masa, temperatura, rad, a vektorske veličine npr. položaj, brzina, sila. Tako npr. nije dovoljno reći da je brzina nekog tijela 100 km/h, već treba odrediti i smjer i orijentaciju. Vektorske veličine označavamo malom strelicom ( $\rightarrow$ ) iznad alfabetske oznake (npr. brzina tijela

<sup>3</sup>Systeme International d'Unités

Oznaka	Naziv	Vrijednost	
d	deci	$10^{-1}$	0.1
c	centi	$10^{-2}$	0.01
m	mili	$10^{-3}$	0.001
$\mu$	mikro	$10^{-6}$	0.000 001
n	nano	$10^{-9}$	0.000 000 001
p	piko	$10^{-12}$	0.000 000 000 001
f	femto	$10^{-15}$	0.000 000 000 000 001
a	ato	$10^{-18}$	0.000 000 000 000 000 001

Tablica 1.3: Isto kao u tablici 1.2.

ž). Matematičke operacije nad vektorima: zbrajanja, oduzimanja, vektorskog i skalarnog množenja nećemo posebno obrađivati već se pretpostavlja da su obrađeni u matematičkim kolegijima.

### Primjeri

- $57 \text{ km} = 57 \cdot 10^3 \text{ m} = 57 \cdot 1\,000 \text{ m} = 57\,000 \text{ m}$ .
- $106.9 \text{ MHz} = 106.9 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 106.9 \cdot 1\,000\,000 \text{ Hz} = 106\,900\,000 \text{ Hz}$ .
- $12 \text{ mm} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 12 \cdot 0.001 \text{ m} = 0.012 \text{ m}$ .
- $60 \text{ km/h} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 16.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .
- $200 \text{ l} = 200 \text{ dm}^3 = 200 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = 200 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 0.2 \text{ m}^3$ .

## 1.4 Svijet oko nas

U našem saznanju o svijetu u kojem živimo, i čiji smo dio, ističu se tri grupe objekata:

- mikrosvijet, odnosno svijet elementarnih čestica,
- makrosvijet ili svijet svemirskih objekata,
- svijet živih bića.

Ovakva podjela ističe u biti tri grupe fenomena kojima je orijentirana današnja znanost. Nije moguće povući oštru granicu među ovim grupama objekata kad znamo da svugdje osnovnu ulogu igraju osnovne čestice i njihovi međusobni procesi.

Osnovne elementarne čestice koje izgrađuju svu poznatu materiju (tzv. fermioni) se dijele u dvije skupine: kvarkove (u, d, s, c, t, b)<sup>4</sup> i leptone (e,  $\nu_e$ ,  $\mu$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\tau$ ,  $\nu_\tau$ )<sup>5</sup>. Elementarne čestice međudjeluju jedna s drugom, izmjenjujući tzv. bozone (8 gluona,  $W^\pm$ ,  $Z^0$ ,  $\gamma$ , graviton (?)). Svim spomenutim elementarnim česticama je pridružen i skup tzv. antičestica. Tri kvarka različitih 'boja' čine hadrone (neutron  $n$ , proton  $p$ , ...). Kvark i antikvark izgrađuju tzv. mezone ( $\pi$ , ...). Neutroni i protoni izgrađuju jezgru atoma, a ujedinjeni s elektronima čine različite atome. Više atoma zajedno stvaraju molekule, a mnoštvo atoma ili molekula različita makro tijela (npr. DNA, kristale, ...). U prirodi uočavamo tvari u različitim stanjima: kruto, tekuće, plinovito, ...

Masivna tijela u prirodi su asteroidi, planete, a udruženi sa zvijezdom stvaraju jedan sustav (npr. Sunčev sustav). Više zvijezda stvaraju galaksije, nakupine galaksija i na kraju cijeli naš svemir. Kad kažemo naš svemir, onda mislimo na svu materiju koja nas okružuje i koja pripada povijesno zajedničkom početku. Naš svemir je najvjerojatnije nastao prije 15-tak milijardi godina u tzv. 'Velikom prasku' i nakon toga se širio i još uvijek se širi.

<sup>4</sup>Engleski nazivi: up, down, strange, charm, top, bottom

<sup>5</sup>elektron, mion, tau i njihovi neutrini

O mogućnosti postojanja i nepostojanja drugih svemira danas nema čvrstih odgovora.

Na prvi pogled priroda nam izgleda vrlo složena, a zakonima i principima, do kojih dolazimo opažanjem, pojednostavljujemo taj dio prirode.

Probleme kojima ćemo se baviti razdijelit ćemo u nekoliko cijelina, a prva među njima neka bude mehanika.

### Pitanja za vježbu

1. Pojam materije i tvari.
2. Pojmovi gibanja, prostora i vremena.
3. Koja su osnovna svojstva materije?
4. Što fizika izučava?
5. Kako se formuliraju rezultati opažanja u fizici?
6. Kakvo je značenje fizike prema drugim znanostima?
7. Kako iskazujemo fizikalne zakone?
8. Što je fizikalna veličina; kako je označavamo i kako izražavamo?
9. Koje su to osnovne fizikalne veličine i mjerne jedinice po SI sustavu?
10. Kako se određuju izvedene jedinice?
11. Što su to prefiksi mjernih jedinica i za što služe?
12. Što su to skalarne, a što vektorske veličine? Primjeri.
13. Što podrazumijevamo pod pojmom *naš svemir*?

## Poglavlje 2

# MEHANIKA

**Mehanika** je dio fizike koji proučava gibanje tijela, tj. vremensku promijenu položaja tijela u prostoru (npr. gibanje planeta, automobila, molekula, ...). Mehaniku možemo podijeliti na **kinematiku** i **dinamiku**, a može se odnositi na mehaniku materijalne točke, sustava materijalnih točaka, krutog tijela, mehaniku fluida te mehaniku titranja i valova.

Kinematika (grč. kinein = gibati) proučava gibanje tijela, bez obzira na uzroke gibanja i svojstva tijela koja se gibaju. Dinamika (grč. dynamis = sila) proučava gibanje tijela uzimajući u obzir uzroke gibanja i svojstva tijela. Za razliku od kinematike, dinamika daje fizikalnu bit gibanja. Najprije proučimo gibanje tijela bez obzira na uzroke gibanja.

### 2.1 Kinematika

Gibanje je jedan od osnovnih problema fizike. Prve zakone gibanja, koje i danas koristimo, našli su Galilei<sup>1</sup> i Newton<sup>2</sup>. Za tijelo, u odnosu na koje promatramo gibanje, vezemo tzv. **referentni sustav** te kažemo da se neko tijelo giba ako mijenja položaj prema tom referentnom sustavu. Tako na primjer putnik koji sjedi u vlaku miruje s obzirom na sustav vezan za vlak, ali se giba s obzirom na sustav vezan za zemlju. Svako gibanje je relativno gibanje prema određenom referentnom sustavu. **Mirovanje** je poseban oblik gibanja. Tijelo miruje ako ima stalne, nepromijenjene koordinate s obzirom na izabrani referentni sustav. Položaj tijela najčešće određujemo pomoću koordinata u pravokutnom koordinatnom sustavu. Važan pojam koji uvodimo jeste pojam **materijalne točke** i definiramo ga kao tijelo čije dimenzije možemo zanemariti u proučavanju njegova gibanja. Na primjer, cijelu našu planetu u odnosu na izučavanje gibanja oko Sunca možemo smatrati materijalnom točkom. **Položaj** materijalne točke određen je točkom u odabranom koordinatnom sustavu (crtež 2.1). **Radijus vektor** je vektor položaja tijela. Gibajući se materijalna točka mijenja svoj položaj i tako opisuje neku krivulju u koordinatnom sustavu. Ta krivulja se naziva **putanja** materijalne točke. Dio putanje koji materijalna točka prijeđe u određenom vremenskom intervalu naziva se **put**. **Pomak** se definira kao promjena vektora položaja materijalne točke:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A. \quad (2.1)$$

**Srednju brzinu** tijela definiramo kao kvocijent pomaka i vremenskog intervala potrebnog za taj pomak:

$$\vec{v}_S = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (2.2)$$

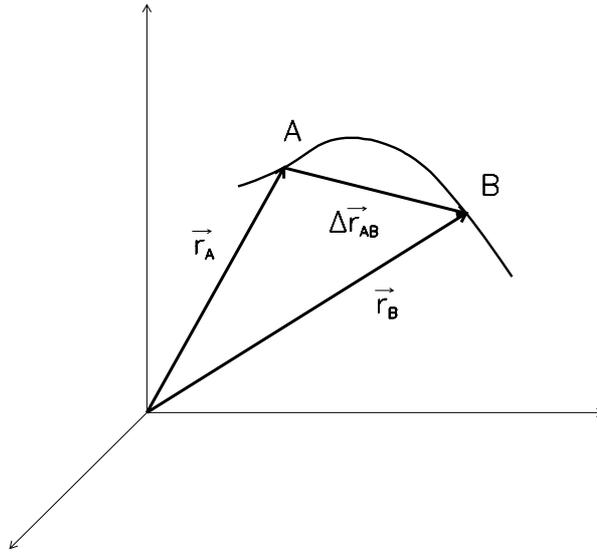
a trenutna **brzina** je granična vrijednost (limes) srednje brzine:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Galileo Galilei (1564-1642), talijanski fizičar i astronom.

<sup>2</sup>Isaac Newton (1643-1727), engleski fizičar i matematičar.



Crtež 2.1: Uz definiciju pomaka

Osnovna mjerna jedinica za brzinu je metar po sekundi,  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Iznos vektora brzine je dan kao kvadratni korijen zbroja kvadrata svih komponenta brzine

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.4)$$

**Srednja akceleracija** se definira kao odnos promjene brzine i vremenskog intervala u kojem se brzina promijenila:

$$\vec{a}_S = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.5)$$

a trenutnu **akceleraciju** kao graničnu vrijednost srednje akceleracije:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.6)$$

Osnovna mjerna jedinica za akceleraciju je metar po sekundi na kvadrat,  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Vektore  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  u trodimenzionalnom pravokutnom sustavu pišemo preko njihovih komponenta

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \vec{v} &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \\ \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdje su  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  jedinični vektori. Na taj se način gore uvedene jednačbe za pomak, brzinu i akceleraciju mogu zapisati kao tri skalarne jednačbe zasebno za svaki od neovisnih smjerova trodimenzionalnog prostora. Na primjer, za brzinu

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.8)$$

### 2.1.1 Gibanje sa stalnom akceleracijom

Ako poznajemo akceleraciju, početnu brzinu i početni položaj tijela, tada možemo odrediti brzinu tijela u svakom trenutku  $t$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt \\ &= \vec{v}_0 + \vec{a} t, \end{aligned} \quad (2.9)$$

odnosno položaj

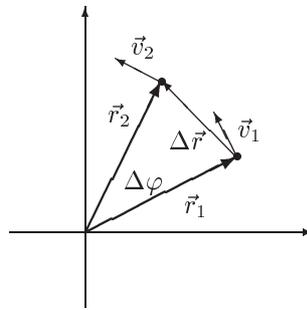
$$\begin{aligned}
 \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt \\
 &= \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a} t) dt \\
 &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

gdje su  $\vec{r}_0$  i  $\vec{v}_0$  početni položaj i početna brzina tijela.

### 2.1.2 Jednoliko gibanje po kružnici

Kad akceleracija materijalne točke nema isti pravac kao brzina, materijalna točka se giba po nekoj krivulji. Najjednostavnije krivocrtno gibanje jest jednoliko kruženje. Pri tom gibanju iznos brzine ostaje konstantan, ali stalno mijenja smjer, što rezultira radijalnom akceleracijom.

Neka se materijalna točka giba jednoliko po kružnici radijusa  $r$  i u nekom vremenskom intervalu  $\Delta t$  prevali put  $\Delta s$ , odnosno prebriše kut  $\Delta\varphi$ . Tada vrijedi:



Crtež 2.2: Uz jednoliko gibanje po kružnici

$$\Delta s = r \Delta\varphi. \tag{2.11}$$

Pri tom je njezin pomak

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{2.12}$$

Veza između prebrisanog kuta  $\Delta\varphi$  i prevaljenog puta  $\Delta s$  je

$$\Delta s = r \Delta\varphi, \tag{2.13}$$

pri čemu je prebrisan kut  $\Delta\varphi$  izražen u radianima:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}. \tag{2.14}$$

Iznos brzine (tzv. obodna brzina) tijela pri gibanju po kružnici jest

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega, \tag{2.15}$$

gdje smo uveli fizikalnu veličinu koju nazivamo **kutna brzina** tijela

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2.16}$$

U gornjim izrazima  $r$  označava radijus kružnice koju materijalna točka opisuje u svom gibanju. Mjerna jedinica za kutnu brzinu je radijan u sekundi (rad/s ili jednostavno  $s^{-1}$ ).

Kut i kutnu brzinu (a također i kutnu akceleraciju) definiramo kao vektorske veličine sa smjerom koji je okomit na ravninu pomaka, a orijentacija se određuje napredovanjem desnog vijka i vrijedi sljedeći izraz za brzinu tijela u gibanju po kružnici

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.17}$$

te izraz za radijalnu akceleraciju

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{2.18}$$

Za opisivanje jednolikog gibanja po kružnici korisno je uvesti frekvenciju i ophodno vrijeme. Frekvenciju definiramo kao broj okreta u jedinici vremena, dok ophodno vrijeme kao vrijeme potrebno za jedan okret materijalne točke po kružnici. Očito vrijedi

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi}, \\ T &= \frac{1}{\nu}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

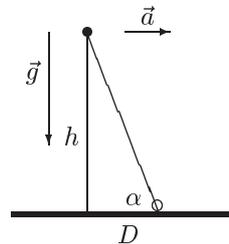
### Primjeri

1. Položaj i brzina tijela kod jednodimenzionalnog gibanja

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ v_x(t) &= v_{x0} + a_x t. \end{aligned}$$

2. Sva tijela u slobodnom padu u blizini površine Zemlje padaju akceleracijom koja iznosi  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ .
3. Lopta pada s visine od 39 metara. Pod utjecajem vjetra lopta ima stalnu horizontalnu komponentu akceleracije u iznosu  $1.2 \text{ m/s}^2$ . Dokažite da je putanja lopte opisana pravcem. Odredite kut pod kojim lopta udara u tlo, domet, proteklo vrijeme te brzinu tijela pri udaru u tlo. Akceleracija slobodnog pada je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Rj.:

$$\begin{aligned} h &= 39.0 \text{ m} \\ a &= 1.20 \text{ m/s}^2 \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \\ \alpha &=? \\ D &=? \\ t &=? \\ v &=? \end{aligned}$$



$x = at^2/2$	$v_x = at$	$\tan \alpha = h/D$	$h = gt^2/2$	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
$y = gt^2/2$	$v_y = gt$	$D \approx 4.77 \text{ m}$	$t \approx 2.82 \text{ s}$	$v = t\sqrt{a^2 + g^2}$
$y = xg/a$ (pravac)	$\tan \alpha = v_y/v_x = g/a$	$\alpha \approx 83^\circ$		$v \approx 27.87 \text{ m/s}$

## 2.2 Osnove dinamike

U kinematici smo proučavali zakone gibanja tijela bez obzira na uzroke toga gibanja, a sada proučimo gibanje tijela uzimajući u obzir uzroke gibanja i svojstva tijela.

Osnove dinamike su tri Newtonova zakona. Iz tih se zakona izgrađuje klasična mehanika koja odlično opisuje makroskopske pojave, dakle tijela koja su veća od atoma i molekula te za koje je brzina puno manja od brzine svjetlosti. Za opisivanje mikrosvijeta koristi se kvantna fizika, a kod velikih brzina teorija relativnosti.

### 2.2.1 Newtonovi zakoni

Engleski fizičar Isaac Newton 1686. formulirao je tri zakona gibanja i objavio ih u djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newtonova mehanika odlično opisuje makroskopske pojave za tijela dimenzija većih od atoma i molekula te brzina mnogo manjih od brzine svjetlosti (299 792 458 m/s).

Fizikalne veličine važne za iskazivanje Newtonovih zakona su: sila, masa i količina gibanja. U fizici **silu** proučavamo pomoću njezina djelovanja, koje može biti dvojak: kroz promjenu stanja gibanja ili promjenu oblika tijela. Mi se ograničavamo na promjenu stanja gibanja. U prirodi postoje četiri osnovne sile: gravitacijska, elektromagnetska, jaka i slaba nuklearna sila. Ostale poznate sile (npr. sila trenja, uzgon, sila opruge, ...) mogu biti objašnjene preko osnovnih sila. Jedinica za silu je  $1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$  (newton).

Kažemo da je **masa** svojstvo tijela koje određuje njegovo ponašanje pri djelovanju sile. Što je masa tijela veća to mu je teže promijeniti stanje gibanja. Svojstvo tijela da održava svoje stanje gibanja nazivamo **ustrajnost**, **tromost** ili **inercija**. Stoga možemo reći da je masa kvantitativna mjera tromosti tijela. Jedinica za masu je 1 kg.

**Količinu gibanja** definiramo kao produkt mase  $m$ , i brzine tijela  $v$ ,

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.20)$$

Mjerna jedinica za količinu gibanja je kgm/s.

#### Prvi Newtonov zakon

Još je i Galilei uočio da tijelo na kojeg ne djeluju vanjske sile miruje ili se jednoliko giba po pravcu. Proširivši Galilejeva razmatranja, Newton je postavio svoj prvi zakon u sljedećem obliku: *Svako će tijelo ostati u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok na njega ne djeluju vanjske sile ili je suma svih sila jednaka nuli.*

Prvi Newtonov zakon se često naziva i princip ustrajnosti. Po njemu je uzrok promjene gibanja djelovanje sile na tijelo. Ako sila ne djeluje ili se sile poništavaju tako da je rezultantna sila na tijelo nula, akceleracija tijela će biti nula, odnosno brzina tijela će biti stalna. Prvi Newtonov zakon ne vrijedi u svakom referentnom sustavu. Na primjer, prilikom zaustavljanja vlaka, kuglica na stolu u vlaku će promijeniti stanje gibanja u odnosu na vlak iako je zbroj svih sila koje djeluju na kuglicu jednak nuli. Referentni sustavi u kojima vrijedi prvi Newtonov zakon nazivamo **inercijalnim sustavima**, a ostale neinercijalnim sustavima.

#### Drugi Newtonov zakon

Prvi zakon opisuje ponašanje tijela kad na njega ne djeluju sile drugih tijela ili kad je rezultantna svih sila na tijelo jednaka nuli. Drugi zakon opisuje ponašanja tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila  $\vec{F}$ .

Drugi Newtonov zakon možemo pisati u obliku: *Promjena količine gibanja je proporcionalna ukupnoj sili koja djeluje na tijelo:*

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.21)$$

U slučaju da je masa tijela stalna, tada drugi zakon glasi:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (2.22)$$

Ovu jednadžbu, kojom je opisan drugi Newtonov zakon, nazivamo i jednadžbom gibanja.

#### Primjeri

1. Sila teže u blizini površine Zemlje (sila kojom Zemlja privlači tijela) je  $m\vec{g}$ , a obično je označavamo sa  $\vec{G}$ .
2. Ako udarac igrača na loptu mase 500 g, traje 10 ms i lopta postigne brzinu od 5 m/s, kolikom je srednjom silom igrač djelovao na loptu?

Rj.:

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = 250 \text{ N}.$$

### Treći Newtonov zakon

Sile koje djeluju na neko tijelo potječu iz okoline tog tijela. Treći Newtonov zakon govori o međudjelovanju određenog tijela i njegove okoline.

Treći Newtonov zakon glasi: *Sile kojima dva tijela djeluju jedno na drugo uvijek su istog iznosa, a protivne orijentacije:*

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}, \quad (2.23)$$

gdje  $\vec{F}_{AB}$  označava silu kojom tijelo A djeluje na tijelo B.

#### Primjeri

1. Koliki je iznos sile kojom privlačite Zemlju?

Rj.: Iznos te sile je jednak iznosu sile kojom Zemlja privlači Vas.

### 2.2.2 Zakon očuvanja količine gibanja

Kao posljedica Newtonovih zakona izlazi da je ukupna količina gibanja izoliranog sustava<sup>3</sup> konstantna u vremenu bez obzira kakvi se procesi odvijaju u sustavu:

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{konstanta}, \quad (2.24)$$

gdje  $\sum_i$  označava zbroj po svim tijelima. Zakon očuvanja količine gibanja je vrlo koristan pri rješavanju mnogih problema u mehanici. Pomoću njih često možemo, neriješavajući jednadžbe gibanja, matematički jednostavnije odrediti ponašanje nekog sustava.

#### Primjeri

1. Atom radija  $^{226}\text{Ra}$  emitira  $\alpha$  česticu. Kojom brzinom će se gibati nastali atom  $^{222}\text{Rn}$ , ako je brzina  $\alpha$  čestice  $1.5 \cdot 10^7$  m/s? Pretpostavite da je atom  $^{226}\text{Ra}$  prije raspada mirovao.

Rj.: Vrijedi zakon očuvanja količine gibanja

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ \vec{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}'_1 \\ v'_2 &= -\frac{4}{222} 1.5 \cdot 10^7 \text{ m/s} = -2.7 \cdot 10^5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Vidimo da će se atom  $^{222}\text{Rn}$  gibati u suprotnom smjeru od  $\alpha$  čestice.

### 2.2.3 Neki primjeri sila

#### Zemljina sila teže

Sva tijela u blizini površine Zemlje imaju jednaku akceleraciju slobodnog pada,  $g$  (kad se zanemari otpor zraka). Ta akceleracija ima nešto različitu vrijednost na različitim geografskim širinama ili nadmorskim visinama na kojima se mjeri. Ukupna sila koja uzrokuje tu akceleraciju tijela je proporcionalna masi  $m$  odabranog tijela

$$\vec{F}_g = m\vec{g}, \quad (2.25)$$

gdje je  $\vec{g}$  akceleracija slobodnog pada u blizini površine Zemlje. Ovu silu često se naziva Zemljina sila teže ili jednostavno sila teže.

<sup>3</sup>Sustav zovemo izoliranim kad na njega ne djeluju sile koje potječu od tijela izvan tog sustava.

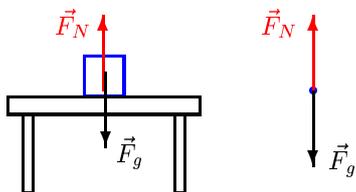
**Težina.** Pojam težine nema usaglašenu definiciju gledano kroz različite literature iz fizike. Ovdje ćemo ju definirati onako kako se, uglavnom, definira u modernoj literaturi: Težina  $W$  odabranog tijela je iznos ukupne sile koja je potrebna za sprečavanje slobodnog pada tijela, gledano iz sustava vezanog za površinu Zemlje. Ovakva definicija ukazuje kako je težina  $W$  jednaka iznosu gravitacijske sile,  $F_g$ , tj. vrijedi

$$W = mg, \quad (2.26)$$

stoga ju je moguće definirati i na taj način. Težina nekog odabranog tijela ovisi o geografskom položaju i nadmorskoj visini mjerenja. Težinu treba mjeriti dok tijelo ne akcelerira. Na primjer, ako bismo mjerili težinu u dizalu dok mu se mijenja brzina, takva težina bi se razlikovala od težine izmjerene na čvrstom tlu i treba ju nazvati prividna težina. Nadalje, treba razlikovati masu od težine. Naime, težina se mjeri u newtonima (1 N), a masa u kilogramima (1 kg). Odabrano tijelo ima istu vrijednost mase npr. na površini Zemlje kao i na površini Mjeseca, ali mu se težina razlikuje za oko 6 puta.

### Sila pritiska podloge

Ako neko odabrano tijelo dodiruje neko drugo tijelo, tada to drugo tijelo djeluje na odabrano tijelo silom, zbog deformacije svoje površine, okomito na svoju površinu i naziva se sila reakcije (ili sila pritiska podloge),  $\vec{F}_N$  (npr. tijelo na stolu kao na ilustraciji 2.3). U slučajevima kada nije moguće odrediti pravac koji je



Crtež 2.3: Tijelo na površini stola osjeća silu  $\vec{F}_N$  koja ima orijentaciju okomito na dodirne površine.

okomit na određenu površinu, tada se pravac koji nosi orijentaciju normalne sile određuje iz Newtonovih zakona (npr. kod dodira šiljastih tijela).

### Sila trenja

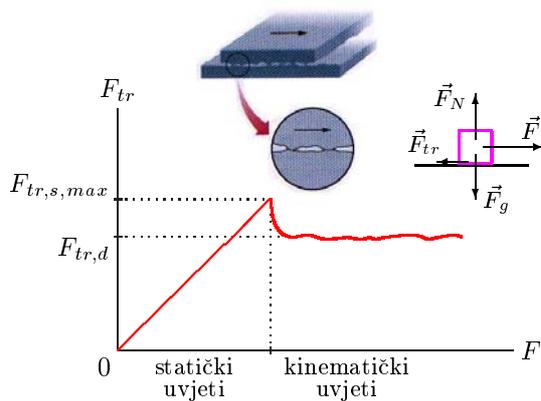
Pored sile reakcije, dva tijela u dodiru mogu djelovati i silom trenja koja ima orijentaciju tangencijalno dodirnim plohama. Ako neko tijelo vučemo po nekoj podlozi osjetit ćemo silu trenja koja djeluje suprotno sili kojom vučemo odabrano tijelo. Možemo razlikovati trenje između čvrstih tijela i fluida (tekućina i plinova kada govorimo o viskoznosti). Ovdje ćemo uvesti samo trenje koje se događa između čvrstih tijelima koja su u dodiru.

Trenje kao pojava je nezaobilazna u našim životima. S jedne strane nastoji se ostvariti što je moguće manja sila trenja između nekih podloga (npr. između pokretnih dijelova pogonskih motora), dok se u nekim drugim slučajevima teži postizanju velikih iznosa sila trenja (npr. kod guma automobila, sportske obuće). Vrlo jednostavnim priručnim pokusima možemo uočiti postojanje sile trenja. Ako neko masivnije tijelo pokušamo pokrenuti iz stanja mirovanja, uočavamo kako tijelo miruje sve dok iznos sile kojom djelujemo na to tijelo ne postane dovoljno velik da savlada otpor, tj. tu silu trenja. Time zaključujemo kako sila trenja, dok tijelo miruje, mijenja svoju vrijednost u skladu s ukupnom silom na to tijelo. Kad se tijelo pokrene, možemo uočiti kako je, za održavanje jednolikog gibanja tog tijela, potrebna sila nešto manjeg iznosa nego je bila za sami trenutak pokretanja gibanja. Stoga je potrebno razlikovati silu trenja u statičkim uvjetima od sile trenja u kinematičkim uvjetima. Na ilustraciji 2.4 prikazana je ovisnost iznosa sile trenja  $F_{tr}$  o iznosu ukupne sile  $F$  koja djeluje na tijelo. Maksimalni iznos  $F_{tr,s,max}$  koji može imati sila trenja, dok nema klizanja između dviju podloga, jednak je produktu statičkog koeficijenta trenja  $\mu_s$  i iznosa okomite komponente sile podloge  $F_N$

$$F_{tr,s,max} = \mu_s F_N. \quad (2.27)$$

Za tijela u klizanju, tj. u kinematičkim uvjetima, sila trenja je jednaka produktu kinematičkog koeficijenta trenja  $\mu_k$  i iznosa sile pritiska podloge  $F_N$

$$F_{tr,k} = \mu_k F_N. \quad (2.28)$$



Crtež 2.4: Iznos sile trenja  $F_{tr}$  u ovisnosti o iznosu ukupne sile  $F$  na tijelo (bez sile trenja). Ori-jentacija sile trenja  $\vec{F}_{tr}$  je suprotna orijentaciji sile  $\vec{F}$  na tijelo. U statičkim uvjetima iznos sile trenja  $F_{tr}$  uvijek je jednak iznosu sile  $F$ . Maksimalni iznos sile trenja u statičkim uvjetima  $F_{tr,s,max}$  nije manji od iznosa sile trenja u kinematičkim uvje-tima  $F_{tr,k}$ .

Za tijela u klizanju, orijentacija sile trenja je suprotna orijentaciji klizanja tijela, a za tijela u mirovanju suprotna orijentaciji zbroja svih ostalih sila na to tijelo.

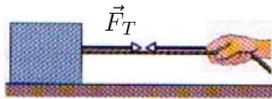
Koeficijenti trenja  $\mu_s$  i  $\mu_k$  su bezdimenzionalni i određuju se eksperimentalno. Njihove vrijednosti ovise o svojstvima dodirnih ploha danog tijela i podloge koju dodiruje. Općenito, kinematički koeficijent trenja  $\mu_k$  nije veći od statičkog  $\mu_s$

$$\mu_s \geq \mu_k. \tag{2.29}$$

Iako kinematički koeficijent trenja ovisi o iznosu brzine tijela, mi ćemo tu ovisnost, ovdje uglavnom, zanemarivati.

### Sila napetosti

Ako je npr. neko tijelo pričvršćeno za uže i ako djelujemo nekom silom na to uže, tada uže djeluje silom napetosti na tijelo i na ruku kojom vučemo uže (ilustracija 2.5). Tu silu obično označavamo sa  $\vec{F}_T$ . Ako se



Crtež 2.5: Ako je uže zanemarive mase, tada je sila napetosti istog iznosa na oba njegova kraja.

zanemari masa užeta, tada je sila napetosti u užetu istog iznosa na oba njegova kraja, tj. na tijela koja su vezana na krajevima užeta (u ovom slučaju na ruku i dano tijelo).

### Sila otpora fluida

Fluid je zajednički naziv za tekućinu i plin. Ukoliko se neko tijelo giba kroz fluid (ili fluid protiče pored tijela) javlja se sila otpora  $\vec{F}_D$  koja je suprotne orijentacije od relativnog gibanja tijela kroz fluid.

Ako za primjer uzmemo zrak kao promatrani fluid, i tijelo takvog oblika i gibanja kroz zrak koje stvara turbulenciju zraka iza sebe, tada je iznos sile otpora  $F_D$  proporcionalna kvadratu relativne brzine  $v$  tijela kroz zrak

$$F_D = \frac{1}{2} C \rho A v^2, \tag{2.30}$$

gdje je  $\rho$  gustoća mase zraka <sup>4</sup>,  $A$  površina poprečnog presjeka tijela okomito na orijentaciju relativne brzine  $\vec{v}$  tijela kroz zrak. Konstanta otpora  $C$  ovisi o svojstvima tijela, ali i, u manjoj mjeri, o brzini tijela relativno na zrak. Ori-jentacija sile otpora  $\vec{F}_D$  je suprotna orijentaciji brzine  $\vec{v}$  relativnog gibanja tijela kroz zrak.

Sila otpora zraka dobro je poznata, npr. skijašima, padobrancima i 'nebeskim letačima' (ilustracija 2.6) kao te njena ovisnost o površini poprečnog presjeka i brzini relativno na zrak. Za postizanje većih brzina skijaš

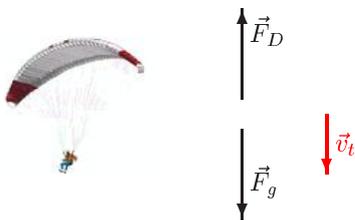
<sup>4</sup>Gustoća mase nekog sustava se definirat ćemo nešto kasnije.



Crtež 2.6: Skijaš u položaju kojim minimizira silu otpora, a 'nebeski letač' u položaju kojim ju maksimizira.

mora smanjiti silu otpora što je moguće više (npr. smanjujući površinu poprečnog presjeka postavljajući se u oblik 'jajeta' kao na ilustraciji 2.6), dok se 'nebeski letač' postavlja u položaj maksimalne površine nastojeći uzrokovati maksimalnu silu otpora.

Ako neko tijelo pada kroz zrak iz stanja mirovanja, tada se iznos sile otpora  $F_D$  postupno povećava od nule, kako raste iznos brzine. Sila otpora će se suprotstavljati sili teže  $\vec{F}_g$ . Ako tijelo dovoljno dugo pada, tada će se iznos sile  $F_D$  izjednačati sa  $F_g$  (npr. kod padobranca na ilustraciji 2.7). U tom slučaju tijelo se



Crtež 2.7: Padobranac u uvjetima padanja stalnom brzinom iznosa  $v_t$ . Iznosi sile otpora i sile teže imaju jednake vrijednosti.

više neće ubrzavati i padati će sa stalnim iznosom brzine  $v_t$  koju možemo nazvati konačna brzina. Njene se vrijednosti dobiju izjednačavajući iznose sile  $F_D$  i  $F_g$ , i iznosi

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}. \tag{2.31}$$

Neke tipične vrijednosti brzina  $v_t$  su dane u tablici 2.1

Primjeri tijela u gibanju kroz zrak	$v_t$ [m/s]
Tipični 'nebeski letač'	60
Teniska loptica	31
Košarkaška lopta	20
Loptica za stolni tenis	9
Kapljica vode ( $r = 1.5$ mm)	7
Tipični padobranac	5

Tablica 2.1: Primjeri nekih vrijednosti iznosa konačnih brzina gibanja  $v_t$  različitih tijela kroz zrak.

### Elastična sila

Elastična sila je jedan primjer promjenjive sile (npr. sila elastične opruge). Ako se neko elastično tijelo deformira, ono će u sebi stvarati silu koja će djelovati tako što će nastojati svoj oblik ponovno dovesti u ravnotežni. Tijelo se naziva elastičnim, ako se u njemu javlja sila proporcionalna pomaku  $\vec{d}$ . Tu silu pišemo u sljedećem obliku

$$\vec{F} = -k\vec{d}, \tag{2.32}$$

što je poznati Hookeov zakon. Konstanta  $k$  se naziva konstanta sile, a ovisi o svojstvima elastičnog tijela. Minus predznak u Hookeovom zakonu ukazuje kako je sila uvijek suprotne orijentacije pomaku  $\vec{d}$ . Ako je došlo do rastezanja npr. opruge, u njoj će vladati sila takva koja će nastojati vratiti njen prvotni obli, dakle stisnuti se.

Ovdje valja napomenuti kako neko tijelo ima elastična svojstva (tj. vrijedi Hookeov zakon) samo dok deformacije nisu prevelike. U slučajevima velikih deformacija nekog tijela može doći čak i do pucanja tog tijela.

### Unutarnje i vanjske sile

Sile na neko tijelo, općenito, se mogu podijeliti na unutarnje i vanjske. Vanjske sile odražavaju povezanost tijela s okolinom, dok unutarnje sile nastaju u tijelu zbog međudjelovanja njegovih sastavnih dijelova (npr. mišićne sile). Gibanje tijela kao cijeline može se ostvariti samo vanjskim silama.

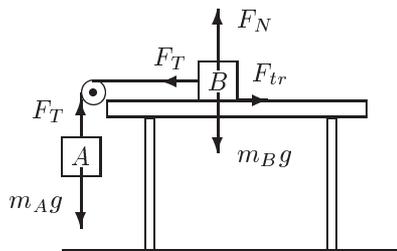
### Primjeri

1. Odredite akceleraciju tijela na slici, kao i silu napetosti u konopu, ako je koeficijent trenja između utega B i podloge 0.1. Masa obaju utega je 1 kg.

Rj.:

$$\begin{aligned} m_A &= m_B = 1 \text{ kg} \\ \mu &= 0.1 \\ \frac{F_T = ?}{a = ?} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_A g - F_T &= m_A a \\ F_T - \mu m_B g &= m_B a \\ \frac{F_T = gm(1 + \mu)/2 \approx 5.4 \text{ N}}{a = g(1 - \mu)/2 \approx 4.4 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$



### Pojam centripetalne sile

Prema prvom Newtonovu zakonu, ako na tijelo ne djeluje sila, ono ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu. Da bi se tijelo gibalo npr. po kružnici na njega mora djelovati sila koja će mu mijenjati smjer brzine. Silu koja drži tijelo u jednolikom kružnom gibanju nazivamo **centripetalnom silom**, a njen iznos je dan izričajem:

$$F_{cp} = m \frac{v^2}{r}, \quad (2.33)$$

gdje su  $m$ ,  $v$  i  $r$  masa, tangencijalna brzina i radijus kružnice. Orijentacija centripetalne sile je uvijek prema središtu kružnice.

### Primjeri

1. Centripetalna sila koja drži Mjesec u kruženju oko Zemlje je gravitacijska sila.
2. Za tijelo u vrtnji koje je vezano kopcem centripetalna sila je sila napetosti u konopcu.
3. Centripetalna sila koja drži automobil u gibanju po zavoju je sila trenja.

## 2.3 Rad, energija i snaga

Sila koja djeluje na tijelo mijenja mu brzinu ili kompenzira djelovanje drugih sila koje djeluju na tijelo. Tako, na primjer, guraјуći tijelo uz kosinu svladavamo silu trenja, Zemljinu silu teže i eventualno ubrzavamo tijelo.

**Rad** stalne sile  $F$  na nekom putu  $s$ , po definiciji, je jednak produktu komponente sile u smjeru puta i prevaljenog puta:

$$W = F_s \cdot s. \quad (2.34)$$

Ako je sila promjenjiva na nekom putu od  $A$  do  $B$ , tada je rad definiran linijskim integralom

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.35)$$

Osnovna jedinica za rad je  $1 \text{ J} = \text{Nm}$  (joule<sup>5</sup>). Druge jedinice koje su npr. u uporabi:  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (elektronvolt),  $1 \text{ kWh} = 3600000 \text{ J}$  (kilowattsat).

<sup>5</sup>U čast engleskog fizičara J. P. Joulea (1818-1889).

**Primjeri**

1. Koliki rad treba izvršiti da bi se tijelo mase  $m = 1$  kg podiglo na visinu od  $h = 1$  m?

Rj.:

Da bismo tijelo mase  $m$  podigli na visinu  $h$  potrebno je svladati silu Zemljine teže  $F_G = mg$ . Stoga je rad,  $W = F_G h = mgh = 9.81$  J.

**Energija** je sposobnost nekog sustava da obavlja rad. Jedinica za energiju je, također, 1 J. Kad sustav obavlja rad smanjuje mu se energija i obratno, kad okolina obavlja rad nad sustavom, energija mu se povećava. Tijelo može obavljati rad na osnovi svog položaja ili svog gibanja, te stoga razlikujemo potencijalnu i kinetičku energiju. **Kinetička energija** je energija koju tijelo ima zbog svog gibanja i proporcionalna je kvadratu brzine:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.36)$$

**Potencijalna energija** je energija koju tijelo ima zbog svog položaja u odnosu na druga tijela. Sila kojoj rad ne ovisi o putu već samo o početnom i konačnom položaju naziva se *konzervativna sila*. Za takve sile može se definirati potencijalna energija. Neke potencijalne energije su:

1. gravitacijska potencijalna energija u blizini površine Zemlje,

$$E_p = mgh.$$

Ovdje smo pretpostavili da se  $g$  ne mijenja s visinom  $h$ , a izraz se može dobiti na način da se izračuna rad potreban da se tijelo mase  $m$  podigne na visinu  $h$

$$W = \int_0^h mg dx = mgh.$$

2. potencijalna energija elastične opruge,

$$E_p = \frac{kx^2}{2},$$

Ukupna energija nekog sustava je zbroj kinetičke energije svih tijela tog sustava i potencijalnih energija. Za izolirane sustave ukupna energija je očuvana u vremenu. Moguć je prijelaz iz jednog oblika energije u drugi.

**Primjeri**

1. Tijelo mase 1 kg bačeno je uvis i dosegne visinu od 10 metara. Kolike su potencijalne i kinetičke energije tijela a) u trenutku bacanja, b) u trenutku dosezanja maksimalne visine te c) na pola puta?

Rj.:

- a) u trenutku bacanja:  $E_k = 98.1$  J,  $E_p = 0$  J;
- b) u trenutku maksimalne visine:  $E_k = 0$  J,  $E_p = 98.1$  J;
- c) na pola puta:  $E_k = 49.05$  J,  $E_p = 49.05$  J.

Ako na neki sustav djeluju samo konzervativne sile tada je zbroj kinetičke i potencijalne energije tog sustava stalan u vremenu

$$E_k + E_p = konst. \quad (2.37)$$

Međutim, ako osim konzervativnih sila, na sustav djeluju i neke nekonzervativne sile<sup>6</sup>, tada je suma promjena kinetičke i potencijalne energije jednak radu  $W_{nk}$  tih nekonzervativnih sila

$$\Delta E_k + \Delta E_p = W_{nk}. \quad (2.38)$$

**Snaga** je definirana kao omjer izvršenog rada u vremenu pa bismo je mogli shvatiti kao brzinu obavljanja rada odnosno prijenosa energije:

$$P = \frac{W}{t} \quad (2.39)$$

---

<sup>6</sup>Na primjer sila trenja.

Osnovna jedinica za snagu je watt

$$1\text{W} = 1\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Nekad je bila u uporabi i 1 KS  $\approx 735.5$  W (konjska snaga). Čovjek, na primjer, pri trčanju razvija snagu od oko 200 W.

## 2.4 Gravitacija

### 2.4.1 Keplerovi zakoni

U 16. stoljeću poljski astronom N. Kopernik (1473-1543) postavio je teoriju heliocentričnog sustava, pretpostavivši da Zemlja nije središte Svemira, kako je to tumačio Ptolomejev geocentrični sustav.

J. Kepler (1571-1630), njemački astronom, na osnovi dugog izučavanja rezultata opažanja danskog astronoma T. Brachea pronašao je tri zakona gibanja planeta oko Sunca iz kojih je Newton kasnije izveo opći zakon gravitacije.

Keplerovi zakoni glase (formulirani 1609. i 1619):

1. Svaka planeta se giba po elipsi u čijem se jednom žarištu nalazi Sunce.
2. Vektor koji ide od središta Sunca do središta planete u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine.
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta oko Sunca odnose se kao kubovi velikih poluosi njihovih eliptičnih putanja

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.40)$$

Gore navedenim zakonima u potpunosti je određeno gibanje planeta oko Sunca.

### 2.4.2 Newtonov zakon gravitacije

Problem privlačenja djelovanja Zemlje na sva tijela koja se nalaze u njezinoj blizini stoljećima je zaokupljalo pažnju ljudi.

Priča se da je Newton, uspoređujući padanje jabuke i gibanja Mjeseca oko Zemlje, zaključio da centripetalnu akceleraciju Mjeseca i akceleraciju slobodnog pada na Zemljinoj površini uzrokuje ista vrsta sile, tj. gravitacijsko privlačenje dviju masa.

Izraz za gravitacijsku silu kojom tijelo mase  $m_1$  djeluje na tijelo mase  $m_2$  ima sljedeći oblik

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (2.41)$$

gdje je  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  gravitacijska konstanta.  $r_{12}$  označava udaljenost dviju masa, a  $\hat{r}_{12}$  jedinični vektor orijentacije od mase  $m_1$  prema masi  $m_2$ . Gornji izraz vrijedi samo kad su obje mase materijalne točke. Sila između dva tijela konačne dimenzije dobije se integrirajući preko volumena objiju masa.

Keplerovi zakoni, kao i zakoni koji opisuju slobodan pad tijela u blizini površine Zemlje<sup>7</sup> mogu se izvesti iz Newtonovog zakona gravitacije. Stoga nam Keplerovi zakoni nisu više potrebni u izučavanju tih gibanja već samo Newtonov zakon gravitacije. Prije njega su postojala dva odvojena zakona ili dva različita međudjelovanja koja su opisivala gibanja svemirskih objekata s jedne strane, i gibanje tijela u blizini površine Zemlje, s druge strane. Svojim zakonom Newton je objedinio ta dva međudjelovanja u jedinstven, pa se zato često i naziva općim zakonom gravitacije. Akceleracija nekog tijela u blizini površine Zemlje uzrokovana gravitacijskom silom Zemlje može se izraziti na sljedeći način

$$g = \gamma \frac{m_z}{r_z^2} \approx 9.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (2.42)$$

gdje su  $m_z = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  i  $r_z = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$  masa i srednji radijus Zemlje.

<sup>7</sup> ili u blizini svih drugih svemirskih tijela

### Primjeri

1. Odredite ophodno vrijeme umjetnog satelita koji kruži na udaljenosti  $r$  od središta Zemlje.

Rj.:

Kada se satelit  $m$  giba po kružnici polumjera  $r$  oko središta Zemlje, gravitacijska sila postaje centripetalna

$$\gamma \frac{mm_z}{r^2} = m\omega^2 r,$$

gdje je  $\omega$  kružna frekvencija satelita. Odavde slijedi ophodno vrijeme

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_z}}.$$

### 2.4.3 Gravitacijska potencijalna energija

Već smo prije spomenuli da je gravitacijska potencijalna energija tijela mase  $m$  koje se nalazi na visini  $h$  iznad površine Zemlje

$$E_p = mhg. \quad (2.43)$$

U ovom izrazu je pretpostavljeno da je na površini Zemlje potencijalna energija jednaka nuli i da  $g$  ne ovisi o visini  $h$ . Međutim to je samo približno tako i samo za vrijednosti od  $h$  koje su puno manje od radijusa Zemlje.

Odredimo sada rad potreban da se tijelo mase  $m$  premjesti s položaja koji je udaljen za  $r$  od središta Zemlje pa do beskonačnosti

$$W = \int_r^\infty \gamma \frac{mm_z}{r} dr = -\gamma \frac{mm_z}{r}. \quad (2.44)$$

Ovaj izričaj, zapravo, predstavlja gravitacijsku potencijalnu energiju tijela mase  $m$  u gravitacijskom polju Zemlje, gdje je pretpostavljeno da je potencijalna energija u beskonačnosti jednaka nuli. Ako bismo pretpostavili da je gravitacijska potencijalna energija jednaka nuli na površini Zemlje, tada bi izraz imao sljedeći oblik

$$E_p = \gamma mm_z \frac{r - r_z}{rr_z}, \quad (2.45)$$

koji za tijela u blizini površine Zemlje<sup>8</sup> prelazi u već poznati oblik  $E_p = mgh$ .

## 2.5 Inercijski i neinercijski sustavi

U opisivanju gibanja tijela odabiremo određeni koordinatni sustav i proučavamo gibanje relativno prema njemu. Vektor položaja, brzina, akceleracija, te još neke druge fizikalne veličine, ovise o izboru referentnog sustava. Sile koje djeluju na tijelo ne ovise o izboru referentnog sustava. Stoga, Newtonovi zakoni gibanja imaju isti oblik u svim sustavima u kojima akceleracija poprima istu vrijednost. Takve sustave nazivamo **inercijskim sustavima**. Sustavi koji se gibaju ubrzano s obzirom na neki inercijalni sustav jesu **neinercijski**. U takvim sustavima ne vrijede Newtonovi zakoni. Uvođenjem određenih prividnih sila mogu se stvoriti uvjeti u kojima drugi Newtonov zakon postaje valjan i u takvim sustavima. Takve prividne sile su npr. centrifugalna i Coriolisova sila koje se javljaju kod sustava koji jednoliko kruže u odnosu na inercijalne sustave. Riješavajući određene probleme u neinercijalnim sustavima (uz uvođenje prividnih sila) ponekad je algebarski jednostavnije doći do rješenja nego riješavajući isti problem kroz inercijalne sustave. To je, uostalom, jedini razlog uvođenja neinercijskih sustava.

## 2.6 Osnove relativističke mehanike

Newtonova mehanika vrijedi samo za brzine mnogo manje od brzine svjetlosti. Za opisivanja pojava pri kojima su brzine usporedive s brzinom svjetlosti potrebna je specijalna teorija relativnosti, koju je početkom

---

<sup>8</sup> $(r - r_z) \ll r_z$

ovog stoljeća, koristeći se eksperimentalnim činjenicama, razvio Albert Einstein (1879-1955). On je pretpostavio da svi fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima. U Newtonovoj mehanici pojmovi brzine, energije, položaja itd. su relativni pojmovi, tj. zavise o sustavu odakle ih promatramo, dok su, s druge strane pojmovi prostora i vremena apsolutni pojmovi. U Einsteinovoj mehanici svi pojmovi, pa i prostor i vrijeme, su relativni.

Specijalna teorija relativnosti zasnovana je na dva postulata:

1. principu relativnosti koji kaže da u inercijskim sustavima sve prirodne pojave teku na isti način,
2. jednakosti brzine svjetlosti u svim inercijalnim sustavima

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nedvojbeno je utvrđeno da se svjetlost giba istom brzinom u svim sustavima koji se gibaju stalnom brzinom jedan u odnosu na drugi.

Iz ova dva postulata, kao posljedica, izlaze tzv. Lorentzove transformacije za prijelaz iz sustava  $S(x, y, z)$  u sustav  $S'(x', y', z')$  koji se giba brzinom  $v$  u orijentaciji osi  $x$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

### 2.6.1 Fizikalne posljedice Lorentzovih transformacija

Lorentzove su transformacije osnova Einsteinove specijalne teorije relativnosti. Iz njih se lako zaključuje konstantnost brzine svjetlosti u svim inercijskim sustavima. Naime, izraz ispod kvadratnog korijena  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  u izrazima 2.46 ne smije biti negativan.

Druga fizikalna posljedica je vezana uz duljinu tijela koja nam kaže kako je duljina tijela u vlastitom sustavu  $d_0$  najveća<sup>9</sup>

$$d = d_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.47)$$

Ovu posljedicu nazivamo **kontrakcija duljine**.

Daljnja fizikalna posljedica Lorentzovih transformacija jeste ta koja povezuje vremena trajanja u različitim sustavima. U vlastitom sustavu vrijeme trajanja određenog događaja  $\Delta t_0$  traje najkraće

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.48)$$

Ovu posljedicu nazivamo **dilatacija vremena**.

Ako se neko tijelo giba brzinom  $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$  u odnosu na sustav  $S'$ , tada su mu komponente brzina u sustavu  $S$  dane izrazima

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\ u_y &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} u'_y \\ u_z &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} u'_z \end{aligned} \quad (2.49)$$

Vidimo da se brzine mjerene u dva sustava ne zbrajaju na način kako smo naučili običnim zbrajanjem. Ovakvo slaganje brzina je, također, jedna od fizikalnih posljedica Lorentzovih transformacija.

<sup>9</sup>Sustav u kojem tijelo miruje nazivamo vlastitim sustavom.

## 2.6.2 Relativistička dinamika

Vidimo da su u relativističkoj mehanici referentni sustavi povezani Lorentzovim transformacijama te, stoga, i jednadžbe gibanja moraju biti povezane na sličan način. U klasičnoj mehanici ukupna količina gibanja izoliranog sustava je očuvana. Ako bismo upotrijebili klasičan izraz za količinu gibanja  $\vec{p} = m\vec{v}$ , tada zakon očuvanja količine gibanja ne bi vrijedio nakon Lorentzovih transformacija gledano iz drugog sustava.

Međutim, može se pokazati da je zakon očuvanja količine gibanja u skladu s teorijom relativnosti, ako količinu gibanja definiramo tzv. relativističkim izrazom

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.50)$$

Također se može pokazati da se i klasični izraz za kinetičku energiju  $E_k = mv^2/2$ , ne može upotrijebiti već se uvodi novi izraz

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \quad (2.51)$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da kinetičku energiju možemo shvatiti kao razliku ukupne energije

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.52)$$

i energije u mirovanju  $mc^2$ .

Iz izraza za količinu gibanja i kinetičke energije dolazi se do izraza za ukupnu energiju  $E$  ovisnu o iznosu količine gibanja  $p$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (2.53)$$

Uočite da svi ovi izrazi vrijede samo za čestice mase različite od nule i ne smiju se primjeniti na čestice koje imaju masu nula. Energiju i količinu gibanja čestica koje imaju masu jednaku nuli uvest ćemo kasnije.

### Pitanja za vježbu

1. Što je mehanika?
2. Čime se bavi kinematika?
3. Kako smo definirali pojam materijalne točke?
4. Što je radijus vektor?
5. Što je pomak?
6. Kako smo definirali brzinu, a kako akceleraciju?
7. Položaj i brzina kod gibanja sa stalnom akceleracijom.
8. Slobodni pad tijela na Zemlji.
9. Gibanje po kružnici; kutna brzina i veza s linearnom brzinom.
10. Čime se bavi dinamika?
11. Pojam sile. Koje su to četiri osnovne sile u prirodi?
12. Što je to masa?
13. Što su inercijski, a što neinercijski sustavi?
14. Definirajte količinu gibanja.
15. Odredite stalnu silu koja tijelu u vremenu od 10 sekundi poveća količinu gibanja s 20 kg m/s na 30 kg m/s. (Rj.: 1 N)

16. Newtonovi zakoni gibanja. Iskažite ih.
17. Zakon očuvanja količine gibanja.
18. Objasnite silu trenja.
19. Pojam centripetalne sile. Navedite neke primjere.
20. Definirajte rad, energiju i snagu.
21. Koje vrste energije poznajete? Objasnite.
22. Kako glasi zakon očuvanja energije?
23. Pokažite valjanost zakona očuvanja mehaničke energije (zbroya kinetičke i potencijalne energije) na primjeru slobodnog pada tijela.
24. Što su konzervativne, a što nekonzervativne sile?
25. Koju maksimalnu visinu dosegne tijelo mase 1 kg, ako je bačeno vertikalno uvis uz kinetičku energiju od 98.1 J? (Rj.: 10 m)
26. Objasnite Newtonov zakon gravitacije.
27. Kolikom silom Zemlja privlači tijelo mase 1 kg koje se nalazi na Mjesecu, a kolikom Mjesec privlači tijelo mase 1 kg koje se nalazi na Zemlji? Masa Mjeseca je  $7.3 \cdot 10^{22}$  kg, a udaljenost između središta Zemlje i Mjeseca je 384000 km.
28. Iskažite Keplerove zakone.
29. Do koje visine bi skočio atletičar na Mjesecu, ako na Zemlji skoči 2 metra?
30. Kako glase postulati specijalne teorije relativnosti?
31. Lorentzove transformacije.
32. Navedite fizikalne posljedice Lorentzovih transformacija.
33. Kako glasi relativistički izraz za količinu gibanja?
34. Ukupna i kinetička energija.

## Poglavlje 3

# TITRANJE I VALOVI

Jedno od važnih gibanja predstavljaju gibanja koja se ponavljaju u nekom vremenskom intervalu kojeg nazivamo period. Mnoge su pojave u prirodi periodične, npr. gibanje stabla na vjetru, titranje molekula i atoma u čvrstom tijelu, kucanje srca, . . . . Analizom titranja dobiva se informacija o unutrašnjoj strukturi sustava. Ako neka čestica koja titra prenosi svoje gibanje na susjedne čestice u nekom sredstvu, tada kažemo da nastaje mehanički val u tom sredstvu. Valovi zvuka, koji uzrokuju osjet sluha, sastoje se od titranja molekula zraka. Svjetlosni valovi, koji uzrokuju osjet vida, sastoje se od oscilatornog elektromagnetskog polja.

### 3.1 Titranje

#### 3.1.1 Jednostavno harmonijsko titranje

Najvažnija vrsta titranja je tzv. **jednostavno harmonijsko titranje**. Takvo se gibanje lako matematički izvodi jer je usporedivo s jednolikim kružnim gibanjem, a može se zapisati preko trigonometrijskih funkcija sinusa i cosinusa. Harmonijsko titranje u prirodi je jedna idealizacija, ali se pokazuje da se bilo kakvo periodično titranje može zapisati kao zbroj idealnih harmonijskih titranja. Iz definicije izlazi da se harmonijsko titranje prikazuje na sljedeći način:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

gdje  $A$  predstavlja **amplitudu** titranja,  $\omega$  **kružnu frekvenciju**, a  $\varphi$  nazivamo **početnom fazom**.  $x(t)$  označava položaj tijela u odnosu na ravnotežni položaj, a nazivamo ga **elongacijom**. Amplituda titranja je, zapravo, najveća elongacija.

Može se lako vidjeti da je vrijeme za koje se titranje ponavlja dano sljedećim izričajem

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.2)$$

a nazivamo ga **periodom titranja**. **Frekvenciju titranja**  $\nu$  definiramo kao broj titranja u jedinici vremena te, stoga, vrijedi

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (3.3)$$

Osnovna mjerna jedinica za frekvenciju je  $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$  (herz). Argument funkcije sin u izričaju 3.1,  $(\omega t + \varphi)$  se naziva **fazom titranja** koja određuje stanje titranja, odnosno položaj materijalne točke u trenutku  $t$ .

Pogledajmo kako se brzina titranja mijenja s vremenom kod harmonijskog titranja. Iz definicije za brzinu izlazi

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.4)$$

Dakle, i brzina se mijenja harmonijski, samo što umjesto sinusne funkcije stoji cosinusna. Odatle slijedi da kod maksimalne elongacije brzina tijela je jednaka nuli, dok je maksimalna brzina onda kad je elongacija nula.

**Primjeri**

1. Kružna frekvencija za tijelo mase  $m$  vezano za oprugu konstante elastičnosti  $k$  je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2. Kružna frekvencija matematičkog njihala duljine  $l$  koji se nalazi u gravitacijskom polju  $g$  je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

**Energija titranja**

Mehanički sustav koji titra ima energiju u obliku kinetičke i potencijalne energije. Lako zaključujemo da kinetička energija ima maksimalne vrijednosti prilikom prolaza čestice kroz ravnotežni položaj, a minimalnu vrijednost kod maksimalnih otklona čestice od ravnoteženog položaja. Sustav titra tako da se potencijalna i kinetička energija neprestano izmjenjuju uz uvjet da njihov zbroj ostaje očuvan u vremenu te ima vrijednost

$$E = E_p + E_k = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (3.5)$$

**3.1.2 Prigušeno titranje**

Ako nema gubitaka energije na okolinu (npr. zbog trenja), tada bi sustav titrao stalno jednakim elongacijama. Takve titraje nazivamo neprigušenim titrajima. U prirodi susrećemo titraje kod kojih se amplituda smanjuje s vremenom dok se na kraju titraji potpuno ne zaustave. Titranje prestaje zbog nekonzervativnih sila koje energiju sustava prenose izvan sustava te takve titraje nazivamo **prigušenima**. Kod takvih titraja amplituda opada eksponencijalno

$$A = A_0 e^{-\Gamma t}, \quad (3.6)$$

gdje se  $\Gamma$  naziva koeficijentom gušenja<sup>1</sup>.

Ako na titrajni sustav djeluju periodične vanjske sile (npr.  $F = F_0 \cos \omega_F t$ ), nastat će tzv. prisilno titranje. U tim slučajevima može nastat **rezonancija**. To je stanje pri kojem dolazi do maksimalnog prenošenja energije na titrajni sustav zbog utjecaja vanjske periodične sile. To se događa kad je frekvencija periodične sile  $\omega_F$  bliska frekvenciji titrajnog sustava  $\omega$ .

**Primjeri**

1. Mnogi viseći mostovi su se rušili prilikom rezonancije uzrokovanih vjetrom ili uređenim gibanjem vojnika.

**3.2 Valovi**

U prirodi su čestice koje titraju okružene mnoštvom istovrsnih, na neki način međusobno povezanih čestica. U tom slučaju titranje jedne čestice neće ostati izolirano, već će se energija prenositi na ostale čestice. Tada kažemo da nastaje **valno gibanje**.

Obzirom na način širenja valnog procesa valove djelimo na longitudinalne (uzdužne) i transverzalne (poprečne). Ako se poremećaj širi u pravcu po kojem se vrši titranje čestica, onda kažemo da je val **longitudinalan**; čestice titraju uzduž pravca širenja vala. Ako se poremećaj širi u pravcu koji stoji okomito na smjer titranja čestica, kažemo da je val **transverzalan**. Najznačajniji primjer longitudinalnih valova su zvučni valovi. Primjer transverzalnih valova su valovi na žici i elektromagnetski valovi (Elektromagnetski valovi nisu mehanički valovi).

---

<sup>1</sup>  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$  često se naziva vremenom života titranja.

Udaljenost na koju se titranje proširi za vrijeme jednog perioda zovemo **valna duljina** i često označavamo sa  $\lambda$ . Brzina kojom se poremećaj prenosi na okolne čestice se naziva **fazna brzina**:

$$v = \nu \cdot \lambda, \quad (3.7)$$

gdje je  $\nu$  frekvencija titranja.

### 3.2.1 Valna funkcija

Širenje poremećaja s jednog mjesta na drugo predstavlja u suštini prijenos energije. Prijenos energije valnim procesom jedan je od najvažnijih oblika prenošenja energije u prirodi. Da bismo vidjeli o čemu zavisi prijenos energije moramo odrediti veličine koje opisuju fizikalno stanje sredstva.

Kada smo promatrali harmonijsko titranje zaključili smo da je fizikalno stanje čestice koja titra tijekom vremena određeno sinusnom ili cosinusnom funkcijom. Možemo očekivati da će tako biti i kod procesa širenja vala. Može se zaključiti da je fizikalno stanje sredstva kojim se širi valni poremećaj, npr. duž osi  $z$ , potpuno određeno **valnom funkcijom**

$$\Psi(z, t) = A \sin\left(\omega t - \frac{z}{v}\right), \quad (3.8)$$

gdje  $z$  označava koordinatu točke koju promatramo u trenutku  $t$ . U slučaju da se ravni val širi općenito trodimenzionalnim prostorom u smjeru i orijentaciji određenim vektorom  $\vec{k}$ , tada se valna funkcija može zapisati u obliku:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (3.9)$$

gdje  $\vec{k}$  nazivamo **valnim vektorom** čiji je iznos

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Energija vala

U valnom procesu energija se prenosi s jednog mjesta na drugo. Titranje jedne čestice sredstva pobuđuje na titranje i druge čestice te cijelo sredstvo titra. Može se pokazati da je prosječna kinetička energija jediničnog volumena

$$\bar{E}_k = \frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2, \quad (3.11)$$

gdje  $\rho$  označava gustoću sredstva. Prosječna potencijalna energija je jednaka prosječnoj kinetičkoj energiji, pa je ukupna energija jediničnog volumena

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (3.12)$$

Energiju jediničnog volumena nazivamo još i **volumskom gustoćom energije**.

Količinu energije koju val prenese kroz neku površinu, okomito na smjer širenja vala, u jedinici vremena nazivamo **tokom energije**, a tok energije kroz jediničnu površinu nazivamo **intenzitetom vala**. Jedinica za tok energije je J/s, a za intenzitet vala W/m<sup>2</sup>.

### 3.2.3 Grupna brzina

Fazna brzina kod valova čvrste frekvencije (monokromatskih valova) označavala je i brzinu prijenosa energije. Međutim, u prirodi se obično susreću valovi koji su protegnuti na određeni dio prostora i kojih pobuda traje samo neko vrijeme. Takav oblik pobuđivanja sredstva se naziva **valnim paketom**. Da bi se ostvario jedan takav proces potrebno je imati veliki broj različitih monokromatskih valova. Valovi različitih frekvencija mogu u pravilu imati različite fazne brzine, stoga možemo postaviti pitanje kojom brzinom se prenosi energija tog valnog paketa. Brzina kojom se energija prenosi tim procesom se naziva **grupnom brzinom**. Pokazuje se da je grupna brzina  $v_g$  jednaka odnosu promjene kružne frekvencije i promjene iznosa valnog vektora:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (3.13)$$

Kako je fazna brzina  $v$  vezana s kružnom frekvencijom  $v = \frac{\omega}{k}$  i iznosom valnog vektora  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , zaključujemo

$$v_g = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (3.14)$$

Vidimo da je grupna brzina  $v_g$  različita od fазne brzine  $v$  onda kad fazna brzina ovisi o valnoj duljini.

### 3.2.4 Interferencija i difrakcija valova; odbijanje i lom valova

Ako u nekom kontinuumu imamo istovremeno širenje nekoliko valova različitih izvora, onda dolazi do situacije da pojedine točke sredstva vrše titranje zbog prisutnosti svakog od vala. Pod utjecajem svakog pojedinog vala dolazi do titranja onako kako određuje valna funkcija dotičnog vala. Kada istovremeno djeluje više valova, sumarno titranje je jednako algebarskom zbroju pojedinih valova.

#### Interferencija

Interferencija se sastoji u tome da se, po superpoziciji dvaju ili više valova, titranja u jednim točkama mogu pojačavati a u drugim oslabljivati.

Ako uzmemo dva izvora vala istih frekvencija tada možemo odrediti pod kojim će uvjetima nastati pojačanje, odnosno oslabljenje. Razlika faze dvaju valova u nekoj točki na udaljenosti  $r_1$  i  $r_2$  od dvaju izvora je dana sa

$$\delta = k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.15)$$

gdje  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  označavaju početne faze dvaju izvora. Lako je zaključiti da će nastati pojačanje na mjestima gdje vrijedi

$$\delta = 2\pi n, \quad (3.16)$$

gdje je  $n$  bilo koji pozitivni i negativni cijeli broj,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Titraji će se međusobno oslabiti na mjestima gdje vrijedi

$$\delta = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.17)$$

#### Difrakcija

Difrakcija valova je pojava širenja valnog procesa iza zapreke. Ako val prilikom širenja u sredstvu naiđe na zapreku, onda se on širi iza nje. Objašnjenje pojave difrakcije može se dati pomoću **Hygensovog principa**, koji kaže da je svaka točka valne fronte izvor novih sekundarnih valova koji se od te točke šire na sve strane.

#### Odbijanje

Odbijanje valova je proces koji nastaje na granici dvaju sredstava, a manifestira se u tom da se val koji dođe do granice, odbija i širi natrag. Pri tome vrijedi da je kut upadanja jednak kutu odbijanja. Kut upadanja (odbijanja) je kut što ga okomica na granicu sredstva zatvara s pravcem širenja upadnog (odbijenog) vala.

#### Lom

Lom vala nastaje kada se valovi iz jednog sredstva nastavljaju širiti u drugo sredstvo te kada su brzine valova različite u različitim sredstvima (npr. lom vala na granici zrak-voda). Lako se zaključuje da vrijedi zakon loma

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (3.18)$$

gdje  $\alpha$  i  $\beta$  označavaju upadni i lomljeni kut, a  $v_1$  i  $v_2$  brzine vala u jednom i drugom sredstvu. Omjer dviju brzina  $v_1$  i  $v_2$  se naziva relativnim indeksom loma drugog sredstva u odnosu na prvo

$$n = \frac{v_1}{v_2}. \quad (3.19)$$

**Primjeri**

1. Brzina svjetlosti je veća u zraku nego u vodi ili staklu.

**3.3 Zvučni valovi**

Zvučni valovi su najvažniji primjer longitudinalnih valova, koji se mogu širiti kroz plinovito, tekuće ili kruto sredstvo. Ovdje ćemo se ograničiti samo na zvučne valove u zraku.

Zbog razlike u tlaku<sup>2</sup> molekule zraka titraju oko ravnotežnog položaja. Pri normalnim uvjetima brzina zvučnog vala u zraku je 334 m/s. Čovjek može čuti samo frekvencije zvučnih valova od 20 Hz do 20000 Hz. Takve valove nazivamo **čujnim valovima**. Valove frekvencije veće od 20000 Hz nazivamo **ultrazvukom**, a one kojima je frekvencija manja od 20 Hz **infrazvukom**.

Ogroman broj zvukova koje možemo čuti u našoj okolini razlikujemo po visini, boji i jačini. Mijenja li se frekvencija zvučnog vala, tada kažemo da se mijenja **visina zvuka**. Kažemo da zvukovi (tonovi) veće frekvencije imaju više tonove. Prema tome visina zvuka se određuje frekvencijom zvučnog vala. **Boju zvuka** određuje način titranja. Boja zvuka je određena sastavom frekvencija koji ga formiraju. Skup svih frekvencija koji se pojavljuju u određenom zvučnom valu nazivamo **akustičnim spektrom**. **Jačina zvuka** određena je intenzitetom zvučnog vala, tj. energijom koju zvučni val prenese u jedinici vremena kroz jediničnu površinu okomito na smjer širenja vala. Ljudsko uho je najosjetljivije na zvučne valove frekvencije od 1000 Hz do 4000 Hz. Minimalna jačina zvuka koju još čujemo se naziva prag čujnosti. U domeni najveće osjetljivosti prag čujnosti je oko  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>, a prag osjećaja bola je oko 10 W/m<sup>2</sup>. Budući je ogroman interval između praga čujnosti i praga bola, uvodimo fizikalnu veličinu koju nazivamo **nivo jačine zvučnog vala**:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}, \quad (3.20)$$

gdje  $I_0$  označava intenzitet praga čujnosti. Jedinica u kojoj izražavamo nivo jačine zvučnog vala nazivamo decibelima (dB). Na ovaj način raspon nivoa jačine zvučnog vala od praga čujnosti do praga boli ide od 0 do 130 dB.

**Primjeri**

1. Spavaća soba noću, 20 dB.
2. Biblioteka, 30 dB.
3. Normalan razgovor, 60 dB.
4. Radionica, 80 dB.
5. Rad avionskog motora na udaljenosti od 3 m, 130 dB.

**3.4 Elektromagnetski valovi**

Svjetlosni valovi, radio-valovi, toplinski valovi,  $\chi$ -zračenje i  $\gamma$ -zračenje primjeri su posebne vrste vala koji zovemo **elektromagnetski val** koji se međusobno razlikuju samo po svojoj frekvenciji i načinu postanka. Elektromagnetski val je transverzalni val koji se sastoji od dvije komponente: električnog i magnetskog polja koji titraju istom frekvencijom okomito jedan na drugog i okomito na smjer širenja vala. Kroz vakuum elektromagnetski val se širi brzinom svjetlosti,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Mehanički valovi se šire izmjenom energije među česticama dok kod elektromagnetskog vala postoji ekvivalentna izmjena između električnog i magnetskog polja. Promjena električnog polja stvara promjenu magnetskog polja i obratno, promjena magnetskog uzrokuje promjenu električnog. Za širenje elektromagnetskih valova ne treba sredstvo te se, stoga, elektromagnetski valovi mogu šire kroz vakuum.

Oko je osjetljivo na dio elektromagnetskih valova kojeg nazivamo vidljiva svjetlost jer na mrežnicu oka djeluje električno polje. Detaljnije o elektromagnetskim valovima i svjetlosti kao dijelu spektra elektromagnetskih valova govorit ćemo nešto kasnije.

<sup>2</sup>Tlak će biti objašnjen u sljedećem poglavlju.

**Pitanja za vježbu**

1. Što je općenito titranje, a što harmonijsko titranje?
2. Objasnite smisao fizikalnih veličina: amplituda, kružna frekvencija, faza, početna faza, period, fazna brzina i frekvencija.
3. Koja je ovisnost brzine titranja o vremenu?
4. Kolika je energija harmonijskih titranja?
5. Što je to prigušeno titranje i kakva je funkcijska ovisnost amplitude titranja o vremenu?
6. Što je to koeficijent gušenja?
7. Što je prisilno titranje?
8. Što je to rezonancija i kako nastaje?
9. Što je val i kako nastaje? Objasnite pojmove transverzalnog i longitudinalnog vala.
10. Što je valna duljina i kako izgleda funkcijska veza s faznom brzinom i frekvencijom?
11. Što je to valna funkcija i koji je oblik funkcije za ravni val?
12. Što je valni vektor?
13. Koji je oblik volumske gustoće energije mehaničkog vala?
14. Objasnite pojmove toka energije i intenziteta vala.
15. Objasnite pojam valnog paketa i grupne brzine.
16. Objasnite pojave interferencije i difrakcije valova.
17. Analizirajte pojave odbijanja i loma valova.
18. Objasnite pojam relativnog indeksa loma dvaju sredstava.
19. Što je zvuk? Koje su fizikalne osobine zvuka?
20. Što je infrazvuk, a što ultrazvuk?
21. Što nazivamo akustičnim spektrom?
22. Što je nivo jačine zvuka i u kojoj se jedinici mjeri?
23. Što je to elektromagnetski val i koja je osnovna razlika elektromagnetskih i mehaničkih valova?

## Poglavlje 4

# TOPLINA

### 4.1 Pojam temperature

Često dodirrom određujemo da li je neko tijelo hladno, toplo ili vruće, odnosno da li je toplije ili hladnije nego neko drugo tijelo. Osim ovakvog subjektivnog procjenjivanja temperature upoznat ćemo objektivne načine mjerenja temperature. Temperatura je fizikalna veličina koja karakterizira stupanj zagrijanosti nekog tijela. Pravo fizikalno značenje temperature upoznat ćemo nešto kasnije u kinetičko-molekularnoj teoriji topline.

Dovedemo li dva tijela u međusobni kontakt, čestice s većom kinetičkom energijom u sudarima predaju energiju onim česticama koje imaju manju energiju. Na taj način energija u obliku topline prelazi s jednog tijela na drugo. Za tijelo koje pri tom procesu gubi energiju kažemo da je toplije, a ono koje prima da je hladnije. Proces prelaženja energije odvija se sve dok tijela ne počnu davati onoliko energije koliko i primaju. U tom slučaju uspostavlja se određeno stanje koje zovemo stanjem **toplinske ravnoteže**.

Mnoge su fizikalne veličine funkcije temperature, te se mjerenjem tih veličina može mjeriti temperatura (npr. volumen tekućine ili električni otpor). Da bismo mjerili temperaturu potrebno je još definirati mjernu skalu i izabrati mjernu jedinicu. Jedan od izbora je i Celsiusova temperaturna skala kod koje se kaže da se pri normalnom tlaku voda smrzava kod temperature od  $0^{\circ}\text{C}$ , a isparava kod  $100^{\circ}\text{C}$ .

U fizici se najčešće upotrebljava apsolutna termodinamička skala s mjernom jedinicom koju nazivamo kelvin<sup>1</sup> koja je ujedno i jedna od osnovnih mjernih jedinica SI sustava. Temperatura od  $0\text{ K}$  zove se **apsolutna nula** i odgovara Celsiusovoj temperaturi od  $-273.15^{\circ}\text{C}$ . Temperaturni interval izražen u kelvinima jednak je temperaturnom intervalu izraženom u stupnjevima Celsiusa.

### 4.2 Toplinsko rastezanje čvrstih tijela i tekućina

Gotovo se sva tijela zagrijavanjem rastežu, tj. volumen im se povećava. Izuzetak je npr. voda čiji se volumen smanjuje prilikom zagrijavanja u intervalu od  $0^{\circ}\text{C}$  do  $4^{\circ}\text{C}$ .

Eksperimentalno je utvrđeno da se dužina nekog tijela zagrijavanjem mijenja sa zakonom

$$l = l_0(1 + \alpha\theta), \quad (4.1)$$

gdje je  $l_0$  duljina tijela pri  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $l$  duljina pri temperaturi  $\theta$ , a  $\alpha$  **koeficijent linearnog rastezanja** tijela<sup>2</sup>. Lako se vidi da je mjerna jedinica za koeficijent linearnog rastezanja  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Ovaj se izraz može primjeniti ne samo za grijanje tijela već i za hlađenje. Koeficijent  $\alpha$  je, također, sam po sebi ovisan o temperaturi, ali se u većini problema uzima konstantnim.

Ako promatramo volumsko širenje krutih tijela i tekućina, tada je ono dano u sličnom obliku kao i linearno širenje

$$V = V_0(1 + \beta\theta), \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Lord Kelvin (pravo ime William Thomson, 1824-1907), britanski matematičar i fizičar.

<sup>2</sup>Koeficijenti lineranog rastezanja za nekoliko materijala

Materijal	$\alpha/\text{K}^{-1}$	Materijal	$\alpha/\text{K}^{-1}$	Materijal	$\alpha/\text{K}^{-1}$
aluminij	$24 \cdot 10^{-6}$	platina	$9 \cdot 10^{-6}$	staklo	$9 \cdot 10^{-6}$
bakar	$17 \cdot 10^{-6}$	srebro	$19 \cdot 10^{-6}$	čelik	$12 \cdot 10^{-6}$

gdje  $\beta$  nazivamo volumnim koeficijentom rastezanja i vrijedi približna veza linearnog i volumnog koeficijenta rastezanja

$$\beta \approx 3\alpha. \quad (4.3)$$

### Primjeri

1. Čeličnu šipku, koja ima duljinu od dva metara pri temperaturi od  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  zagrijemo do  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Koliko je relativno produljenje i kolika je duljina šipke?

Rj.:

Relativno produljenje je

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T = 6 \cdot 10^{-4},$$

a duljina šipke

$$l_{50} = l_0 + \Delta l = 2.0012\text{ m}.$$

## 4.3 Jednadžba stanja plina

Pri proučavanju plinova služiti ćemo se modelom idelanih plinova i zakoni koje ćemo spominjati odnositi će se na tu aproksimaciju. Kod idelanih plinova međumolekularne sile su zanemarive, volumen molekula je također zanemariv u usporedbi s volumenom plina pa molekule smatramo materijalnim točkama koje jedna na drugu ne djeluju osim u slučaju izravnog sudara. Većina se realnih plinova može dosta dobro aproksimirati ovim modelom pri normalnim tlakovima i temperaturama. Plin je bliži idealnom opisu što mu je temperatura veća, a tlak i gustoća manji.

Najprije ćemo definirati pojam **tlaka** kao odnos sile okomite na površinu i površine

$$p = \frac{F}{S}. \quad (4.4)$$

Jedinica za tlak je  $1\text{ Pa} = \text{N}/\text{m}^2$  (pascal).

Masa plina, temperatura  $T$ , tlak  $p$  i volumen  $V$  su parametri koji potpuno određuju stanje plina. Ako se proizvoljno zadaju tri od njih, četvrta se odredi kao funkcija ostalih triju. Postoji dakle funkcijska veza koja povezuje te fizikalne veličine. Tu funkcijsku vezu, ili jednadžbu nazivamo **jednadžba stanja plina**. Jednadžba stanja idealnih plinova se dobije iz triju eksperimentalnih zakona poznatih pod nazivima: Boyle-Mariotteov, Gay-Lussacov i Charlesov zakon, koji su odredili zakone promjene stanja plina pri konstantnoj temperaturi, konstantnom tlaku i konstantnom volumenu. Takva jednadžba je oblika

$$\frac{pV}{T} = nR, \quad (4.5)$$

gdje je  $R$  univerzalna plinska konstanta,  $R = 8.31\text{ J}/(\text{mol K})$ , a  $n$  označava količinu tvari izraženu u molovima. Jednadžbu stanja plina možemo zapisati i u drugom obliku ako uvedemo Boltzmannovu konstantu

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.39 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}, \quad (4.6)$$

gdje  $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$  označava Avogadrov broj molekula jednog mola plina. Jednadžba stanja plina u tom slučaju glasi

$$\frac{pV}{T} = Nk, \quad (4.7)$$

gdje  $N$  označava broj čestica plina.

## 4.4 Termodinamički zakoni

Termodinamika se zasniva na dva osnovna zakona ili principa. Prvi zakon termodinamike zapravo je poseban primjer općih zakona očuvanja energije, koji obuhvaća i toplinsku energiju. On kaže da ukupna energija izoliranog sustava ostaje konstantna bez obzira na procese koji se u njemu odvijaju. Drugi zakon govori o uvjetima u kojima se iz topline može dobiti rad.

Termodinamički sustav se sastoji od određene količine tvari unutar neke zatvorene površine. U ravnotežnom stanju u svim točkama tog sustava vlada jednak tlak i temperatura.

Termodinamički proces je promjena stanja nekog sustava. Posebno su važni kružni procesi, u kojima se sustav vraća u početno stanje. Razlikujemo **povratne** (reverzibilne) i **nepovratne** (ireverzibilne) termodinamičke procese. Proces je povratan ako sustav prolazi kroz niz ravnotežnih stanja. U tom slučaju proces se može odvijati i u suprotnom smjeru, vraćajući se kroz ista ravnotežna stanja u početno stanje. Stvarni termodinamički procesi uvijek su manje ili više nepovratni.

### 4.4.1 Pojam unutrašnje energije

Svaki objekt ili skup objekata koje proučavamo često nazivamo sustavom. Ako je objekt još i makroskopski, tj. sastavljen od ogromnog broja čestica, onda se takav sustav zove **termodinamički sustav**. U svakom stanju sustav ima energiju koju čine:

1. kinetička energija mehaničkog gibanja sustava kao cjeline,  $E_k$ ,
2. potencijalna energija sustava u nekom vanjskom polju,  $E_p$  (npr. gravitacijskom polju),
3. unutrašnje energije,  $U$ . **Unutrašnja energija**  $U$  sustava jeste energija sastavljena od
  - (a) kinetičke energije kaotičnog gibanja čestica tog termodinamičkog sustava,
  - (b) potencijalne energije međudjelovanja čestica, i
  - (c) energije sastavnih dijelova čestica tog sustava (npr. kinetičke i potencijalne energije atoma u molekulama plina).

Mi ćemo izučavati makroskopske sustave koji su nepomični u odnosu na druga tijela. Na taj način ukupna energija sustava postaje jednaka unutrašnjoj energije  $U$ .

### 4.4.2 Pojam rada i topline

Moguća su tri oblika prijelaza energije s jednog tijela na drugo: u procesu rada, u procesu topline i u procesu izmjene mase (ovdje nećemo izučavati sustave u kojima dolazi do promjene mase). Rad smo definirali kao mjeru promjene mehaničke energije tijela koja se prenese s jednog tijela na drugo pri promjeni položaja tijela ili njegovih makroskopskih dijelova.

**Tolina** je kao i rad oblik prijenosa energije od tijela na tijelo, a predstavlja mjeru prenesene energije u procesu topline. Kvalitativna razlika topline i rada je u samoj prirodi prenošenja energije. Prilikom prijenosa energije u procesu rada jedno tijelo djelujući silom pomiče drugo tijelo i predaje energiju drugom tijelu. Količinu energije koju preda mjerimo radom. U prijenosu energije toplinom, energija s jednog tijela prelazi na drugo mikroskopskim procesima, sudarima čestica. Količinu energije koja se pri tome preda mjerimo toplinom. Energija u procesu topline će prelaziti s tijela više temperature na tijelo niže temperature i pri tom će se unutrašnja energija toplijeg tijela smanjiti, a hladnijega povećati.

### 4.4.3 Prvi zakon termodinamike

Kada sustavu dovodimo toplinu  $\delta Q$ , tada se jedan njezin dio može utrošiti na povećanje unutrašnje energije sustava  $dU$ , a ostatak se pretvara u rad  $\delta W$  koji sustav daje okolini. Pri tom iz zakona održanja energije vrijedi

$$\delta Q = dU + \delta W. \quad (4.8)$$

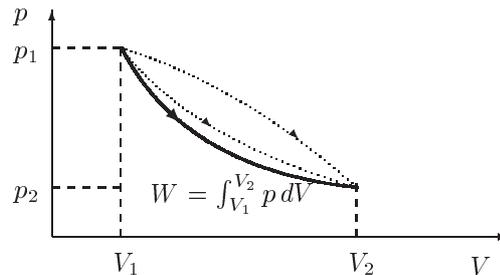
To je prvi zakon termodinamike koji kaže da u izoliranom sustavu ukupna energija ostaje konstantna bez obzira na procese koji se događaju u sustavu. Oznaka  $\delta$  umjesto  $d$  ističe da veličine  $\delta Q$  i  $\delta W$  ovise o načinu

na koji se vrši izmjena stanja sustava. Promjena unutrašnje energije  $dU$ , kad sustav prelazi iz jednog stanja u drugi, uvijek je ista bez obzira na vrstu procesa. Stoga kažemo da je unutrašnja energija **funkcija stanja** sustava, a dovedena toplina i izvršeni rad su **funkcije procesa**.

Može se lako pokazati da je elementarni rad plina  $\delta W$  dan sljedećim izričajem

$$\delta W = p dV, \quad (4.9)$$

gdje je  $p$  tlak plina i  $dV$  promjena volumena plina<sup>3</sup>. Rad je pozitivan ako se volumen sustava povećava, a negativan ako se volumen smanjuje. U tom slučaju, kad se volumen sustava smanjuje, kažemo da okolina vrši rad nad sustavom<sup>4</sup>. Ukupni rad  $W$  je, naravno, dan preko integrala (vidjeti i crtež 4.1)



Crtež 4.1: Određivanje rada idealnog plina u  $p$ - $V$  dijagramu.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (4.10)$$

Iz crteža 4.1 vidimo da je rad ovisan o procesu kojim sustav ide od početnog stanja do konačnog.

Prvi zakon termodinamike utvrđuje količinske odnose između topline, rada i izmjene unutrašnje energije. Po njemu bi izlazilo da su svi procesi mogući u oba smjera samo ako se zadovolji zakon održanja energije. Prvi zakon ne utvrđuje smjer procesa. U tome se satoji ograničenje prvog zakona termodinamike.

Najznačajniji procesi izmjene stanja plina su:

1. izobarni proces ili proces izmjene stanja plina uz stalan tlak,  $p = konst.$
2. Izotermni proces ili proces izmjene stanja plina uz stalnu temperaturu,  $T = konst.$  U  $p$ - $V$  dijagramu jednadžba izoterme glesu

$$pV = konst. \quad (4.11)$$

3. Izovolumni proces ili proces izmjene stanja plina uz stalni volumen,  $V = konst.$
4. Adijabatski proces ili proces kod kojeg nema izmjene topline,  $\delta Q = 0$ . U  $p$ - $V$  dijagramu jednadžba adijabatskog procesa ima sljedeći oblik<sup>5</sup>

$$pV^\gamma = konst., \quad (4.12)$$

gdje je  $\gamma$  tzv. adijabatski koeficijent<sup>6</sup> kojeg možemo definirati kao omjer specifičnih toplinskih kapaciteta kod izobarnog procesa ( $c_p$ ) i izovolumnog procesa ( $c_V$ )

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}. \quad (4.13)$$

Definiciju specifičnih toplinskih kapaciteta  $c_p$  i  $c_V$  možete pronaći u odlomku 4.4.4.

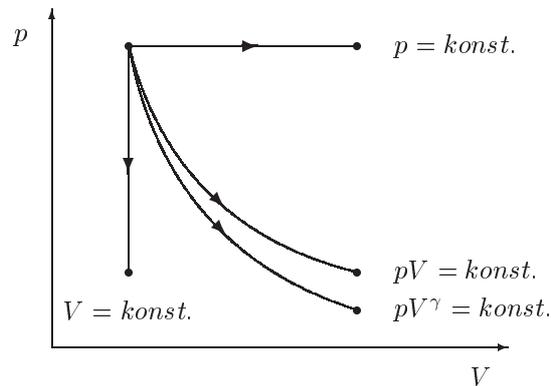
<sup>3</sup> Pri izvodu polazi se od definicije rada  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Za iznos sile uzima se  $F = pS$ , gdje su  $p$  tlak plina, a  $S$  površina plohe na koju djeluje sila  $\vec{F}$  te koja se pomakla za  $d\vec{r}$ .

<sup>4</sup> U nekim literaturama rad je definiran upravo suprotno ovoj definiciji.

<sup>5</sup> Izvod jednadžbe polazi od prvog zakona termodinamike.

<sup>6</sup> Adijabatski koeficijent  $\gamma$  može se aproksimirati izrazom koji u sebi nosi samo broj stupnjeva slobode čestica (atoma i molekula) termodinamičkog sustava  $\gamma = (i + 2)/i$ , gdje je  $i$  broj stupnjeva slobode. Jednoatomske plinovi imaju 3 stupnja slobode, a dvoatomske 5 stupnjeva slobode. Tako, je za dvoatomske plinove (npr. zrak)  $\gamma = 1.4$ , a za jednoatomske (npr. plin helija)  $\gamma = 1.67$ .

Na crtežu 4.2 su prikazana četiri najznačajnija termodinamička procesa.



Crtež 4.2: Najznačajniji termodinamički procesi: izobarni, izotermni, izovolumni i adijabatski.

### Primjeri

1. Kolike su konačna temperatura  $T_2$  i tlak  $p_2$  dvoatomskog plina ako se plin komprimira na  $1/10$  početnog volumena? Početni tlak je  $p_1 = 10^5$  Pa, a početna temperatura  $T_1 = 300$  K.

Rj.:

Iz relacije  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$  dobijemo konačni tlak

$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 10^5 \text{ Pa} \left( \frac{1}{1/10} \right)^{1.4} = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Iz jednadžbe stanja plina  $pV = nRT$  možemo izraziti temperature početnog i konačnog stanja,  $T_1$  i  $T_2$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} \quad T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR}.$$

Djeljenjem dobijemo

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{p_2 V_2^\gamma V_1^{\gamma-1}}{p_1 V_1^\gamma V_2^{\gamma-1}} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}},$$

odnosno za temperaturu  $T_2$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 753 \text{ K}.$$

#### 4.4.4 Entalpija

Uočili smo da postoje dvije vrste termodinamičkih veličina: funkcije stanja i funkcije procesa. Definirajmo još jednu funkciju stanja, **entalpiju**

$$H = U + pV. \quad (4.14)$$

Mjerna jedinica za entalpiju je J kao i za unutrašnju energiju. Lako se vidi i da je produkt tlaka i volumena  $pV$ , također, funkcija stanja. U slučaju izobarnog procesa toplina koju sustav primi iz okoline je jednaka promjeni entalpije sustava.

Definirajmo dva specifična toplinska kapaciteta kod izobarnog i izovolumnog procesa,  $c_p$  i  $c_V$ ,

$$c_p = \frac{1}{m} \left( \frac{dH}{dT} \right), \quad (4.15)$$

te

$$c_V = \frac{1}{m} \left( \frac{dU}{dT} \right). \quad (4.16)$$

Zagrijavamo li npr. vodu njezina se unutrašnja energija i entalpija povećavaju. Budući je zagrijavanje izobarno, dovedena toplina kod zagrijavanja je jednaka promjeni entalpije.

### 4.4.5 Drugi zakon termodinamike

Drugi zakon termodinamike govori o uvjetima u kojima se iz topline može dobiti mehanički rad. Za rad toplinskog stroja potrebna su dva spremnika različite temperature u kojima toplina iz toplijeg prelazi dijelom u hladniji spremnik, a dijelom se vrši rad.

Drugi zakon termodinamike možemo iskazati na sljedeći način: *"nemoguć je proces pri kojem bi toplina spontano prelazila iz spremnika niže temperature u spremnik više temperature"*.

#### Suština ireverzibilnosti

Može se zaključiti da je stanje toplinske ravnoteže najvjerojatnije stanje te, stoga, dva sustava koja su u kontaktu ostvaruju vjerojatnija stanja sve do stanja toplinske ravnoteže. Odavde izlazi suština nepovratnosti (ireverzibilnosti), tj. u svojstvu termodinamičkih sustava da prelaze u vjerojatnija stanja.

#### Entropija

Već smo uočili da izmjenjena toplina  $\delta Q$  nije funkcija stanja, ali se može pokazati da pri reverzibilnom procesu tzv. reducirana toplina  $\delta Q/T$  ne ovisi o procesu, pa možemo definirati fizikalnu veličinu koja je funkcija stanja

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (4.17)$$

i nazivamo je **entropija**. Gornji izraz daje samo promjenu entropije dok se za definiciju same vrijednosti entropije moraju promatrati statistička svojstva. Boltzmann je utvrdio da različiti sustavi u prirodi spontano prelaze iz stanja manje u stanje veće kaotičnosti jer im se tada povećava vjerojatnost. Vezu između entropije i vjerojatnosti  $P$  da se sustav nađe u nekom stanju Boltzmann je izrazio na sljedeći način

$$S = k \ln P, \quad (4.18)$$

gdje je  $k$  Boltzmannova konstanta. Vidimo da je entropija nekog sustava proporcionalna logaritmu vjerojatnosti makroskopskog stanja tog sustava. Pri prijelazu iz manje vjerojatnog stanja u vjerojatnije stanje, entropija se povećava, stoga entropija pokazuje smjer odvijanja procesa. Entropija izoliranog sustava se ne može smanjivati. Dakle, nisu mogući procesi pri kojima se smanjuje ukupna entropija sustava i okoline. Kad je sustav u ravnoteži, vjerojatnost  $P$  je maksimalna te entropija poprima svoju maksimalnu vrijednost. Ravnotežno stanje je stanje najveće kaotičnosti među česticama promatranog sustava. Stoga se drugi zakon termodinamike često iskazuje i na taj način.

## 4.5 Kinetičko-molekularna teorija topline

Do sada smo razmatrali makroskopska svojstva termodinamičkih sustava, kao što su temperatura, tlak, volumen i slično te pomoću njih opisivali termodinamičke procese i stanja termodinamičkih sustava. Pri tome nismo uzimali mikroskopsku strukturu tvari niti kako je gibanje atoma i molekula vezano uz te makroskopske veličine. Sada ćemo makroskopske veličine povezati s mikroskopskim svojstvima mnoštva čestica koje su u neprestanom gibanju. Nemoguće je pratiti gibanje svake čestice jer ih je vrlo mnogo pa ćemo se orijentirati na prosiječno ponašanje skupa čestica.

Zaključci koje ćemo iznijeti zasnivaju se na sljedećim pretpostavkama:

1. Plin se sastoji od velikog broja čestica koje su u neprekidnom gibanju. Takvo gibanje je kaotično i raspodjela brzina je ista u svim smjerovima.
2. Prosiječna udaljenost među česticama je mnogo veća od dimenzije čestica te međudjelovanja među njima možemo zanemariti.
3. Sudari među česticama i sudari čestica sa zidovima posude su elastični.

### 4.5.1 Tlak idealnog plina

Tlak plina kao makroskopsku veličinu odredit ćemo preko mikroskopskih svojstava molekula. Tlak idealnog plina uzrokuje neprekidno udaranje molekula u stijenke posude, pri čemu molekule stijenka posude predaju određenu količinu gibanja. Možemo reći da je tlak plina omjer sile kojom molekule djeluju na stijenku posude i površine te stijenke.

Zbog jednostavnijeg izvoda, zamislimo da je plin u kutiji oblika kocke dimenzije  $a^3$ . Uočimo jednu od  $N$  molekula koliko ih ima u kocki. Neka  $i$ -ta molekula ima masu  $m$  i brzinu  $\vec{v}_i = v_{xi}\vec{i} + v_{yi}\vec{j} + v_{zi}\vec{k}$ . Prilikom sudara s jednom stijenkom posude, npr. stijenkom koja je okomita na  $x$  os, promijenit će se  $x$  komponenta količine gibanja za iznos

$$\Delta p_{xi} = mv_{xi} - (-mv_{xi}) = 2mv_{xi}. \quad (4.19)$$

Vrijeme potrebno da molekula stigne od jedne plohe do njoj paralelne plohe i natrag iznosi

$$\Delta t = \frac{2a}{v_{xi}}. \quad (4.20)$$

Tada možemo izraziti srednju silu kojom ta molekula djeluje na stijenku posude

$$F_i = \frac{\Delta p_{xi}}{\Delta t} = \frac{mv_{xi}^2}{a}. \quad (4.21)$$

U posudi se nalazi  $N$  molekula, te je ukupna sila dana izrazom

$$F_u = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{xi}^2}{a}. \quad (4.22)$$

Iz definicije tlaka  $p = F/S = F_u/a^2$  slijedi da je tlak  $p$  na promatranu stijenku posude dan izrazom

$$p = \left(\frac{m}{V}\right) \sum_{i=1}^N v_{xi}^2, \quad (4.23)$$

gdje smo uzeli u obzir da je volumen posude  $V = a^3$ .

Zbog velikog broja molekula nemoguće je saznati brzinu svake pojedine molekule. Zato uzimamo prosječne vrijednosti brzine i kvadrata brzine. Srednja vrijednost kvadrata  $x$  komponente brzine molekula jest

$$\bar{v}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2. \quad (4.24)$$

Uvrstimo li ovaj izraz u izraz za tlak 4.23, dobivamo

$$p = \frac{Nm\bar{v}_x^2}{V}. \quad (4.25)$$

Molekule se gibaju u svim smjerovima s jednakom vjerojatnošću te možemo pretpostaviti da je

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2. \quad (4.26)$$

Uzevši to u obzir dobivamo izraz koji veže tlak idealnog plina i srednju vrijednost kvadrata brzine molekula plina

$$pV = \frac{1}{3}Nm\bar{v}^2. \quad (4.27)$$

To je osnovna jednažba kinetičke teorije plinova. Tlak kojim molekule plina djeluju na stijenku posude ovisi samo o broju molekula u jedinici volumena ( $N/V$ ) i o prosječnoj kinetičkoj energiji molekula ( $m\bar{v}^2/2$ ).

### 4.5.2 Kinetičko objašnjenje temperature

Uspoređujući jednadžbu 4.27 s jednadžbom stanja plina 4.7 dobivamo vezu između srednje vrijednosti kvadrata brzine i temperature sustava

$$m\bar{v}^2 = 3kT. \quad (4.28)$$

Dijeljenjem gornjeg izraza s 2, dobivamo vezu prosječne kinetičke energije čestica  $\bar{E}_k$  i temperature  $T$

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT. \quad (4.29)$$

Vidimo da čestice koje se nalaze u sustavima iste temperature imaju istu srednju kinetičku energiju. Za određenu temperaturu sve molekule, bez obzira na njihovu masu, imaju istu srednju kinetičku energiju translacije. U smjesi različitih plinova masivnije molekule gibaju se sporije od onih s manjom masom.

Unutrašnja energija idealnog plina je zbroj kinetičkih energija svih molekula i zaključujemo da unutrašnja energija idealnog plina ne ovisi o tlaku već samo o njegovoj temperaturi

$$U = \frac{3}{2}NkT. \quad (4.30)$$

Kod translacijskog gibanja svaka čestica može se ravnopravno gibati u jednom od tri stupnja slobode, pa zaključujemo da na svaki stupanj slobode čestice dolazi po  $kT/2$  energije. Ako se čestica, osim translacijskog gibanja, giba i drugačije (npr. rotira ili vibrira) ona ima više stupnjeva slobode te će unutrašnja energija općenito biti

$$U = \frac{i}{2}NkT, \quad (4.31)$$

gdje je  $i$  broj stupanjeva slobode.

#### Primjeri

1. Nađite srednju kvadratičnu brzinu  $\sqrt{\bar{v}^2}$ , srednju kinetičku energiju translacije atoma žive i unutrašnju energiju živinih para količine tvari od 1 kmol pri 327 °C.

Rj.:

Kombinacijom plinske jednadžbe  $pV = nRT$  i jednadžbe 4.27

$$pV = \frac{1}{3}Nm\bar{v}^2,$$

dobivamo

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{3\frac{RT}{M}} \approx 273 \text{ m/s},$$

gdje je  $M = Nm/n = 201$  masa jednog mola žive.

Kinetičku energiju određujemo iz izraza 4.29

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT = 12.4 \cdot 10^{-21} \text{ J},$$

a unutrašnju energiju iz

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \approx 7.5 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

### 4.5.3 Maxwell-Boltzmannova raspodjela

Sve čestice u plinu nemaju istu brzinu i raspodjela po brzinama može se odrediti eksperimentalno i teorijski. Pojedine molekule imaju malu brzinu, a pojedine veliku, dok se brzina većine molekula grupira oko najvjerojatnije brzine. Takvu raspodjelu nazivamo Maxwellova raspodjela brzina i eksplicitno glasi

$$N(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-(mv^2)/(2kT)}, \quad (4.32)$$

gdje je  $m$  masa čestice,  $v$  njezina brzina,  $N$  ukupan broj čestica u sustavu, a  $k$  Boltzmannova konstanta. Iz ove raspodjele mogu se izračunati npr. srednja brzina, najvjerojatnija brzina i kvadratična brzina čestica. **Najvjerojatnija brzina**  $v_m$  je ona koju ima najveći broj čestica, a dobije se tražeći da funkcija  $N(v)$  ima maksimalnu vrijednost, tj.

$$\begin{aligned} \frac{dN(v)}{dv} &= 0, \\ v_m &= \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

**Srednju brzinu**  $\bar{v}$  možemo odrediti iz integrala

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^\infty N(v)v dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (4.34)$$

Vidimo da je srednja brzina veća od najvjerojatnije brzine. **Srednja kvadratična brzina**  $\sqrt{v^2}$ , o kojoj ovisi temperatura sustava, može se odrediti iz funkcije raspodjele  $N(v)$  sljedećim izrazom

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \int_0^\infty N(v)v^2 dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (4.35)$$

Srednja kvadratična brzina je veća i od srednje brzine i od najvjerojatnije.

Iz raspodjele čestičnih brzina 4.32 može se dobiti energijska raspodjela koja se često zove i Maxwell-Boltzmannova energijska raspodjela

$$N(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{2N}{\sqrt{\pi k^2 T^3}} \sqrt{E} e^{-E/(kT)}. \quad (4.36)$$

Maxwell-Boltzmannova raspodjela čestica po energijama kaže koliko je broj čestica  $dN$  kojima je energija u infinitezimalnom energijskom intervalu između  $E$  i  $E + dE$ . Uočite da Maxwell-Boltzmannova raspodjela ne ovisi o masi čestica već je samo funkcija temperature sustava.

Maksimum energijske raspodjele određujemo iz uvjeta

$$\frac{dN(E)}{dE} = 0$$

i dobijemo energiju pri kojoj ta raspodjela ima maksimalnu vrijednost

$$E_m = \frac{kT}{2}. \quad (4.37)$$

Srednja kinetička energija  $\bar{E}$  translacijskog gibanja se određuje na sljedeći način

$$\bar{E} = \int_0^\infty \frac{N(E)E dE}{N} = \frac{3}{2}kT. \quad (4.38)$$

Iz Maxwell-Boltzmannove raspodjele vidimo i fizikalno značenje temperature. Raspodjela ovisi samo o temperaturi, a ne o vrsti plina.

#### 4.5.4 Molarni toplinski kapacitet

U odjeljku 4.4.4 definirali smo dva specifična toplinska kapaciteta  $c_p$  i  $c_V$ , pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu. Na sličan način se definiraju i molarni toplinski kapaciteti pri stalnom tlaku i stalnom volumenu

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}, \quad p = konst., \quad (4.39)$$

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}, \quad V = konst., \quad (4.40)$$

gdje  $n$  označava broj molova plina.

Iz prvog zakona termodinamike,  $\delta Q = dU + \delta W$ , i jednadžbe stanja idealnih plinova,  $pV = nRT$ , možemo doći do poznate Mayerove relacije za molarne toplinske kapacitete idealnih plinova<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + \delta W \\ nC_p dT &= nC_V dT + p dV \\ n(C_p - C_V)dT &= nR dT \\ C_p - C_V &= R. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Budući adijabatsku konstantu  $\gamma$  možemo izraziti preko molarnih kapaciteta,  $\gamma = c_p/c_V = C_p/C_V$ , to vrijedi  $\gamma C_V - C_V = R$ , odakle se mogu izraziti molarni toplinski kapaciteti preko univerzalne plinske konstante  $R$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad (4.42)$$

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \quad (4.43)$$

Suprotno plinovima, razlika molarnih kapaciteta  $C_p - C_V$  za čvrsta tijela i tekućine praktički je zanemariva jer je promjena volumena s promjenom temperature vrlo malena. Kinetičko-molekularnom teorijom topline mogu se dobro objasniti i predvidjeti vrijednosti toplinskih kapaciteta, ali potpuno objašnjenje moguće je samo pomoću kvantne teorije.

Za jednoatomske plinove molarni toplinski kapaciteti, po kinetičko-molekularnoj teoriji, dobijemo sljedeće vrijednosti

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad C_p = \frac{5}{2}R, \quad (4.44)$$

odnosno vrijednost adijabatske konstante poprima sljedeću vrijednost

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1.67. \quad (4.45)$$

Za dvoatomske plinove

$$C_V = \frac{5}{2}R, \quad C_p = \frac{7}{2}R, \quad (4.46)$$

odnosno

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1.40. \quad (4.47)$$

## 4.6 Jednadžba stanja realnih plinova

Pri razmatranju modela idealnog plina zanemarili smo međumolekularne sile i uzimali da se plin sastoji od materijalnih točaka. Jednadžba stanja takvog plina  $pV = nRT$  može se primijeniti na realne plinove samo onda kad je gustoća plina malena, tako da su molekule daleko jedna od druge, međumolekularne sile zanemarene, a volumen molekula prema volumenu posude također zanemariv.

Postoji nekoliko jednadžbi stanja realnih plinova, a najpoznatija je van der Waalsova jednadžba

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT, \quad (4.48)$$

gdje su  $a$  i  $b$  konstante karakteristične za određeni plin. Konstanta  $b$  uzima u obzir da i molekule imaju određeni volumen. Volumen  $(V - nb)$  zapravo je volumen posude umanjen za volumen koji zauzimaju molekule. Član  $n^2 \frac{a}{V^2}$  je dodatni tlak koji nastaje zbog međumolekularnih sila. Jednadžba 4.48 je jednadžba trećeg stupnja po  $V$  te za određeni  $p$  i  $T$  ima jedno realno rješenje, ili tri realna rješenja. Pri većim

<sup>7</sup>Pri izvodu koristimo valjanost sljedećih izraza kod izobarnih procesa

$$\frac{dH}{dT} = \frac{\delta Q}{dT}, \quad p dV = nR dT.$$

vrijednostima temperature jednadžba ima samo jedno realno rješenje, dok pri temperaturama manjim od kritične  $T_c$ , jednadžba ima tri realna rješenja. Kritična temperatura  $T_c$  zapravo definira točku infleksije van der Waalsove izoterme. Konstante  $a$  i  $b$  mogu se odrediti iz uvjeta da je prva i druga derivacija u točki infleksije jednaka nuli

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T_c} = 0 \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{d^2p}{dV^2}\right)_{T_c} = 0 \quad (4.50)$$

te za konstante  $a$  i  $b$  dobijemo

$$a = \frac{27 R^2 T_c^2}{64 p_c} \quad (4.51)$$

$$b = \frac{1 R T_c}{8 p_c}. \quad (4.52)$$

## 4.7 Fazni prijelazi

**Fazni prijelazi** su procesi koji su karakterizirani naglom promjenom nekog toplinskog svojstva. Za karakteristiku toplinskog stanja korisno je uvesti pojmove krutog, tekućeg i plinskog stanja. Jednim imenom ova stanja nazivamo **agregatnim stanjima**. Ako promatramo npr. led, tekuću vodu i vodenu paru, onda su to agregatna stanja vode, ali i ujedno faze vode.

Prijelaz iz jedne faze u drugu odvija se, uz zadani tlak, uvijek kod strogo određene temperature. Na primjer, pri normalnom tlaku led se počinje topiti na  $0^\circ\text{C}$ . Mijenja li se vanjski tlak opaža se promjena temperature faznog prijelaza.

### 4.7.1 Isparavanje i kondenzacija

Proces prelaženja iz tekuće faze u plinsku naziva se **isparavanje**, a obratan proces **kondenzacijom**. Pri isparavanju one molekule tekućine koje imaju najveće kinetičke energije izlaze iz tekućine nakon što su savladane sile molekularnog privlačenja i stvaraju paru iznad tekućine. U rezultatu ovakvog procesa dolazi do smanjivanja prosječne kinetičke energije molekula tekuće faze i tekućina se hladi. Stoga slijedi da je potrebno dovesti određenu količinu topline da bi se proces isparavanja nastavio. Količinu koju je potrebno dovesti jediničnoj masi tekućine da se pretvori u paru iste temperature kao i tekućina naziva se **specifičnom topline isparavanja**.

Iznad tekućine istovremeno teče i obratni proces. Mnoge molekule pare vraćaju se u tekućinu i dolazi do kondenzacije. Ako se kondenzacija odvija intenzivnije, količina tekućine se povećava. Ako jednak broj molekula izlazi i vraća se u tekućinu, onda je to ravnotežno stanje. Ravnoteža se može ostvariti uz zadanu temperaturu samo pri potpuno određenom tlaku obiju faza. Za paru koja se nalazi u ravnoteži sa svojom tekućinom kaže se da je **zasićena**.

Ako još nije postignuta dinamička ravnoteža, stanje plina označavamo tada kao **nezasićeno**.

**Vrenje** je proces veoma intenzivnog stvaranja pare i to ne samo sa površine tekućine nego po cijelom volumenu tekućine.

Moguć je i prijelaz iz krutog u plinsko stanje i takav proces se naziva **sublimacija**.

### 4.7.2 Taljenje i skrućivanje

**Taljenje** je prijelaz iz krutog stanja u tekuće stanje. Uz određeni tlak odvija se pri točno određenoj temperaturi. Pri zagrijavanju molekule krutog tijela povećavaju svoju kinetičku energiju da više ne mogu biti smještene oko čvrstih točaka nego se počinju gibati po cijelom volumenu sustava. Da bi se ostvario ovakav proces potrebno je dovesti određenu količinu topline. Toplina koja je potrebna za prelazak jedinične mase krutog tijela u tekuće naziva se **specifičnom topline taljenja**.

**Skrućivanje** je proces suprotan od taljenja pri kojemu se tekućina pretvara u kruto tijelo.

### 4.7.3 Svojstva vodene pare

Sloj zraka oko Zemlje nazivamo **atmosferom**. Glavne komponente atmosfere kao plinske smjese su dušik (oko 78 %) i kisik (oko 21 %). Preostali dio od oko 1 % izgrađen je od ugljičnog dioksida, argona, neona, helija, kriptona, ksenona, vodika, metana i vodene pare. Premda je u atmosferi udio vodene pare neznatan, utjecaj vodene pare na pojave u prirodi od ogromne je važnosti.

Općenito možemo reći da tlak zasićene pare raste s temperaturom i da svakoj temperaturi odgovara određeni tlak koji je maksimalan za tu temperaturu. Snizimo li temperaturu prostora u kojem smo do tada imali zasićeno stanje pare, dio molekula vratit će se u tekućinu i uskoro će se opet uspostaviti dinamička ravnoteža, ali sada uz manju gustoću i manji tlak zasićenih para.

Također, smanjenjem volumena pare povećava se njezina gustoća koja postaje veća od maksimalne gustoće zasićenih para, pa će se veći broj molekula vraćati u tekućinu, tj. jedan dio pare će se kondenzirati.

Može se zaključiti da tlak zasićenih para ne zavisi od njihova volumena. Tj. zasićene pare se ne podvrgavaju Boyle-Mariotteovu zakonu, dok se nezasićene pare podvrgavaju tom zakonu, odnosno ponašaju se kao plinovi.

### 4.7.4 Vlažnost

Vlažnost ovisi o količini vodene pare u nekom volumenu. **Apsolutna vlažnost** označava masu vodene pare u jedinici volumena. **Relativna vlažnost**  $RH$  je veličina čiji je iznos jednak omjeru tlaka pare koji se nalazi u prostoru i tlaka zasićene pare pri istoj temperaturi. Relativna vlažnost se izražava u postocima. Prema definiciji je dakle apsolutna vlažnost jednaka gustoći vodene pare  $\rho_{para}$ , a relativna vlažnost je

$$RH = \frac{p_{para}}{p_{z.para}} 100\%. \quad (4.53)$$

Relativna vlažnost  $RH$  ne definira količinu vlage ako nije zadana temperatura. Razlog zbog kojeg se  $RH$  upotrebljava kod konzervacije u muzejima je taj što mnogi organski materijali imaju u sebi ravnotežnu količinu vode koja je uglavnom određena vrijednošću od  $RH$ , a vrlo malo ovisi o temperaturi.

Uočite da zrak nije uključen u definiciju relativne vlažnosti  $RH$ . Bezzračni prostor može imati vlažnost. Zrak je prenositelj vodene pare u atmosferu tako da termin "relativna vlažnost zraka" koji je u čestoj uporabi je pogrešan. Neovisnost relativne vlažnosti o atmosferskom tlaku nije važan dok razmatramo probleme na zemlji, ali ima neke važnosti kod zračnog prijevoza umjetničkih radova.

Apsolutnu vlažnost ili gustoću vodene pare možemo izraziti preko tlaka vodene pare  $p_{pare}$  polazeći od jednadžbe stanja plina 4.5

$$\frac{n}{V} = \frac{p_{para}}{RT}, \quad (4.54)$$

gdje broj molova možemo zamijeniti odnosom mase pare i molarne mase vodene pare

$$n = \frac{m}{M_{para}}. \quad (4.55)$$

Odakle slijedi izričaj za gustoću, odnosno za apsolutnu vlažnost,

$$\rho_{para} = \frac{m}{V} = \frac{p_{para} M_{para}}{RT}, \quad (4.56)$$

gdje je molarna masa vodene pare  $M_{para} = 0.018$  kg. Molarna masa suhog zraka iznosi 0.029 kg i vidimo da je gušći od vodene pare te je, stoga, vodena para lakša od zaka.

Definirajmo **rosište** kao temperaturu pri kojoj para postaje zasićena, odnosno pri kojoj je  $RH$  jednaka 100 %.

### Pitanja za vježbu

1. Kako nastaje toplinska ravnoteža?
2. Kako se mjeri temperatura?

3. Koje temperaturne skale poznajete?
4. Iskažite zakon linearnog i volumnog širenja tijela.
5. Pojam tlaka.
6. Koje makroskopske veličine određuju stanje plina?
7. Iskažite jednadžbu stanja idealnog plina.
8. Što nazivamo termodinamičkim procesom?
9. Što nazivamo povratnim, a što nepovratnim procesom?
10. Što nazivamo termodinamičkim sustavom?
11. Od čega se sastoji energija nekog sustava?
12. Što je unutrašnja energija?
13. Pojam topline i razlika rada i topline.
14. Iskažite prvi zakon termodinamike.
15. Kad kažemo da je neka veličina funkcija stanja, a kad da je funkcija procesa?
16. U čemu se sastoji ograničenje prvog zakona termodinamike?
17. Koji su to najznačajniji procesi koje smo uveli?
18. Pojam entalpije.
19. Definirajte specifične toplinske kapacitete kod izobarnih i izovolumnih procesa.
20. Iskažite drugi zakon termodinamike.
21. U čemu se sastoji suština ireverzibilnosti?
22. Pojam entropije.
23. Na kojim se pretpostavkama temelji kinetičko-molekularna teorija?
24. Odredite tlak idealnog plina promatrajući gibanje molekula?
25. Kako glasi jednadžba idealnog plina u mikroskopskom obliku?
26. Veza između kinetičke energije kaotičnog gibanja i temperature sustava.
27. Veza unutrašnje energije sustava i temperature sustava.
28. Maxwelllova raspodjela čestica po brzinama.
29. Najvjerojatnija brzina, srednja brzina i srednja kvadratična brzina čestice u termodinamičkom sustavu.
30. Maxwell-Boltzmannova raspodjela čestica po energijama.
31. Kakva je veza između molarnih kapaciteta pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu?
32. Objasnite van der Waalovu jednadžbu stanja plina?
33. Što su fazni prijelazi?
34. Što nazivamo agregatnim stanjima?
35. Definirajte pojmove isparavanja i kondenzacije.

36. Što je specifična toplina isparavanja?
37. Kad kažemo da je para zasićena?
38. Koji proces nazivamo vrenjem?
39. Definirajte pojmove taljenja i skrućivanja.
40. Što je specifična toplina taljenja?
41. Kako se ponaša zasićena para za razliku od nezasićene i ostalih plinova?
42. Što je apsolutna vlažnost, a što relativna vlažnost?
43. Iskažite apsolutnu vlažnost u ovisnosti o temperaturi.
44. Definirajte pojam rosišta.

## Poglavlje 5

# ELEKTROMAGNETSKE POJAVE

U davna vremena električne su pojave predstavljale nešto neobično i zagonetno. Da bi se iz nekog tijela izvukao tzv. elektricitet bile su potrebne mnoge domišljatosti i vještine. Tada se činilo da obične prirodne pojave, kao što su leđenje vode ili rast biljaka, nemaju nikakve veze sa svojstvima elektriziranih tijela. Danas se zna da električne sile, u biti, određuju fizička i kemijska svojstva tvari u svim oblicima, od atoma i molekula do živih bića. Za današnje razumijevanje prirode elektromagnetskih pojava zahvalni smo znanstvenicima osamnaestog i devetnaestog stoljeća: Coulombu, Gaussu, Ampereu, Faradayu, Maxwellu i mnogim drugima.

Osnovno je svojstvo električnih naboja, bez sumnje, to da se nalaze u jednom od dva moguća oblika: pozitivnom i negativnom naboju. Ono što nazivamo negativnim nabojem moglo bi se isto tako nazivati pozitivnim nabojem, i obratno. Izbor je bio čista slučajnost.

### 5.1 Atomska struktura tvari. Električni naboj

Električne su pojave povezane s atomskom strukturom tvari. Pojam atoma se javio još u grčka vremena kada se pod tim pojmom shvaćao najmanji i nedjeljivi dio tvari. Naravno, pod današnjim pojmom atoma shvaćamo česticu koja ima vrlo složenu strukturu. Atom se sastoji od središnje masivne jezgre pozitivnog naboja i vanjskog omotača koji se sastoji od negativno nabijenih elektrona. Jezgra atoma ima znatno manju dimenziju od atoma u cijelini. Dimenzije atoma su oko  $10^{-10}$  m, dok je dimenzija jezgre desetak tisuća puta manja. Najjednostavniji atom je atom vodika. Jezgra običnog atoma vodika sastoji se samo od jedne pozitivno nabijene čestice koju nazivamo **proton**, dok u svom omotaču atom vodika ima samo jedan **elektron**. Naboji protona i elektrona isti su po svojoj apsolutnoj vrijednosti, a masa protona  $m_p$  bitno je veća od mase elektrona  $m_e$

$$m_p = 1865.5 \cdot m_e = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg.} \quad (5.1)$$

Elektron je moguće odvojiti od ostatka atoma, koji je, uostalom, i otkriven kao slobodna čestica još u devetnaestom stoljeću, a kao sastavnica atoma otkriven je početkom dvadesetog stoljeća.

Najmanja izmjerena količina naboja<sup>1</sup> (po apsolutnom iznosu) je upravo količina naboja elektrona koja se označava sa  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C. Budući svaki elektron ima istu količinu naboja, zaključujemo da je naboj nekog tijela samo cjelobrojni višekratnik naboja  $e$ .

Između električki pozitivno i negativno nabijenih čestica javljaju se privlačne sile slične gravitacijskoj privlačnoj sili, samo što je, za razliku od gravitacijske sile, moguća i odbojna sila koja se javlja između čestica istog predznaka električnog naboja. Dogovorno kažemo da elektron ima negativni, a proton pozitivni električni naboj. Reći ćemo da je neko tijelo električki pozitivno nabijeno ako ima manjak elektrona u odnosu na protone, i obratno, ako ima višak elektrona kažemo da je električki negativno nabijeno. Fizikalna veličina kojom iskazujemo vrijednost električnog naboja nekog tijela nazivamo **količinom naboja** i mjerimo u coulombima<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Kvarkovi, koji sačinjavaju protone, neutrone i neke druge čestice, imaju naboj u vrijednosti od  $\pm \frac{1}{3}e$  ili  $\pm \frac{2}{3}e$ .

<sup>2</sup>Oznaka za jedan coulomb je  $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$  (amper-sekunda).

Možemo lako uočiti da se sva tijela mogu naelektrizirati bilo trenjem, udarom ili prenošenjem dijela električnog naboja s jednog tijela na drugo. U normalnom stanju sva tijela su električki neutralna, odnosno imaju jednaku količinu pozitivnog i negativnog naboja.

### 5.1.1 Očuvanje električnog naboja

Ukupni se naboj izdvojenog sustava ne mijenja. Riječ **izdvojen** ovdje znači da nema izmjene tvari sustava s okolinom. Unutar takvog sustava mogući su mnogi procesi u kojima se mogu stvarati i poništavati električki nabijene čestice (npr.  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ ). Međutim, u svim tim procesima uvijek se jednak broj pozitivnog naboja stvara ili poništava kao i negativnog naboja. Nije opažen proces u kojem bi zakon o očuvanju ukupnog električnog naboja bio narušen.

## 5.2 Coulombov zakon

Sile koje se javljaju između električki nabijenih tijela bile su jedne od prvih poznatih pojava vezane uz elektricitet. Danas, silu međudjelovanja između električki nabijenih tijela opisujemo Coulombovim zakonom koji možemo iskazati na sljedeći način: *dva se mirna električki nabijena tijela odbijaju ili privlače silom koja je razmjerna umnošku njihovih naboja, a obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti između njih. Naboji istog predznaka se odbijaju, a različitog privlače.* Taj se zakon može sažeto napisati u vektorskom obliku

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (5.2)$$

gdje su  $Q_1$  i  $Q_2$  količine naboja jednog i drugog tijela. Jedinični vektor  $\hat{r}_{12}$  usmjeren je od naboja  $Q_1$  do naboja  $Q_2$ , a  $\vec{F}_{21}$  označava silu koja djeluje na naboj  $Q_2$  uzrokovan nabojem  $Q_1$ . Konstanta  $\epsilon_0$  se naziva **permitivnost vakuumu**, a njena vrijednost je

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2). \quad (5.3)$$

Tijelo koje ima jednaku količinu pozitivnog i negativnog naboja djeluje prema vani kao neutralno tijelo, ako se razmatra utjecaj na većim udaljenostima. Atomi u normalnom stanju sadrže jednak broj elektrona i protona pa su u tom smislu neutralni. Međutim, može se djelovati na atome te pojedini elektron, ili više njih, otrgnuti od atoma ili ga dodati atomu, tako da atom u cijelosti postaje pozitivno ili negativno električki nabijen. Takav atom nazivamo **ionom**.

## 5.3 Električno polje

Zanimljivo je pitanje na koji se način ostvaruje međudjelovanje između mirnih naboja. U modernoj fizici kažemo da električni naboji međudjeluju kroz izmjenu čestica, koje nazivamo fotonima. Međutim, na ovom mjestu objasniti ćemo međudjelovanje kroz pojam **električnog polja**. Možemo zamisliti kako električni naboj  $Q$  oko sebe stvara električno polje jakosti  $\vec{E}$  na mjestu određenim vektorom  $\vec{r}$  u odnosu na naboj  $Q$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (5.4)$$

Na taj se način sila na naboj  $Q_1$ , koju uzrokuje naboj  $Q$ , može izraziti preko jakosti električnog polja na tom mjestu

$$\vec{F} = Q_1 \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (5.5)$$

Ako imamo više točkastih naboja  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), tada se ukupna jakost električnog polja može izraziti kao suma pojedinih jakosti električnih polja  $\vec{E}_i$  koju stvara svaki pojedini naboj  $Q_i$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}_i). \quad (5.6)$$

U gornjem izrazu  $\vec{r}_i$  označava vektor usmjeren od  $i$ -tog naboja do točke u kojoj iskazujemo jakost električnog polja. Mjerna jedinica jakosti električnog polja je N/C (newton po coulombu).

## 5.4 Elektrostatska potencijalna energija

U načelu je Coulombov zakon (uz Newtonove zakone gibanja) dovoljan za potpun opis elektrostatike. Međutim, uvođenje novih pojmova i fizikalnih veličina povećava naše razumijevanje tih pojava. Budući da su električne sile konzervativne, možemo uvesti pojam **elektrostatske potencijalne energije**. Elektrostatsku potencijalnu energiju određenog sustava naboja definiramo kao rad potreban da se ti naboji dovedu iz beskonačnosti u danu konfiguraciju. Potencijalnu energiju naboja  $Q$  koji se nalazi u polju kojeg stvara naboj  $Q_1$ , a nalaze se na udaljenosti  $r$  jedan od drugog, možemo odrediti na sljedeći način

$$E_p = W = \int \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \int (-\vec{F}) \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{r}, \quad (5.7)$$

gdje smo sa  $\vec{F}_v = -\vec{F}$  označili vanjsku silu kojom trebamo djelovati na naboj  $Q_1$ .

Pored elektrostatske potencijalne energije korisna fizikalna veličina je i **električni potencijal** kojeg definiramo kao potencijalna energija jediničnog naboja

$$V = \frac{E_p}{Q}. \quad (5.8)$$

Jedinica za električni potencijal je volt ( $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ ). Razliku potencijala,  $V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)$ , u dvjema točkama nazivamo **napon** i često označavamo sa  $U$ . Poznavajući potencijal  $V$  kojeg stvara određena raspodjela naboja moguće je odrediti jakost električnog polja<sup>3</sup>,  $\vec{E}$ .

### Primjeri

1. Odredite potencijal točkastog naboja  $Q_1$  na udaljenosti  $r$ .

Rj.:

Budući znamo potencijalnu energiju  $E_p$  koju ima 'probnog' naboja  $Q$  na udaljenosti  $r$  od danog naboja  $Q_1$ , to za potencijal dobijemo

$$V = \frac{E_p}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r}.$$

## 5.5 Električna struja

Električna struja je posljedica gibanja nositelja naboja, npr. elektrona. Da bismo opisali takva gibanja uvodimo vektorsku veličinu koju nazivamo **gustoća električne struje**

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}_s, \quad (5.9)$$

gdje  $\rho$  označava volumsku gustoću naboja, a  $\vec{v}_s$  označava srednju brzinu tih naboja unutar tog (malog) volumena. Mjerna jedinica za gustoću struje je A/m<sup>2</sup> (amper po metru kvadratnom). Na primjer, gustoća struje koju stvaraju elektroni volumske koncentracije  $n$  i srednje brzine  $\vec{v}$  je dan izrazom

$$\vec{j} = -en\vec{v}, \quad (5.10)$$

gdje je  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  apsolutna vrijednost naboja elektrona. Ako su svi smjerovi gibanja jednog skupa elektrona jednako zastupljeni onda je njihova srednja brzina jednaka nuli pa je tada i gustoća struje jednaka nuli.

Ukupna **jakost električne struje**  $I$  kroz neku površinu  $S$  definiramo kao integral svih gustoća struje  $\vec{j}$  po toj površini

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (5.11)$$

Iznos vektora  $d\vec{S}$  je jednak vrijednosti infinitezimalne površine  $dS$ , a smjer i orijentacija su isti kao i smjer i orijentacija vektora normale na tu površinu.

<sup>3</sup>  $\vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})V(\vec{r})$

Budući da je naboj  $dq$ , koji prođe u vremenu  $dt$  kroz infinitezimalnu površinu  $d\vec{S}$ , dan izrazom  $dq = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt$ , to za struju  $dI$  kroz tu infinitezimalnu površinu možemo pisati

$$dI = \frac{dq}{dt}. \quad (5.12)$$

Ukupna struja  $I$  je tada integral svih elementarnih struja  $dI$  kroz male površine  $dS$

$$I = \int_S dI = \frac{dQ}{dt}, \quad (5.13)$$

gdje  $dQ$  označava naboj koji u vremenu  $dt$  prođe kroz ukupnu površinu  $S$ .

## 5.6 Električna vodljivost i Ohmov zakon

Djelujući na naboje nekom silom električno polje može pokrenuti te naboje i tako izazvati električnu struju. Da li i kako će struja teći ovisi o fizičkim svojstvima sredstva u kojemu polje djeluje.

Jedno od najranijih eksperimentalnih otkrića o električnim strujama u tvarima je Ohmov zakon:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (5.14)$$

gdje  $U$  označava razliku potencijala među krajevima vodiča. Fizikalnu veličinu  $R$  nazivamo otpor vodiča koji ovisi o duljini vodiča  $l$ , njegovom poprečnom presjeku  $S$  i tzv. električnoj otpornosti  $\rho$  same tvari od koje je načinjen vodič

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (5.15)$$

### 5.6.1 Valjanost Ohmova zakona

Ohmov zakon opisuje odnos jakosti struje i napona za velik broj tvari i u velikom području jakosti električnog polja. Međutim pri jako velikim vrijednostima jakosti električnog polja dolazi do narušenja Ohmova zakona. To se događa zbog sve češćih sudara među nositeljima naboja te zbog povećanja broja nositelja naboja. Stoga jakost električne struje više nije proporcionalna električnom polju. Različite diode, spojevi dvaju poluvodiča ili poluvodiča i metala mogu znatno odstupati od Ohmova zakona. Ovakve nelinearne pojave su nužne u elektronici pa i u životu. Kad bi sve tvari promijenile svoja svojstva tako da slijede Ohmov zakon, onda bi električna tehnologija, pa i život, bili izbrisani.

## 5.7 Električna struja u vakuumu

Vakuum je idealan izolator jer u njemu ne postoje slobodni nositelji naboja. Da bi vakuum ipak vodio električnu struju, u njemu treba postojati stalni izvor slobodnih naboja, npr. elektrona s užarene površine metala. Tu je pojavu prvi otkrio Edison<sup>4</sup> pri pokusima sa žaruljom koja je imala metalnu pločicu ugrađenu u balon žarulje. U kasnijoj izvedbi pojava emisije elektrona pri zagrijavanju metala primjenjivala se u elektronskim cijevima. To su zatvorene staklene cijevi iz kojih je isisan zrak i u koje su ugrađene dvije ili više elektrode: *katoda*, iz koje grijanjem izlaze elektroni, i *anoda*, koja prikuplja elektrone. Iz katode će izlaziti elektroni te, ako između katode i anode postoji razlika potencijala, elektroni će proteći od katode prema anodi. Kroz vakuum će proteći električna struja. Njihovo gibanje neće biti ometano jer u cijevi gotovo da i nema čestica s kojima bi se oni mogli sudarati. Struja će teći samo ako je katoda spojena na negativni, a anoda na pozitivni pol. Na taj način, npr. dioda može djelovati kao filter jer će propuštati gibanje elektrona samo u jednom smjeru. U prošlosti, vakuumska dioda je služila kao ispravljač, međutim, danas se koriste uglavnom poluvodičke diode. Dioda je primjer gdje je Ohmov zakon narušen.

Snop elektrona koji napušta površinu katode i giba se pravocrtno kroz vakuum nazivamo **katodnim zrakama**. Kada je katodno zračenje otkriveno<sup>5</sup> nije se znala njegova priroda. Tek je Thomson 1895 pokazao da su to nabijene čestice male mase – elektroni.

<sup>4</sup>Thomas Alva Edison, (1847-1931), poznati američku izumitelj.

<sup>5</sup>Pičker, 1858.

## 5.8 Električna struja u plinovima

Plinovi su, uopćeno kazano, loši provodnici elektricneta te se mogu smatrati izolatorima. Međutim, pod određenim uvjetima i plinovi postaju vodiči. To se događa kada se u plinu nalaze ionizirane molekule ili atomi. Plin je moguće ionizirati na različite načine, npr. visokoenergijskim česticama koje prolete kroz plin, ili visokim temperaturama. Ionizirane molekule plina opet se mogu vratiti u neionizirano stanje primajući natrag elektrone koje su izgubile pri ionizaciji.

Jedno od zanimljivih pojava je tzv. udarna ionizacija plina. To je pojava koja nastaje kod naglog električnog pražnjenja plina, tj. iskrenja u plinu. Takva pojava nastaje kod velikih vrijednosti električnog polja u plinu. U tim uvjetima ioni se sudaraju s ostalim molekulama plina te i one postaju ionizirane. U kratkom vremenskom intervalu nastane ogroman broj iona u plinu i struja poprimi velike vrijednosti. Jedan primjer je i munja koja se javlja između oblaka i oblaka te oblaka i zemlje. Razlika potencijala doseže vrijednosti od nekoliko milijuna volta.

## 5.9 Magnetsko polje

Do Christiana Oersteda (1920) držalo se da elektricitet i magnetizam dvije odvojene prirodne pojave. Oersted je imao uporno ideju da je magnetizam možda nekakav skriveni oblik elektricneta. Za vrijeme predavanja, slučajno je otkrio tu vezu otklonom magnetske igle u blizini vodica kojim teče električna struja. Poslije su Ampère i Faraday razradili potpuni opis magnetskog djelovanja električnih struja.

Kao što kažemo da naboj u mirovanju stvara električno polje oko sebe, tako možemo reći da naboj u gibanju stvara magnetsko polje oko sebe, kojeg označavamo sa  $\vec{B}$ . Preciznije kazano, naboj u gibanju pored električnog polja stvara i magnetsko polje, dok mirni naboji stvaraju samo električno polje.

Pojam magnetskog polja možemo uvesti slično električnom polju. Eksperimentalno je utvrđeno da sila koja djeluje na česticu naboja  $Q$  i brzine  $\vec{v}$  ima sljedeći oblik

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (5.16)$$

a zove se Lorentzova sila. Prvi dio  $Q\vec{E}$  se odnosi na Coulombovu silu i može se proračunati kada je naboj u mirovanju. Drugi dio  $Q\vec{v} \times \vec{B}$  možemo nazvati magnetska sila na naboj u gibanju.  $\vec{B}$  u izrazu 5.16 nazivamo magnetsko polje i mjerimo u teslima ( $1 \text{ T} = \text{N}/(\text{Am})$ ).

Zanimljivo je pitanje o zavisnosti magnetskog polja  $\vec{B}$  i struje naboja koja stvara to polje. Tu zavisnost su pronašli Biot i Savart, ali mu je konačni oblik dao Laplace, pa se tako i zove, Biot-Savart-Laplaceov zakon: *Magnetsko polje  $d\vec{B}$  kojeg stvara 'element' struje  $I d\vec{l}$  u točki određenoj vektorom  $\vec{r}$  u odnosu na taj 'element' struje glasi.*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (5.17)$$

Konstanta  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  se naziva permeabilnost vakuumu.

U slučaju da imamo jedan naboj  $Q$  u gibanju, tada je magnetsko polje kojeg stvara taj naboj dano na sljedeći način

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (5.18)$$

Možemo pronaći vezu između magnetskog i električnog polja kojeg stvara naboj u gibanju. Naime, električno polje je dano izrazom 5.4 te lako uočavamo da se magnetsko polje  $\vec{B}$  može dobiti iz poznavanja električnog polja

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}, \quad (5.19)$$

gdje smo sa  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  označili brzinu svjetlosti u vakuumu. Vidimo da su magnetsko polje, električno polje i brzina čestice naboja  $Q$  sve međusobno okomite veličine. Iz 5.19 možemo zaključiti da su električno i magnetsko polje manifestacija jednog osnovnog svojstva kojeg možemo zvati elektromagnetsko polje.

**Pitanja za vježbu**

1. Ukratko objasnite strukturu atoma.
2. Koja je najmanja izmjerena količina naboja.
3. Kakve se sile javljaju između tijela koja imaju naboj istog predznaka, a kakve između različitog predznaka?
4. Što nam kaže zakon o očuvanju električnog naboja?
5. Iskažite Coulombov zakon riječima te napišite u matematičkom obliku.
6. Što nazivamo ionom?
7. Objasnite pojam električnog polja te napišite izraz funkcijske ovisnosti jakosti električnog polja kojeg stvara naboj na nekoj udaljenosti?
8. Definirajte pojam elektrostatske potencijalne energije. Primjer potencijalne energije jednog naboja u polju drugog.
9. Definirajte pojam električnog potencijala.
10. Definirajte gustoću električne struje. Primjer.
11. Definirajte pojam jakosti električne struje.
12. Kako glasi Ohmov zakon?
13. Kada dolazi do narušenja Ohmovog zakona? Primjeri.
14. U kojim uvjetima vakuum može voditi električnu struju?
15. Što nazivamo katodom, a što anodom?
16. Što nazivamo katodnim zrakama i što je njihova stvarna priroda?
17. Pod kojim uvjetima plinovi postaju vodiči električne struje?
18. Što je to udarna ionizacija plina i kako nastaje?
19. Uvedite pojam magnetskog polja.
20. Iskažite Biot-Savart-Laplaceov zakon.
21. Koju konstantu nazivamo vakuumskom permibilnošću, a koju vakuumskom permitivnošću i iskažite njihovu vezu s brzinom svjetlosti?
22. Napišite vezu između električnog i magnetskog polja koje stvara naboj u gibanju.
23. U kojem su međusobnom odnosu električno i magnetsko polje te brzina gibanja čestice koja nosi električni naboj?

# Poglavlje 6

## OPTIKA

### 6.1 Priroda svjetlosti i osnovni pojmovi

Optika je znanost o svjetlosti. U širem smislu, pod pojmom svjetlosti podrazumijevaju se pojave koje se odnose na širenje elektromagnetskih valova bez obzira da li oni izazivaju osjet vida, dok se u užem smislu ograničavamo samo na one koji izazivaju osjet vida.

Mnoge se optičke pojave mogu objasniti a da ne razmatramo problem prirode svjetlosti. Ipak, pokušajmo objasniti prirodu svjetlosti.

Današnje je saznanje o prirodi svjetlosti rezultat predodžbi niza pokoljenja ljudskog roda od antičkih vremena do danas. Još u staroj Grčkoj rodila se misao da je svjetlost nešto što izlazi iz tijela koje promatramo. Ovu misao razradio je dalje Newton i dao svoju tzv. teoriju istjecanja svjetlosti. Po toj teoriji tijela kad se nalaze u posebnom stanju ispuštaju neprekinute mlazove svjetlosnih čestica (korpuskula) koje se gibaju pravocrtvno na sve strane. Nešto kasnije Huygens je objasnio takve pojave polazeći od valne slike svjetlosti po kojoj se svjetlost širi kao val u elastičnom mediju nazvanom eter.

Maxwell je u 19. stoljeću predložio elektromagnetsku teoriju svjetlosti po kojoj je svjetlost elektromagnetski val. Do tada čestična slika nije mogla objasniti određene svjetlosne pojave kao što su interferencija i difrakcija, dok je elektromagnetska teorija u potpunosti objasnila sve do tada poznate eksperimentalne činjenice o svjetlosti. Međutim, početkom 20. stoljeća pojavile su se nove eksperimentalne činjenice koje su se mogle objasniti samo čestičnom slikom (npr. fotoelektrični učinak). Izgledalo je kao da se svjetlost jednom ponaša kao elektromagnetski val, a drugi put kao čestica koja je poslije nazvana **foton**. Moderna fizika kaže da je svjetlost dualne prirode, a da dualnu prirodu imaju zapravo i materijalne čestice kao što su elektroni, protoni, itd.

### 6.2 Elektromagnetski valovi

Elektromagnetskim valovima su povezane svjetlosne, električne i magnetske pojave koje je dao J.C. Maxwell (1813.-1879.), škotski fizičar. Godine 1864. on je cjelokupno znanje elektriciteta i magnetizma sazeo u četiri jednačbe koje se ukratko mogu iskazati na sljedeći način.

1. Silnice električnog polja imaju svoj izvor i ponor u električnim nabojima (Gaussov zakon za električno polje)

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

2. Silnice magnetskog polja su zatvorene linije (Gaussov zakon za magnetsko polje)

$$\nabla \vec{B} = 0.$$

3. Promjenjivo magnetsko polje stvara električno polje (Faradayev zakon)

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

4. Promjenjivo električno polje i naboji u gibanju uzrokuju nastanak magnetskog polja (Amperov zakon)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Iz ovih jednadžbi izlazi da promjenom električnog polja jakosti  $\vec{E}$  i magnetskog polja jakosti  $\vec{B}$  nastaju elektromagnetski valovi, koji se šire u vakuumu brzinom svjetlosti. Smjerovi električnog i magnetskog polja elektromagnetskog vala su međusobno okomiti, a titranje je u fazi. Smjer širenja vala je okomito na smjerove obaju polja, električnog i magnetskog. To znači da je elektromagnetski val transverzalne prirode. Za razliku od mehaničkih valova, elektromagnetskim valovima nije potrebno sredstvo da bi se širili. U danoj točki prostora i u danom trenutku vrijedi odnos iznosa jakosti električnog i magnetskog polja:

$$\frac{E}{B} = c. \quad (6.1)$$

Za brzinu elektromagnetskog vala u vakuumu  $c$  pokazuje se da vrijedi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (6.2)$$

gdje su  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$  električna permeabilnost vakuuma, a  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{TmA}^{-1}$  magnetska permeabilnost vakuuma. Uvrstimo li zadane vrijednosti, za brzinu svjetlosti u vakuumu dobijemo

$$c = \frac{1}{\sqrt{8.854 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{TmA}^{-1}}} = 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.3)$$

U nekom sredstvu (kristalu, tekućinu, plinu) brzina širenja vala je manja i ovisi o svojstvima sredstva

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{n}. \quad (6.4)$$

U ovom izričaju,  $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  nazivamo **indeksom loma sredstva** koja ovisi i o frekvenciji vala. Kao i svaki drugi val, i elektromagnetski val prenosi energiju kroz prostor. Volumska gustoća energije elektromagnetskog polja u vakuumu je proporcionalna produktu iznosa jakosti električnog i magnetskog polja

$$w = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB. \quad (6.5)$$

### 6.3 Spektar elektromagnetskih valova

Interval svih frekvencija elektromagnetskih valova nazivamo **elektromagnetskim spektrom**. Elektromagnetski val se širi prostorom kao val, ali međudjeluje s tvari kao čestica određene energije koju nazivamo foton. Spektar elektromagnetskih valova, ugrubo, možemo podijeliti u nekoliko skupina:

1. Televizijski i radio valovi su valovi koji imaju valnu duljinu od nekoliko tisuća km do 30-tak cm.
2. Mikrovalovi imaju valne duljine manje od televizijskih i radio valova i većih od oko 1 mm.
3. Infracrveni valovi imaju valne duljine manje od mikrovalova pa do oko 760 nm.
4. Vidljiva svjetlost koja predstavlja elektromagnetske valove na koje reagira ljudsko oko. Valna duljina vidljive svjetlosti se proteže od valne duljine infracrvenih valova pa do oko 390 nm. Ove valne duljine odgovaraju frekvencijama ( $\nu = c/\lambda$ ) od  $3.95 \cdot 10^{14}$  Hz do  $7.7 \cdot 10^{14}$  Hz. Izvor vidljive svjetlosti je atom. Vidljivu svjetlost dijelimo na boje obzirom na frekvenciju odnosno valnu duljinu, ugrubo, na intervale:
  - (a) crvena,  $\lambda = 760 - 640$  nm,
  - (b) narančasta,  $\lambda = 640 - 590$  nm,
  - (c) žuta,  $\lambda = 590 - 570$  nm,

- (d) zelena,  $\lambda = 480 - 570$  nm,
- (e) plava,  $\lambda = 480 - 430$  nm,
- (f) ljubičasta,  $\lambda = 430 - 390$  nm.

Ljudsko oko je najosjetljivije na žutozelenu svjetlost valne duljine oko  $\lambda = 555$  nm.

5. Ultraljubičasti valovi se vežu na elektromagnetske valove vidljive svjetlosti pa sve do valne duljine od oko 10 nm.
6. X-zrake čija je valna duljina manja od oko 10 nm i veća od oko 10 pm.
7.  $\gamma$ -zračenje je elektromagnetski val nuklearnog porijekla. Valne duljine protežu se do oko 10 fm. Vrlo je opasno i izaziva teška oštećenja živog organizma.
8. Kozmičko zračenje koje ima još manje valne duljine od  $\gamma$ -zračenja.

## 6.4 Valna optika

Kako smo već spomenuli, vidljiva svjetlost je elektromagnetski val. Dio optike koji izučava pojave povezane s valnim svojstvima svjetlosti zove se **valna optika**. Pojave širenja svjetlosti (odnosno općenito elektromagnetskih valova), zatim refleksije, loma valova i polarizacije mogu se uspješno tumačiti elektromagnetskom teorijom.

### 6.4.1 Interferencija svjetlosti

Ako se u jednoj točki prostora osjeća utjecaj električnog polja uzrokovano nizom pojedinačnih polja koji dolazi iz različitih izvora tada je rezultatno polje jednako algebarskom zbroju vektora tih pojedinačnih polja. Da bismo sagledali fizikalnu stranu pojave, promotrimo slučaj kada električni vektori dvaju svjetlosnih valova jednake frekvencije u nekoj točki prostora titraju u istom smjeru. Kako pojavu promatramo u istoj točki prostora a titranje na istom pravcu i smjeru, npr. u smjeru  $z$ , njihovi analitički izrazi mogu se napisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= E_{1,0} \sin(\omega t + \alpha_1), \\ E_2(z, t) &= E_{2,0} \sin(\omega t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdje su  $E_{1,0}$  i  $E_{2,0}$  amplitude električnih polja. Rezultatno titranje bit će dano kao vektorski zbroj ovih dvaju titranja. Pokazuje se da, ako je razlika faza ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ) promjenjiva, onda u vremenskom prosjeku intenzitet što ga opažamo u promatranoj točki je jednak zbroju pojedinačnih intenziteta.

Posebno interesantan slučaj nastaje kada je razlika faza ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ) nepromjenjiva u vremenu. Tada se ukupni intenzitet može pojačavati ili slabiti. Takvu pojavu nazivamo **interferencija** svjetlosnih valova.

Valovi i izvori za koje je razlika faza ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ) nepromjenjiva veličina nazivamo **koherentnim**. Može se pokazati da je razlika faza određena optičkom razlikom puteva. Zbrajanje koje daje minimum se naziva **destruktivna interferencija**. Prostorni pomak između valova zove se **optička razlika hoda**  $\delta$ . Za konstruktivnu interferenciju razlika hoda mora biti cjelobrojni višekratnik valne duljine, a za destruktivnu ona mora biti neparni mnogokratnik polovice valne duljine

$$\begin{aligned} \delta &= m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{maksimum}), \\ \delta &= \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{minimum}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

### 6.4.2 Difrakcija svjetlosti

Kad snop svjetlosti prolazi kroz uski otvor, neki se valovi otklanjaju u područje geometrijske sjene. To se naziva **ogib** ili **difrakcija** a nastaje zbog interferencije valova iz mnogobrojnih koherentnih izvora. Ako se

osvijetli mala pukotina, tada svaka točka otvora djeluje kao novi izvor koherentnih valova. Za valove koji skreću u nekom smjeru može nastati konstruktivna ili destruktivna interferencija ovisno o razlici hoda.

Ovakvo ponašanje svjetlosti moguće je predvidjeti na osnovi Huygensova principa pretpostavljajući da je svaka točka valne fronte izvor novih kuglastih valova koji se od točke šire na sve strane.

### 6.4.3 Polarizacija svjetlosti

Interferencija i difrakcija nastaju kod bilo kojih valova dok se pojava polarizacije može dogoditi samo kod transverzalnih valova. Svjetlost se može polarizirati, dok npr. zvuk ne može jer je zvuk longitudinalni val.

Nepolarizirana obična svjetlost ima titranje jakosti električnog polja u svim smjerovima okomito na smjer širenja. Ako uklonimo sve električne vektore osim onih koji su paralelni nekom pravcu tada nastaje linearno polarizirana svjetlost, a smjer preostalog električnog polja je smjer polarizacije. Polarizirana svjetlost se može dobiti tako da se svjetlost propušta kroz materijale tzv. polaroide u kojima su velike molekule orijentirane u određenom smjeru. Djelomična i potpuna polarizacija mogu nastati i pri refleksiji svjetlosti. Prolaženjem polarizirane svjetlosti kroz neke sustave može se dogoditi zakretanje smjera polarizacije.

## 6.5 Osnovni zakoni geometrijske optike

Svrha geometrijske optike je pronalaženje zakonitosti koje se odnose na stvaranje slika pomoću optičkih sredstava. Osnovni zakoni geometrijske optike su empirijski zakoni:

1. zakon pravocrtnog širenja svjetlosti, koji ističe da se svjetlost u homogenim medijima širi po pravcima.
2. Zakon neovisnosti svjetlosnih snopova, koji kazuje da se dva svjetlosna snopa pri presjecanju šire nezavisno jedan o drugom.<sup>1</sup>
3. Zakon refleksije svjetlosti od zrcalne površine, koji glasi da se zraka svjetlosti odbija od površine tako da je kut upada  $\alpha$ , kojeg upadna zraka zatvara s normalom, jednak kutu odbijanja  $\alpha'$ , kojeg odbijena zraka zatvara s normalom. Upadna i odbijena zraka leže u istoj ravnini s normalom. Granice sredstva mogu biti ravne ili zakrivljene čiju uporabu nalazimo u mnogim dijelovima života. Primjena zakrivljenih zrcala je najčešća kod reflektora, satelitskih antena, kod automobila za gledanje unatrag, itd.
4. zakon loma svjetlosti na granici dvaju medija, koji kazuje da upadna i lomljena zraka leže u istoj ravnini s normalom, a upadni kut  $\alpha$  i lomljeni kut  $\beta$  povezani su relacijom

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (6.8)$$

gdje se  $n_1$  i  $n_2$  nazivaju indeksima loma sredstava 1 i 2, a definirani su kao odnos brzina svjetlosti u vakuumu  $c$  i one u odgovarajućem sredstvu  $v$

$$n = \frac{c}{v}. \quad (6.9)$$

Bijela svjetlost je složena svjetlost različitih valnih duljina. U vakuumu se svjetlost svih valnih duljina giba istom brzinom  $c$ , dok se u različitim sredstvima giba različitim brzinama za različite valne duljine. U istom sredstvu crvena svjetlost se giba većom brzinom od ljubičaste svjetlosti zbog čega prolazom svjetlosti kroz sredstva različite gustoće dolazi do **disperzije**. Iz definicije indeksa loma sredstva zaključujemo da je indeks loma sredstva za crvenu svjetlost manji od indeksa loma za ljubičastu svjetlost

$$n_c < n_l.$$

Svjetlost crvene boje se manje lomi od svjetlosti ljubičaste boje prilikom prolaza iz rijedeg sredstva u gušće.

Isključivo u slučaju kad svjetlost ide iz optički gušćeg sredstva u rijeđe može doći do tzv. **totalne refleksije**. Pri određenom upadnom kutu i većim, dolazi do potpune refleksije i svjetlost u tim slučajevima ne može izići iz gušćeg sredstva. Primjena totalne refleksije je česta kod optičkih instrumenata s prizmom ili svjetlovodima.

---

<sup>1</sup>Ovo vrijedi samo pod određenim uvjetima.

## 6.6 Veličine u fotometriji

Djelovanje svjetlosti na oko ili na ma koje drugo tijelo moguće je u prvom redu zato što je foton kao čestica svjetlosti nositelj energije. Kvantitativna mjerenja u vezi sa svjetlošću mogu se stoga opisati mjerenjem svjetlosne energije ili fizikalnih veličina povezanih s energijom.

### 6.6.1 Jakost svjetlosti

Količina svjetlosne energije  $\Delta E$  koja prođe kroz površinu  $\Delta S$  okomitu na smjer širenja svjetlosti u jedinici vremena naziva se **tokom svjetlosti** kroz tu površinu i često se označava  $\Delta\Phi$ . Ukupni tok energije  $\Phi$  se dobije sumiranjem po cijelom prostornom kutu.

Tok svjetlosti  $\Delta\Phi$  koji dolazi na jedinicu prostornog kuta  $\Delta\Omega$  u danom smjeru nazivamo **jakost** ili **intenzitet svjetlosti**

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}. \quad (6.10)$$

Općenito  $I$  ovisi o smjeru određenog kutovima  $\vartheta$  i  $\varphi$

$$I = I(\vartheta, \varphi). \quad (6.11)$$

Ako su vi smjerovi ravnopravni, onda vrijedi

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}, \quad (6.12)$$

gdje  $\Phi$  označava ukupni tok svjetlosti koji emitira promatrani izvor svjetlosti. Jedinica za jakost svjetlosti je 1 cd (candela) i to je jedna od osnovnih jedinica SI sustava. Međunarodnim dogovorom je uzeto da je jakost svjetlosti od jedne candele jednak šezdesetom dijelu jakosti svjetlosti koji se izrači u smjeru normale sa površine od 1 cm<sup>2</sup> apsolutno crnog tijela koji se nalazi na temperaturi taljenja platine (2046.6 K).

Jedinica za tok svjetlosti je 1 lm (lumen) i odgovara toku svjetlosti koji emitira izvor od jedne candela kroz jedinicu prostornog kuta.

### 6.6.2 Osvjetljenost

**Osvjetljenost** neke površine  $\Delta S$  prirodno je definiran kao tok svjetlosti koji na nju pada

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (6.13)$$

Može se odrediti osvjetljenost neke površine  $\Delta S$  koju daje neki točkasti izvor jakosti  $I$  na udaljenosti  $r$  pod kutem  $\alpha$  i iznosi

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (6.14)$$

Jedinica za osvjetljenost je 1 lx (lux), a to je ono osvjetljenje pri kome na površinu od 1 m<sup>2</sup> pada tok svjetlosti od 1 lumena.

## 6.7 Boje svjetlosti

Vidni osjet ovisi o frekvenciji elektromagnetskog zračenja. Ljudsko oko zapaža samo zračenja kojem odgovaraju valne duljine od oko 390 nm do oko 760 nm. Zračenja različitih frekvencija u rasponu vidljive svjetlosti daju dojam određene boje. Boja nekog tijela može potjecati od svjetlosti koje ono emitira (npr. užareno tijelo) ili od svjetlosti koje reflektira ili propušta. U slučaju refleksije ili propuštanja svjetlosti, tijelo apsorbira dio primljene svjetlosti ovisno o njegovoj strukturi.

Kažemo da je neka ploha bijele boje ako potpuno reflektira sva valna područja vidljive svjetlosti. Crna ploha potpuno apsorbira takvu svjetlost, dok siva ploha djelomično, ali ravnomjerno sva područja vidljive svjetlosti. Bijelo, crno i sivo nisu prave (kromatske) boje jer nemaju svoje karakteristično valno područje, već ovise o sposobnosti plohe da jače ili slabije reflektira sva valna područja vidljive svjetlosti.

Tijelo će biti obojeno nekom kromatskom bojom, ako pokazuje selektivnu apsorpciju, tada će boja koju ta površina ima (npr. reflektira) biti komplementarna apsorbiranoj boji. Na primjer tijelo će imati crvenu boju ako najjače apsorbira plavozeleni dio spektra, a najjače reflektira zračenja crvenog dijela spektra.

Dojam bijelog se može dobiti ako nam u oko dolaze samo dvije zgodno odabrane boje koje nazivamo **komplementarnim** bojama (npr. plava i žuta).

Kod miješanja slikarskih boja imamo potpuno suprotan učinak. Miješanjem npr. plave i žute dobije se zelena boja, a ne bijela. Miješanje slikarskih boja je slično djelovanju obojenih filtera kroz koje propuštamo svjetlost. Plavi filter propušta plavi dio spektra te susjedne boje (npr. zelenu), a žuti filter propušta također zelenu boju. Stavimo li plavi filter na žuti, dobit ćemo samo onu svjetlost koju oba propuštaju, tj. zelenu. Ovakvo miješanje nazivamo supstraktivnim miješanjem za razliku od aditivnog kojeg imamo npr. kod stvaranja boja televizora.

Objašnjenje teorije boja, po kojoj vrijedi da se svaki pojedini osjećaj boje može predstaviti preko triju tzv. osnovnih boja, može se shvatiti ako se upozna struktura oka. Naime, na mrežnici oka postoje štapići i tri vrste čunjića koji su osjetljivi na boje. Jedni su osjetljivi najviše na crvenu boju, drugi na zelenu i treći na plavu. Svaka svjetlost istovremeno nadražuje sve tri vrste čunjića, ali a različitim intenzitetom. Rezultat svih triju osjećaja je zapažanje jedne određene boje. Ta boja zavisi o relativnom odnosu triju osjeta na čunjićima. Na primjer, ako su sva tri čunjića jednako pobuđena, onda nastaje osjećaj bijele svjetlosti. Osjećaj ma koje boje nastaje sumiranjem triju elementarnih osjećaja boja.

## 6.8 Osnove rada lasera

Za razumijevanje rada lasera<sup>2</sup> potrebno je objasniti principe stimulirane emisije. Možemo poći od nekoliko činjenica:

1. Atom se može nalaziti u osnovnom energijskom stanju ili u jednom od pobuđenih energijskih stanja.
2. Pri prijelazu sa pobuđenog stanja na osnovno stanje ili pobuđeno stanje niže energije atom emitira foton energije koja je jednaka razlici energija dvaju stanja.
3. Ako foton nalijeće na atom, atom može apsorbirati taj foton i prijeći u stanje više energije samo ako je energija fotona jednaka razlici dvaju stanja.
4. Ako se atom nalazi u nekom pobuđenom stanju on će nakon kraćeg vremena spontano emitirati foton određene energije i preći u stanje niže energije pa sve dok ne dođe u stanje osnovne energije.

Međutim moguće je atom koji se nalazi u pobuđenom stanju prisiliti na emisiju fotona prije nego bi on to učinio spontano. Naime, ako se atom nalazi u pobuđenom stanju i na njega naleti foton određene energije tada će atom ispustiti dodatni foton koji ima istu energiju i smjer gibanja kao i upadni foton. Takav proces se naziva stimulirana emisija fotona. Da bi vjerojatnost stimulirane emisije bila veća potrebno je postići stanje inverzne naseljenosti. To je stanje kada se većina atoma nalazi u nekom pobuđenom stanju.

Bitni djelovi za rad lasera su: aktivna tvar, izvor energije i zrcala. U aktivnom sredstvu mora biti više atoma koji mogu biti u pobuđenom stanju. Atomi moraju biti u stanju inverzne naseljenosti i takva stanja moraju trajati dovoljno dugo. Zrcala služe da bi emitirani foton bio u sredstvu dovoljno dugo kako bi i on mogao stimulirati dodatnu emisiju fotona što se postiže jednim potpuno reflektirajućim zrcalom i drugim polupropusnim.

Laseri se mogu podijeliti prema različitim kriterijima, npr. prema agregatnom stanju aktivne tvari (čvrsto, tekuće, plinovito, ...), prema valnoj duljini laserske svjetlosti (vidljivi dio spektra, infracrveno područje, ...), itd. Spomenimo samo neke tipove lasera. Najpoznatiji laseri sa čvrstom tvari kao aktivnim sredstvom su rubinski laser i YAG laser. Granatski laser, YAG, kao aktivnu tvar ima  $Y_3Al_5O_{12}$  (itrij-aluminij-granat). dotiran atomima neodimija. Za optičko pumpanje koriste se volfram-halogene svjetiljke.

Primjene lasera su mnogobrojne, od svakodnevne primjene (optički zapis informacija, pisači, kreditne kartice, ...) do primjene u medicini (kirurgija, dijagnostika, ...) i znanosti. Primjena u restauratorstvu umjetnina bit će posebno objašnjena u drugom dijelu kolegija.

<sup>2</sup>Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

**Pitanja za vježbu**

1. Ukratko objasniti odnose električnog i magnetskog polja elektromagnetskog vala.
2. Kako možemo izraziti brzinu svjetlosti?
3. Kako izražavamo indeks loma sredstva?
4. Spektar elektromagnetskih valova.
5. Pojam interferencije.
6. Pojam difrakcije.
7. Pojam polarizacije.
8. Zakoni geometrijske optike.
9. Što je disperzija svjetlosti?
10. Definirajte pojmove jakosti svjetlosti i osvjetljenosti.
11. Kako objašnjavamo teoriju triju boja?
12. Osnove rada lasera.

## Poglavlje 7

# KVANTNA OPTIKA

### 7.1 Toplinsko zračenje

Sva tijela na temperaturama različitim od apsolutne nule emitiraju elektromagnetske valove. Ako se ta emisija odvija na račun unutrašnje energije tijela, onda govorimo o toplinskom zračenju. Intenzitet tog zračenja je ovisan o temperaturi tijela. Što je temperatura tijela veća intenzitet zračenja je veći. Ako je temperatura okoline veća od temperature tijela, tijelo će više apsorbirati nego emitirati. Ovakav proces bi trajao sve dok se temperature ne izjednače. U tom slučaju tijelo prelazi u stanje ravnoteže sa svojom okolinom. Većina tijela u prirodi energiju zračenja koja upada na njih djelomično apsorbiraju, dijelom reflektiraju, a dijelom propuštaju. Ako neko tijelo u cijelosti apsorbira energiju koja na njega pada, naziva se apsolutno crnim tijelom.

Fizička veličina koja opisuje zračenje nekog tijela naziva se spektralna emisiona moć, koja pored temperature ovisi i o frekvenciji zračenja. Spektralna emisiona moć je energija koju emitira jedinica površine tijela u jediničnom intervalu frekvencija u jedinici vremena. Apsorpcionu moć nekog tijela definiramo kao odnos energije zračenja koju apsorbira jedinica površine tijela, na temperaturi  $T$ , u jediničnom intervalu frekvencija u odnosu na energiju iste frekvencije koja pada na tu površinu. Odnos emisione i apsorpcione moći, na datoj temperaturi, ne ovisi o vrsti tijela i jednak je emisionoj moći apsolutno crnog tijela.

### 7.2 Stefan-Boltzmannov zakon

Analizirajući eksperimentalne činjenice, Stefan je 1879. godine zaključio da je ukupna snaga zračenja  $P$  s neke površine  $S$  bilo kojeg tijela proporcionalna četvrtoj potenciji temperature  $T$

$$P = \sigma ST^4. \quad (7.1)$$

Iz termodinamičkih razmatranja Boltzmann je 1884. godine došao do istog izraza pa se gornji izraz naziva Stefan-Boltzmannov zakon. Konstanta  $\sigma$  naziva se Stefan-Boltzmannova konstanta koja se određuje eksperimentalno. Za apsolutno crno tijelo ona iznosi

$$\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4). \quad (7.2)$$

### 7.3 Wienov zakon

Koristeći se termodinamikom i teorijom elektromagnetizma, Wien je 1883. godine pokazao da vrijedi relacija

$$T \cdot \lambda_m = b, \quad (7.3)$$

gdje  $T$  označava temperaturu sustava, a  $\lambda_m$  valnu duljinu pri kojoj tijelo ima maksimalan intenzitet zračenja. Konstanta  $b$  se određuje eksperimentom te za apsolutno crno tijelo iznosi

$$b = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ mK}. \quad (7.4)$$

Pomoću ovog zakona mogu se odrediti npr. temperature zvijezda, ako je poznata valna duljina pri kojoj zvijezda ima maksimum zračenja. Naše Sunce maksimum zračenja ima u žuto-zelenom dijelu spektra<sup>1</sup> što odgovara temperaturi od oko 6000 K.

## 7.4 Planckova hipoteza kvanta zračenja

Na osnovi klasične slike, Jeans i Rayleigh su odredili oblik funkcije  $f(\nu, T)$  koja opisuje emisiju i apsorpcijsku moć nekog tijela u ovisnosti o temperaturi tijela  $T$  te frekvenciji zračenja  $\nu$ . Oni su pretpostavili da, budući u nekom tijelu postoji mnoštvo atoma, tijelo zrači elektromagnetske valove svih mogućih valnih duljina. Polazeći od slike da na svaki elektromagnetski val otpada energija jednaka  $kT$  (dva stupnja slobode; svaki stupanj slobode po  $kT/2$ ) došli su do izraza za funkciju zračenja koja se naziva Jeans-Rayleighova formula

$$f_{JR}(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (7.5)$$

Takva funkcija dobro opisuje zračenja crnog tijela za niske vrijednosti frekvencija, dok je zračenje crnog tijela za visoke frekvencije potpuno pogrešno predviđeno ovim izrazom. Naime, po Jeans-Reyleighovoj formuli dio zračenja koji se odnosi na male visoke frekvencije predviđa beskonačno veliku snagu zračenja. Ovakvo predviđanje i neslaganje s eksperimentom se nazvalo ultraljubičasta katastrofa. Upravo ovim neslaganjem cijela klasična fizika, koja je Maxwellovom teorijom dosegla svoj vrhunac, bila je bitno poljuljana. Nemogućnost pobuđivanja harmonijskih oscilatora najviših frekvencija, dovelo je do novih shvaćanja o energiji. Energija se više nije mogla shvaćati kao beskonačno djeljiva i neprekidna veličina. Bilo je potrebno uvesti hipotezu o nedjeljivim količinama energije — energijskim kvantima.

Pred kraj 1900. godine (18. prosinca) njemački fizičar Max Planck predložio je novi analitički oblik volumske energijske gustoće zračenja crnog tijela. Taj novi oblik funkcije doveo je do potpunog podudaranja s eksperimentalnim podacima. Pri svom izvodu Planck je pošao od slike da zračenje tijela nastaje kao rezultat djelovanja ogromnog broja elementarnih oscilatora. Pretpostavio je da energija  $E$  bilo kojeg oscilatora može poprimiti samo vrijednosti proporcionalne višekratniku dotične frekvencije oscilatora  $\nu$

$$E = n h\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.6)$$

gdje je  $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$  Js Planckova konstanta. Svojim zakonom Planck je izvršio određenu revoluciju u fizici postavivši temelje kvantnoj fizici. Zakon zračenja je izveo pretpostavivši da crno tijelo ne emitira i ne apsorbira energiju kontinuirano već u obrocima, tj. diskretno. U punom obliku Planckov zakon zračenja glasi

$$f_P(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\nu, \quad (7.7)$$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti.

Ovaj zakon ima sličan značaj kao i Newtonov zakon gravitacije. Eksperimentalna potvrda valjanosti Planckovog zakona su i eksperimentalni Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon koji se lako izvode iz Planckovog zakona. Naime, integriranjem funkcije  $f_P(\nu, T)$  po svim frekvencijama dolazi se do Stefan-Boltzmannovog zakona<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} P &= \frac{cS}{4} \int_0^\infty f_P(\nu, T) d\nu \\ &= \frac{cS}{4} \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\nu \\ &= \frac{4\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} ST^4 \\ &= \sigma ST^4. \end{aligned} \quad (7.8)$$

<sup>1</sup> Valna duljina maksimalnog zračenja Sunca  $\lambda_m \sim 500$  nm.

<sup>2</sup> Pri rješavanju koristite

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

S druge strane, Wienov zakon se dobije tražeći uvjet pri kojoj volumska gustoća energije  $f_P(\nu, T)$  ima maksimalnu vrijednost

$$\left. \frac{df_P(\nu, T)}{d\nu} \right|_{\lambda=\lambda_m} = 0. \quad (7.9)$$

Na osnovi Planckove hipoteze izmjena energije između zračenja i tvari (emisije i apsorpcije) vrši se uvijek samo u obliku kvanta energije. Veličina kvanta energije ovisi o frekvenciji zračenja i iznosi  $h\nu$ . Na taj način zračenje dobiva čestična svojstva. Uvođenje kvanta energije počinje razvoj atomske teorije zračenja i početak kvantne teorije koja će obilježiti dvadeseto stoljeće.

## 7.5 Fotoelektrični učinak

Jedna od prvih proučenih pojava u kojima je elektromagnetsko zračenje manifestacija čestičnog svojstva je tzv. fotoelektrični učinak. To je pojava pri kojoj neki materijali ispuštaju elektrone kad ih se obasja elektromagnetskim zračenjem. Naime, eksperimentom se utvrdilo da brzina elektrona, koji izlaze iz nekog metala, ne ovisi o intenzitetu svjetlosti kojom se ozračivao metal, već samo o frekvenciji (ili valnoj duljini) svjetlosti. Ova činjenica se ne može objasniti valnom teorijom svjetlosti već samo ako se svjetlost shvati kao roj čestica, odnosno fotona, energije  $h\nu$ .

Zako održavanja energije sustava jednog fotona i elektrona daje

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + W, \quad (7.10)$$

gdje je  $mv^2/2$  kinetička energija elektrona kad je izvan metala, a  $W$  tzv. izlazni rad elektrona iz metala. Izlazni rad je minimalna energija koju je potrebno uložiti da bi se elektron oslobodio iz metala i to je svojstvo određenog metala.

Gornja relacija je poznata Einsteinova relacija za fotoelektrični učinak. Einstein je, dakle, pokazao da se sve pojave vezane uz fotoučinak mogu objasniti ako se elektromagnetsko zračenje shvati kao roj čestica koji imaju svoju energiju  $E$  i količinu gibanja  $\vec{p}$

$$\begin{aligned} E &= h\nu, \\ \vec{p} &= \frac{h}{2\pi} \vec{k}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

gdje je  $\vec{k}$  valni vektor iznosa  $k = 2\pi/\lambda$ . Relacije 7.11 se nazivaju Planck-Einsteinove relacije. To su relacije kojima je elektromagnetsko zračenje dobilo čestična svojstva.

## 7.6 Comptonov učinak

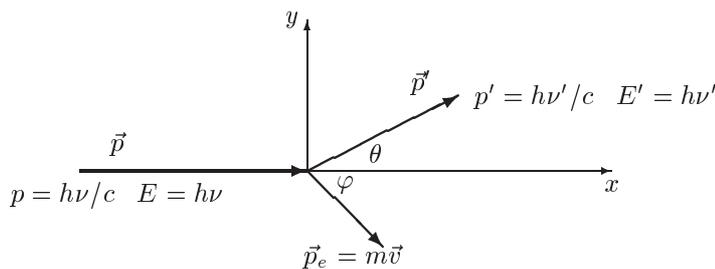
Čestična svojstva svjetlosti naročito su izražena u pojavi koju nazivamo Comptonov učinak. Istražujući raspršenja X-zračenja, Compton je uočio da se, pored zračenja koje ima istu valnu duljinu kao upadno zračenje, pod određenih kutevima nalaze zrake manjih valnih duljina. Ovakva činjenica se ne može objasniti ako se X-zračenje pokuša objasniti kao elektromagnetski val. Naime, po klasičnoj slici, tj. uzimajući da je X-zračenje elektromagnetski val, međudjelovanje s elektronom bi dovelo da titranja elektrona istom frekvencijom kao upadno X-zračenje. Zbog svog ubrzanog kretanja elektron bi emitirao zračenje ponovno iste frekvencije kao frekvencija upadnog zračenja.

Međutim, sve eksperimentalne činjenice koje se pojavljuju kroz Comptonov učinak mogu se u potpunosti objasniti ako uzmemo da je u tom procesu došlo do elastičnog sudara fotona i elektrona. Na osnovi zakona očuvanja energije fotona i elektrona vrijedi izraz

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{m^2c^4 + p_e^2c^2}, \quad (7.12)$$

gdje smo sa  $p_e$  označili iznos količine gibanja elektrona poslije sudara. Zakon očuvanja količine gibanja nam daje dvije skalarne jednadžbe (po jedna za svaki od neovisnih smjerova  $x$  i  $y$ )

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \varphi,$$



Crtež 7.1: Uz Comptonov učinak.

$$0 = -\frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p_e \sin \varphi. \quad (7.13)$$

Ako posljednje dvije jednadžbe kvadriramo te zbrojimo, koristeći valjanost izraza  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , dobijemo sljedeći izraz

$$p_e^2 c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \vartheta + (h\nu')^2. \quad (7.14)$$

Korištenjem 7.12, nakon kraćeg izvoda dolazimo do izraza koji nam daje razliku recipročnih vrijednosti upadne frekvencije i frekvencije odbijenog zračenja pod kutem  $\vartheta$ .

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2} (1 - \cos \vartheta). \quad (7.15)$$

Znajući da vrijedi  $\nu = c/\lambda$  i  $\nu' = c/\lambda'$ , na kraju lako dobijemo

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta). \quad (7.16)$$

Ovaj izraz se poklapa s eksperimentalnim zapažanjima čime je još jednom pokazano čestično svojstvo elektromagnetskog zračenja.

Analizirajući objašnjenje Comptonovog učinka, vidimo da pogođeni elektron dobija dio energije upadnog fotona i mijenja valnu duljinu, odnosno frekvenciju, fotona. Takvi elektroni moraju biti slobodni ili slabo vezani za atom.

## 7.7 Dvojna priroda elektromagnetskog zračenja

Poznato nam je da se pojave difrakcije, interferencije i polarizacije svjetlosti mogu objasniti isključivo valnom teorijom. S druge strane, pojave pri kojima se vrši prenošenje energije na atome i druge čestice, mogu biti objašnjeni ako elektromagnetskom zračenju damo čestična svojstva. Dakle, iskustvo nam kazuje kako se elektromagnetsko zračenje u nekim slučajevima očituje kao valna pojava, a u drugim kao čestična kvantna pojava. Stoga bismo mogli reći da elektromagnetsko zračenje ima dvojni prirodu. Elektromagnetsko zračenje pokazuje valna svojstva pri pojavama širenja kroz prostor, a čestična svojstva pri međudjelovanju s drugim česticama. Ako se očituju jedna svojstva, onda u tom trenutku nema očitovanja drugog svojstva.

### Pitanja za vježbu

1. Što je toplinsko zračenje?
2. Što je apsolutno crno tijelo?
3. Objasnite pojam spektralne emisije moći.
4. Iskažite Stefan-Boltzmannov zakon.

5. Iskažite Wienov zakon.
6. Odredite temperaturu tijela koje ima maksimalan intenzitet zračenja za valne duljine  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .
7. Iskažite Jeans-Rayleighov zakon i u kojem dijelu spektra zračenja se nije slagao s eksperimentalnim činjenicama?
8. Što nazivamo ultraljubičatom katastrofom?
9. Što nazivamo kvantima energije?
10. Iskažite Planckov zakon zračenja. Od koje pretpostavke je Planck pošao u svom izvodu?
11. Koji su zakoni eksperimentalne potvrde valjanosti Planckovog zakona?
12. Izvedite Stefan-Boltzmannov zakon iz Planckovog zakona.
13. Kako možemo dobiti Wienov zakon iz Planckovog zakona.
14. Objasnite pojavu fotoelektričnog učinka.
15. Iskažite Einsteinovu relaciju za fotoelektrični učinak.
16. Iskažite Planck-Einsteinove relacije.
17. Objasnite Comptonov učinak.
18. Izvedite izraz za promjenu valne duljine kod Comptonovog učinka.
19. Objasnite ideju dvojne prirode elektromagnetskog zračenja.

## Poglavlje 8

# STRUKTURA ATOMA

Atom je najmanji dio kemijskog elementa koji izravno određuje njegova svojstva. Današnje je znanje o strukturi atoma takvo da ne postoji problem koji se u svojoj osnovi ne bi mogao riješiti. Kvantno-mehanička slika atoma rezultat je svih dosadašnjih ideja o strukturi atoma. Stoga, ovo poglavlje počinjemo povijesnim spoznajama o strukturi atoma.

### 8.1 Modeli atoma

Ideja atoma, kao tvorevine koju nije moguće dalje dijeliti, pojavila se još u mislima grčkih filozofa prije više od dvije tisuće godina. Otkriće elektrona je pokazalo da je takav elektron sastavni dio materije. No ako je atom sastavni dio materije, pojavljuje se želja da se elektroni ugrade u atome kao njegovi sastavni dijelovi. Atom je tada prestao biti nedjeljiv. Nadalje, kako je cijela materija, pa prema tome i atom, električki neutralna, zaključujemo da se u atomu mora nalaziti, pored elektrona, i jednaka količina pozitivnog elektriciteta.

Prvi model atoma na gornjim pretpostavkama postavio je sam otkrivač elektrona J. J. Thomson.

#### 8.1.1 Model pudinga

J. J. Thomson je 1898. godine pretpostavio da se naboji obaju predznaka nalaze jednoliko raspoređeni po cijelom volumenu atoma. Međutim, kao što je to čest slučaj u fizici, eksperimentalne činjenice su presudile teorijskom modelu. Eksperimenti koje je nakon toga načinio E. Rutherford<sup>1</sup> ukazali su da naboj u atomu ne može biti raspoređen onako kako je pretpostavljeno u Thomsonovom modelu.

#### 8.1.2 Rutherfordov model

Rutherford je promatrao prolazak  $\alpha$ -zraka<sup>2</sup> kroz tanke listiće zlata i drugih kovina. Dobro usmjereni snop  $\alpha$ -zraka raspršuje se o tanki listić zlata debljine nekoliko mikrometara. Eksperiment pokazuje da se najveći broj  $\alpha$ -čestica raspršuje elastično. Rutherford je ustanovio da broj raspršenih čestica jako opada s kutom raspršenja.

Rutherfordov pokus možemo slikovito usporediti s traženjem olovnih kuglica skrivenih u plastu sijena. U plastu sijena, u kojem su olovne kuglice, pucamo nasumce iz puške i promatramo putanju puščanih metaka. Promatrajući raspodjelu odbijenih puščanih metaka, i onih koji su prošli kroz sijeno, dobit ćemo podatke o tome kako su olovne kuglice raspoređene u sijenu i ujedno kakve su te kuglice.

Prvi rezultat Rutherfordova pokusa kaže da većina  $\alpha$ -čestica prolazi kroz listić zlata, a da im se ne promijeni smjer. Prema tome, sadržaj atoma je uglavnom prazan prostor ili prostor u kojem nema čestica

---

<sup>1</sup>Ernest Rutherford, britanski fizičar rođen u Novom Zelandu, 1871. Njegova su istraživanja postavila temelje nuklearnoj fizici. Za radove vezane uz radioaktivni raspad dobio je Nobelovu nagradu za kemiju, 1908. Godine 1919. bombardirajući jezgre dušika  $\alpha$ -česticama izveo je prvu pretvorbu jednog elementa u drugi (dušika u kisik). To je bila prva nuklearna reakcija izvedena u laboratoriju.

<sup>2</sup>Danas bismo rekli da su  $\alpha$ -zrake jezgre helija.

velike mase. S druge strane, da bi opisao eksperiment, Rutherford je uočio da unutar atoma mora postojati centar sile, malih dimenzija, velike mase.

Sve ove činjenice su navele Rutherforda da 1911. godine postavi svoj slavni model planetarnog sustava. On je pretpostavio da se u središtu atoma nalazi jezgra malih dimenzija oko koje kruže elektroni. Ustanovio je da je jezgra čak oko 100000 puta manja od čitavog atoma. Unatoč tome, jezgra nosi cijelu masu atoma. Naboj jezgre je pozitivan, a sila koja drži atom na okupu je elektrostatske prirode. Svojim modelom Rutherford je uspio objasniti pojave opažene pri proučavanju prolaza  $\alpha$ -čestica kroz materiju. Njegov planetarni sustav je bio veliki korak u spoznavanju strukture materije.

Naravno, ostalo je mnogo pitanja na koja Rutherford nije uspio odgovoriti. Na primjer, kako su građene jezgre atoma, zašto elektron koji kruži oko jezgre ne emitira elektromagnetske valove i na taj način zašto se ne približava jezgri atoma. Izlaz iz ovih problema, 1913. godine, dao je danski fizičar Niels Bohr. Međutim, prije nego se upustimo u opis Bohrovog modela atoma, upoznat ćemo se s još nekim eksperimentalnim spoznajama iz kojih je i ponikao Bohrov model.

### 8.1.3 Atomski spektri. Vodikovi nizovi

Spektar elektromagnetskog zračenja što ga emitira kruto tijelo je kontinuirani spektar, tj. spektar se sastoji od zračenja svih frekvencija. Raspored tih frekvencija u spektru dan je Planckovim zakonom koji kaže da je ta raspodjela ovisna samo o temperaturi tijela. Nasuprot tome, pobuđeni plinovi emitiraju samo diskretne, međusobno odvojene linije, koje su karakteristične za svaki element.

Razlikujemo emisijske i apsorpcijske spektre. Dok se kod emisijskih spektara radi o svijetlećim linijama koje emitira užereni plin, kod apsorpcijskih se spektara radi o tamnim linijama u spektru, nastalim kad plin apsorbira zračenje određene frekvencije, odnosno valne duljine. Pusti li se, naime, kontinuirani spektar zračenja kroz hladne pare ili plin, u spektru se opaža niz tamnih linija, i to u točno na onim mjestima u spektru gdje bi se nalazile svijetleće linije emisije. Plin apsorbira zračenje točno one frekvencije koje i sam emitira.

Svakom kemijskom elementu pripadaju posebne, karakteristične spektralne linije. U tim linijama opažamo određene pravilnosti. Naime, spektralne linije svakog elementa dade se klasificirati u nekoliko nizova. Prvi niz je otkrio Balmer 1885. godine promatrajući vodikov spektar. Uočio je da se linije u vodljivom dijelu spektra dade prikazati jednostavnim matematičkim izrazom

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad r = 3, 4, 5, \quad (8.1)$$

gdje je  $R = 109677.58 \text{ cm}^{-1}$  konstanta nazvana Rydbergova konstanta. Izraz 8.1 se može pisati i u sljedećem obliku

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cR \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad r = 3, 4, 5. \quad (8.2)$$

Godine 1908. Paschen<sup>3</sup> je u infracrvenom području našao dva člana novog niza u vodikovu spektru čije su se frekvencije slagale s izrazom

$$\nu = cR \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad r = 4, 5. \quad (8.3)$$

Sljedeći korak je učinio Lyman kad je, 1916, pronašao na suprotnoj, ultraljubičastoj strani spektra niz koji se dao prikazati tzv. Lymanovim izrazom

$$\nu = cR \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad r = 2, 3, 4. \quad (8.4)$$

Kasnije su pronađeni i nizovi s članovima  $1/4^2$  (Brackettov niz) i  $1/5^2$  (Pfundov niz).

Vidimo da se moglo lako zaključiti kako se frekvencija svake linije vodikova spektra dade prikazati kao razlika dvaju članova

$$\nu = cR \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad s = 1, 2, 3, \dots; \quad r = s+1, s+2, s+3, \dots \quad (8.5)$$

<sup>3</sup>Friedrich Paschen (1865-1947), njemački fizičar.

Ovo pravilo, poznato kao Ritzovo pravilo, bit će jedan od temelja na kojima će se izgraditi Bohrov model atoma.

### 8.1.4 Bohrov model

Napredak spoznaja u fizici odvija se u međusobnom međudjelovanju eksperimenata i teorije na način da se nagomilavanjem eksperimentalnih činjenica potiče potreba za novom, sveobuhvatnijom teorijom, koja će objašnjavati i te nove eksperimentalne činjenice i one koje su bile otprije poznate. Pri tome, nova teorija, u pravilu, predviđa i nove, do tada nepoznate pojave. Vrijednost teorije upravo i ovisi o toj moći predviđanja, o tome da li će eksperiment potvrditi postojanje novih pojava koje je teorija predvidjela.

Bohrova teorija atoma, koju ćemo upoznati u ovom odjeljku, upravo je jedna od takvih teorija. S eksperimentalne strane, ona se oslanja na dva izvora informacija: na Rutherfordove eksperimente raspršenja  $\alpha$ -čestica na listićima zlata te na podatke o atomskim spektrima, i posebno, vodikovim nizovima, koje smo upoznali. Na osnovi toga, Bohr je došao do svog povijesnog modela građe atoma.

Rutherfordovi eksperimenti pokazali su da se veći dio mase atoma i čitav pozitivni naboj nalaze u malom, središnjem dijelu atoma, njegovoj jezgri. Za naboj jezgre pokazao je 1913. godine Moseley<sup>4</sup> da je jednak  $Ze$ , gdje je  $Z$  redni broj elementa u periodnom sustavu, a  $e$  iznos naboja elektrona. Taj naboj djeluje Coulombovom silom na elektron koji se giba oko jezgre

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}, \quad (8.6)$$

gdje je  $\hat{r}$  jedinični vektor orijentacije prema elektronu. Elektron koji kruži mora emitirati elektromagnetsko zračenje, a izračena energija može doći samo na račun smanjenja potencijalne energije elektrona u polju jezgre naboja  $Ze$

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \quad (8.7)$$

što znači smanjenje polumjera  $r$ , odnosno padanje elektrona u jezgru kroz veoma kratko vrijeme. A ipak, takvo nešto se nije događalo. Izlaz iz ove situacije našao je Bohr<sup>5</sup> 1913. godine genijalnom idejom o kvantizaciji atoma. Kao osnovu svoje teorije atoma postavio je dva postulata:

1. Elektroni se oko jezgre atoma kreću samo u strogo određenim putanjama.
2. Prijelaz iz jedne putanje u drugu moguć je samo kvantnim skokovima. Pri prijelazu iz jedne putanje u drugu elektroni emitiraju ili apsorbiraju kvant elektromagnetskog zračenja čija je energija jednaka razlici energija elektrona u tim dvjema putanjama.

#### Posljedice prvog Bohrovog postulata

Staze elektrona u atomu moraju zadovoljavati Bohrov kvantni uvjet kako bi im moment količine gibanja bio jednak samo cjelobrojnom višekratniku Planckove konstante  $h$  podijeljene s  $2\pi$

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.8)$$

gdje je  $v$  brzina kruženja elektrona u atomu. Polumjer dozvoljene  $n$ -te staze dobije se iz kvantnog uvjeta i jednadžbe gibanja elektrona

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (8.9)$$

odnosno

$$r_n = \frac{\epsilon_0}{Ze^2 m_e \pi} n^2 h^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

<sup>4</sup>Henry Gwyn-Jeffreys Moseley (1887-1915), engleski fizičar, poznat po istraživanjima svojstava rendgenskog zračenja. Poginuo u prvom svjetskom ratu.

<sup>5</sup>Niels Bohr (1885-1962), danski fizičar. Dobio je Nobelovu nagradu za fiziku 1922. godine.

Na osnovi toga lako je dobiti i brzinu elektrona u  $n$ -toj putanji

$$v_n = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{nh}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.11)$$

kao i ukupnu energiju elektrona

$$E_n = -\frac{1}{8\varepsilon_0^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{n^2 h^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.12)$$

Uvodeći tzv. reduciranu Planckovu konstantu

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (8.13)$$

izraze za radijus  $n$ -te putanje, brzinu i ukupnu energiju elektrona u toj putanji možemo pisati u oblicima koji se najčešće nalaze u literaturama

$$\begin{aligned} r_n &= 4\pi\varepsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{Ze^2 m_e}, \\ v_n &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{n\hbar}, \\ E_n &= -\frac{1}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{n^2 \hbar^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.14)$$

Redni broj  $n$  koji određuje energiju i polumjer putanje oko jezgre, naziva se glavni kvantni broj. Svakoj putanji pripada dakle i energija određena tim glavnim kvantnim brojem. Svi elektroni koji se nalaze u toj putanji imaju istu vrijednost energije. Rekli bismo da tvore energijsku ljusku. Poslije ćemo vidjeti da putanje elektrona predstavljaju samo sliku za kvantna stanja. Stanje najniže energije atoma se naziva osnovno stanje, a sva ostala stanje su pobuđena stanja.

### Posljedice drugog Bohrovog postulata

Drugi Bohrov postulat povezuje građu atoma i elektromagnetsko zračenje koje atom emitira. Postulat kaže da elektroni mogu preskakati iz jednog energijskog stanja u drugo. Pri tim prijelazima atom emitira ili apsorbira energiju u obliku kvanta elektromagnetskog zračenja, čija je energija jednaka razlici energija dvaju stanja

$$h\nu = E_r - E_s = \frac{1}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{\hbar^2} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (8.15)$$

Kvantni skok s energijski višeg stanja u niže stanje znači emisiju elektromagnetskog zračenja, a obratno apsorpciju. Možemo se uvjeriti da je faktor ispred zagrade povezan s Rydbergovom konstantom

$$\frac{1}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{\hbar^2} = Z^2 hcR. \quad (8.16)$$

Za atom vodika vrijedi  $Z = 1$ . Bohrovim modelom je stvorena suvremena atomska fizika. Naravno, kao što ćemo vidjeti, jednostavnost atoma Bohrovim modelom moramo shvatiti samo kao jednu sliku stvarne realnosti atoma.

Bohrova teorija se dala uspješno primijeniti na spektre atoma te mnoge druge eksperimente vezane uz  $X$ -zračenje. Međutim, za potvrdu ispravnosti jedne fizikalne teorije nije dovoljno da ta teorija objašnjava do tada postojeće činjenice, već mora predvidjeti nove pojave. Tek je eksperimentalno otkriće takvih novih pojava potpuna provjera jedne teorije. Za Bohrovu teoriju atoma to je bio povijesni Franck-Hertzov pokus.

### 8.1.5 Franck-Hertzov pokus neelastičnog raspršenja elektrona

Franck i Hertz<sup>6</sup> su svoj eksperiment izveli promatrajući raspršenje dobro usmjerenog snopa elektrona na živinim parama pri niskom tlaku. Prvo pobuđeno stanje u atomima žive nalazi se, prema Bohrovim računima, na 4.83 eV iznad osnovnog stanja. Postupno povećavajući energiju upadnog elektronskog snopa, Franck i Hertz su u spektroskopu promatrali spektralne linije nastale sudarom elektrona sa živinim parama. Za energije elektrona manje od 4.86 eV živina para nije zračila elektromagnetske valove. No, čim je energija porasla preko te vrijednosti, živa je zračila u području karakteristične linije valne duljine  $\lambda = 256$  nm. Ta je linija nastala tako da su elektroni iz snopa pobudili atome žive u prvo pobuđeno stanje. Povratkom na osnovno stanje, atomi su dobivenu energiju emitirali kao kvant elektromagnetskog zračenja. Kad se energija elektrona povećala još više, pojavile su se i druge karakteristične linije. Tako su Franck i Hertz uspjeli proizvesti složeni spektar žive.

Taj i slični eksperimenti su pokazali realnost postojanja diskretnih energijskih razina u atomu. Postojanje energijskih razina čini stvarnu bit kvantnog opisa atoma, i to je ono što i danas prihvaćamo od Bohrovog modela. Bohr je tako uspio Planckovu diskontinuitetnost emisije energije prebaciti u sam izvor zračenja, u atom.

## 8.2 Kvantni brojevi

Vidjeli smo da je u Bohrovom modelu energija kvantnog stanja u potpunosti određena kvantnim brojem  $n$ , nazvanim glavni kvantni broj. Uskoro se pokazalo da taj izraz nije dovoljan da bi objasnio nove eksperimentalne podatke, u prvom redu emisiju atoma u jakom električnom polju. Još 1913. godine Stark<sup>7</sup> je opazio da se linije Balmerovog niza u vodikovu spektru cijepaju svaka u više linija ako se atomi vodika nalaze u jakom električnom polju. Broj komponenti na koje se cijepa svaka linija ovisi o rednom broju linije, odnosno o glavnom kvantnom broju, a njihov razmak o jakosti električnog polja.

### 8.2.1 Kvantizacija momenta količine gibanja

Da bi objasnio rezultate Starkovog eksperimenta, tzv. Starkov učinak, Sommerfeld<sup>8</sup> je 1917. godine uveo kvantizaciju momenta količine gibanja u atomu. primjenjujući analogiju s eliptičnim putanjama planeta oko Sunca, tj. uzimajući valjanost Keplerovih zakona za atom uz prvi Bohrov postulat, Sommerfeld dolazi do vrijednosti za novi, kvantni broj količine gibanja  $l$

$$l = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (8.17)$$

Unatoč ovim uspjesima, Bohrovog i Sommerfeldovog modela atoma, trebamo držati na umu da su to samo slike za zorno predočenje atoma. Te slike odgovaraju klasičnim predodžbama o atomu. Poslije ćemo vidjeti da kvantni broj momenta količine gibanja poprma nešto drugačije vrijednosti nego je predstavljeno u izrazu 8.17.

U sljedećem ćemo poglavlju uvesti još dva kvantna broja, koji su također posljedica iskustva.

### 8.2.2 Magnetski kvantni broj

Djelovanje električnog polja na vodikove atome upozorilo je na uvođenje kvantnog broja momenta količine gibanja. Međutim, pokazalo se da i magnetsko polje, slično kao i električno, djeluje na spektralne linije. To je dovelo do zahtjeva uvođenja novog kvantnog broja.

Još 1896. godine Zeeman<sup>9</sup> je promatrao spektralne linije svjetlosti koju emitiraju atomi u jakom homogenom magnetskom polju. Eksperiment se može objasniti ako se pretpostavi da je i projekcija momenta količine gibanja kvantizirana veličina. Stoga se uvodi tzv. magnetski kvantni broj  $m$

$$m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l. \quad (8.18)$$

<sup>6</sup> James Franck (1882-1964), njemački fizičar. Zajedno sa svojim suradnikom Gustavom Hertzom (1887-1975), dobio Nobelovu nagradu za fiziku 1925. godine.

<sup>7</sup> Johannes Stark (1874-1957), njemački fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1919. godine.

<sup>8</sup> Arnold Sommerfeld (1868-1951), njemački fizičar.

<sup>9</sup> Pieter Zeeman (1865-1943), nizozemski fizičar. Dobitnik Nobelove nagrade 1902. godine.

Zeemanov eksperiment, iako snažan doprinos ideji o kvantizaciji momenta količine gibanja, nije bio odlučan eksperiment u potvrdi te ideje. Takav eksperiment izvršili su nešto kasnije Stern i Gerlach<sup>10</sup>.

### 8.2.3 Eksperiment Sterna i Gerlacha. Spin elektrona.

Zeemanov eksperiment s homogenim magnetskim poljem se mogao tumačiti i klasičnom teorijom, pa su Stern i Gerlach uveli nehomogeno magnetsko polje u izučavanju magnetskog momenta atoma. Oni su puštali dobro usmjereni snop atoma srebra kroz nehomogeno magnetsko polje. Eksperiment je pokazao da se takav snop atoma razdvajao u točno dvije linije. Najčudnije je bilo to što je magnetski moment srebra po tom eksperimentu uzimao vrijednosti od  $\hbar/2$ .

Da bi objasnili rezultate ovog eksperimenta, Goudsmit i Uhlenbeck su 1927. godine uveli pojam vlastitog momenta količine gibanja elektrona, kratko nazvanog spin<sup>11</sup>. Oni su pretpostavili da dodatni moment količine gibanja dolazi od vrtnje elektrona oko svoje osi i iznosi  $\hbar/2$  i može poprimiti samo dvije projekcije.

Uvođenjem spina, tj. rotacije elektrona oko vlastite osi, analogija sustava elektrona i jezgre s planetarnim sustavom postaje potpuna. Ipak, podrobnija razmatranja pokazuju da je povezivanje spina elektrona s vrtnjom samo zgodna slika koja ne odgovara stvarnosti. Dirac<sup>12</sup> je 1928. godine pokazao da spinski moment prirodno proistječe iz relativističke teorije elektrona. Spin je dakle relativistička posljedica. Njegovo povezivanje s rotacijom ima samo povijesno i didaktičko značenje.

## 8.3 Paulijev princip i objašnjenje periodičnog sustava elemenata

Vidjeli smo da su za opis kvantnog stanja atoma potrebna četiri kvantna broja,  $n$ ,  $l$ ,  $m$  i  $m_s$ . Sva četiri broja su uvedena da bi se objasnile eksperimentalne činjenice.

Bohrov model uvodi glavni kvantni broj koji uzima vrijednosti

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.19)$$

Taj kvantni broj određuje energijske ljuske nazvane K, L, M, N, ...

Sommerfeldov eliptični model uvodi kvantni broj momenta količine gibanja  $l$  koji poprima vrijednosti

$$l = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (8.20)$$

tj. ukupno  $n$  vrijednosti. Često se kaže da ovaj kvantni broj određuje podljuske,  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $f$ , ...

Magnetski kvantni broj  $m$  određuje orijentaciju momenta količine gibanja i poprima vrijednosti

$$m = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l, \quad (8.21)$$

tj. ukupno  $2l + 1$  vrijednosti.

Kvantni broj projekcije spinskog momenta količine gibanja  $m_s$  poprima vrijednosti

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \quad (8.22)$$

tj. ukupno dvije vrijednosti.

Kvantnim brojevima  $n$ ,  $l$ ,  $m$  i  $m_s$  određeno je u potpunosti stanje elektrona u atomu.

Ključno pitanje teorije koja objašnjava građu atoma je slijed punjenja elektronskih ljusaka elektronima. U svom osnovnom stanju svaki se sustav u prirodi nalazi u najnižem mogućem energijskom stanju. Za atome to je stanje u kojem bi se svi elektroni nalazili u energijskoj ljusci s glavnim kvantnim brojem  $n = 1$ . Međutim, iz iskustva znamo da se elektroni u težim elementima nalaze u stanjima s višim vrijednostima glavnog kvantnog broja. Postavlja se pitanje što sprečava elektrone da svi zauzmu najnižu energijsku ljusku.

<sup>10</sup>Otto Stern (1888-1969) i Walter Gerlach (1889-1976), njemački fizičari. Nobelovu nagradu za fiziku dobili su 1933. godine.

<sup>11</sup>Od engleskog "to spin", što znači vrtjeti se.

<sup>12</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), engleski fizičar. Nobelovu nagradu za fiziku dobio je 1933. godine.

Odgovor na to daje princip isključenja koji je 1925. godine postavio Pauli<sup>13</sup>. Paulijev princip isključenja glasi: *U jednom kvantnom stanju, određen skupom kvantnih brojeva, može se nalaziti najviše jedan elektron.*

Osnova objašnjenja periodičnog sustava elemenata su spomenuti kvantni brojevi i Paulijev princip isključenja koji daje ključ za poredak kojim se pune elektronske ljuske u atomu. Jezgra atoma nosi pozitivan naboj koji je jednak po iznosu ukupnom naboju elektrona. Pomicanjem po tablici periodnog sustava za jedno mjesto udesno povećava se naboj jezgre, a time i broj elektrona. Vanjski elektroni nositelji su njegovih kemijskih svojstava. Prema tome, očekujemo da će objašnjenje periodičnog sustava biti tijesno vezano uz poredak elektrona u atomima. U prvoj energijskoj ljusci ( $n = 1$ ) mogu biti najviše dva elektrona. Treći elektron mora ići u drugu energijsku ljusku. U drugu energijsku ljusku možemo smjestiti najviše osam elektrona i tako redom. U  $n$ -tu ljusku možemo smjestiti najviše  $2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2$  elektrona.

Za potpuno objašnjenje prirode atoma potrebno je upoznati kvantno-mehanička svojstva atoma.

### Pitanja za vježbu

1. S kojim je otkrićem atom kao cijelina prestao biti nedjeljiv?
2. Objasnite ideju o strukturi atoma koju je dao J. J. Thomson.
3. Objasnite eksperiment kojim je E. Rutherford dobio svoju ideju o strukturi atoma?
4. Objasnite sliku atoma koju je dao E. Rutherford.
5. Koji su problemi ostali neriješeni uzimajući Rutherfordovu sliku atoma?
6. Objasnite Balmerov niz spektra atoma vodika.
7. Objasnite Paschenov niz spektra atoma vodika.
8. Objasnite Lymanov niz spektra atoma vodika.
9. Iskažite ideju Ritzovog pravila.
10. Objasnite Bohrovu ideju o slici atoma.
11. Koja je posljedica prvog Bohrovog postulata?
12. Objasnite ideju glavnog kvantnog broja.
13. Objasnite posljedicu drugog Bohrovog postulata.
14. Objasnite Franck-Hertzov pokus. Koju činjenicu je pokazao taj eksperiment?
15. Objasnite ukratko spoznaju kroz Starkov eksperiment.
16. Koje vrijednosti, po Sommerfeldu, uzima kvantni broj količine gibanja? Koje stvarne vrijednosti uzima taj kvantni broj?
17. Ukratko objasnite Zeemanov eksperiment i njegovu spoznaju o magnetskom kvantnom broju.
18. Objasnite eksperiment Sterna i Gerlacha. Pojam spina.
19. Iskažite Paulijev princip isključenja.
20. Objasnite periodičnost sustava kemijskih elemenata.

---

<sup>13</sup>Wolfgang Pauli (1900-1958), švicarski fizičar. Nobelovu nagradu za fiziku dobio je 1945. godine.

## Poglavlje 9

# VALOVI MATERIJE

### 9.1 Dvojna priroda materije

Hipoteza o kvantima svjetlosti koju je Einstein uveo 1905. godine unijela je u fiziku ideju o dvojnoj prirodi svjetlosti i elektromagnetskog zračenja uopće. Dvadeset godina kasnije, 1924. godine, Louis de Broglie<sup>1</sup> prenio je dvojnost i na materiju. Analogno Einsteinovoj relaciji za količinu gibanja kvanta svjetlosti

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

de Broglie pretpostavlja da je svakom elektronu (i drugim česticama) pridruženo valno gibanje valne duljine

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (9.1)$$

De Broglie je, dakle, pretpostavio da i materija ima valna svojstva, čime je na jednostavan način uspio objasniti Bohrove kvantne postulate. Naime, Bohrova kvantizacija momenta količine gibanja se dobije zahtjevom da su u atomu moguće samo one putanje čija je ukupna duljina jednaka cijelom broju valnih duljina. Sve ostale staze se poništavaju interferencijom. Moguća je dakle ona putanja kod koje vrijedi

$$n\lambda = 2\pi r, \quad (9.2)$$

gdje je  $r$  polumjer putanje elektrona, a  $n = 1, 2, \dots$ . Koristeći de Broglievu relaciju  $\lambda = h/p$ , lako se dobije Bohrova kvantizacija momenta količine gibanja  $L = n\hbar$ .

De Broglieovo objašnjenje prvog Bohrovog postulata zasniva se na hipotezi o pridruženim valovima materije. De Broglie je, dakle, jednu hipotezu zamjenio drugom. Međutim, nova je hipoteza bila prirodno i simetrično proširenje postojeće ideje o dvojnosti elektromagnetskog zračenja. Ono što je najvažnije, de Broglieova hipoteza je, uskoro, dobila i eksperimentalnu potvrdu.

### 9.2 Ogib elektrona

Eksperimentalni dokaz da materija ima i valna svojstva dali su 1927. godine Davisson i Germer svojim znamenitim pokusom o ogibu elektrona. Oni su dobro usmjerene snopove elektrona velikih brzina usmjerili na kristale nikla. Ovim eksperimentom (a istodobno i eksperimentom G. P. Thomsona<sup>2</sup>) se utvrdilo postojanje ogibne slike elektrona pri refleksiji na kristalima nikla. To je bila nedvojbeno posljedica valne prirode elektrona.

Možemo postaviti pitanje što je to što titra u materiji. Da li su to nekakvi stvarni valovi. Odgovor bi bio da de Broglievi valovi materije opisuju vjerojatnost da se čestice nalaze u danoj točki prostora u danom trenutku. To su vjerojatnosni valovi koji se ponašaju u formalnom smislu kao i svi drugi valovi.

<sup>1</sup>Louis de je prenio Broglie (1892), francuski fizičar. Dobio Nobelovu nagradu 1929. godine.

<sup>2</sup>Svi su dobili Nobelovu nagradu za fiziku 1937. godine.

## 9.3 Posljedice dvojne prirode materije

### 9.3.1 Neodređenost položaja i količine gibanja

Iskustvo nam kazuje da je, u prirodi koja nas okružuje, nekoj čestici u gibanju moguće odrediti istodobno točno i njezin položaj i brzinu, odnosno količinu gibanja. Tu je premisu prihvatila klasična fizika u svojoj slici svijeta. S druge strane, vidimo da se čestice ponašaju i kao valovi, a valovima nije moguće točno odrediti položaj u prostoru. Suočeni s problemom jer je lokalizacija po čestičnoj slici moguća, a po valnoj nemoguća, reći ćemo da je ponašanje neke čestice određeno mješavinom više valova bliske frekvencije, tzv. valnim paketom. Kod jednog valnog paketa neodređenost je i u valnim duljinama i u prostoru koji zauzima, a to znači i u količini gibanja i u položaju. Pokazuje se da je ta neodređenost povezana izrazom poznatim pod imenom Heisenbergova<sup>3</sup> relacija neodređenosti

$$\Delta p_x \Delta x \geq h. \quad (9.3)$$

Ta relacija iskazuje činjenicu da nije moguće s proizvoljnom točnošću istodobno odrediti i položaj i odgovarajuću komponentu količine gibanja. Slične relacije postoje i za druge parove fizikalnih veličina.

Analogija između svjetlosti i materije, dualizam koji je temelj našeg shvaćanja atomskog i subatomskog svijeta, ostaje, zapanjujući aspekt prirode. Svjetlo se ponaša kao val i kao čestica. Materija se također ponaša kao val i kao čestica. Obje te pojave su danas temeljito eksperimentalno dokazane pa čak su i predmet tehnološke primjene.

### 9.3.2 Valna funkcija i vjerojatnost

Svaki val možemo opisivati nekom valnom funkcijom  $\psi(\vec{r}, t)$ . Kod valova materije kvadrat valne funkcije određene čestice označava vjerojatnost  $dw$  nalaženja te čestice u jedinici volumena  $dV$  oko točke  $\vec{r}$ .

$$dw = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV. \quad (9.4)$$

Valna funkcija ima fundamentalnu ulogu. Njeno poznavanje je dovoljno da se nađu sva fizikalna svojstva sustava koji se promatra.

Jednadžba iz koje se u nerelativističkoj fizici određuje valna funkcija ima sljedeći izgled

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t), \quad (9.5)$$

gdje  $V(\vec{r})$  označava potencijalnu energiju čestice koju promatramo, a  $m$  njenu masu.  $E$  je ukupna energija čestice. Gornji izraz predstavlja, u biti, zakon očuvanja energije uz korištenje de Broglievih relacija i naziva se Schroedingerova jednadžba.

#### Pitanja za vježbu

1. U čemu se sastoji de Broglieva hipoteza?
2. Zašto je de Broglieva hipoteza prirodnija od prvog Bohrovog postulata? Objasnite.
3. Objasnite znameniti eksperiment ogiba elektrona.
4. Koje su posljedice dvojne prirode materije?
5. Koja je razlika valnog paketa od vala određene frekvencije?
6. Objasnite Heisenbergove relacije neodređenosti.
7. Objasnite ulogu valne funkcije valova materije.
8. Iskažite Schroedingerovu jednadžbu.

---

<sup>3</sup>Werner Heisenberg (1901-1976), njemački fizičar. Godine 1932. godine dobio Nobelovu nagradu za fiziku.

## Poglavlje 10

# ATOMSKA JEZGRA

### 10.1 Građa atomske jezgre

Saznali smo da su atomi složene tvorevine. U središtu atoma nalazi se sićušna, ali masivna jezgra, nositelj pozitivnog električnog naboja i gotovo cjelokupne mase atoma. Kemijska i fizikalna svojstva materijala koje susrećemo u svakidašnjem životu, posljedica su procesa koji se odvijaju u elektronskom omotaču, i to zapravo u njegovom vanjskom dijelu. Takvi procesi uglavnom ne diraju unutrašnje elektrone, a pogotovo ne atomsku jezgru. Stoga, za proučavanje svojstava jezgre moramo pronalaziti nove metode u odnosu na one koje su primjenjivane kod istraživanja svojstava atoma.

Vrlo rano se pretpostavilo da je jezgra, također, složena od jednostavnijih čestica. Godine 1919. isti fizičar koji je otkrio jezgru, Rutherford, prvi ju je uspio i razbiti. On i Chadwick su otkrili da iz nekih pogođenih jezgri dušika s brzima  $\alpha$ -česticama, izlaze jezgre vodika, tj. protoni. Bilo je jasno da je proton jedan od sastojaka atomskih jezgri. U to vrijeme se vrlo brzo zaključilo da i pored protona u jezgri moraju postojati i neke druge čestice. Heisenberg je pretpostavio da se u jezgri moraju nalaziti neutralne čestice mase slične masi protona. Nešto poslije Chadwick<sup>1</sup>, zajedno s Irene Curie i Frederick Joliotom, otkrio je do tada nepoznatu česticu, neutron. Svi procesi do tog vremena su govorili da se atom sastoji od protona, neutrona te elektrona oko jezgre. Najjednostavnija jezgra je jezgra vodika sastavljena samo od jednog protona. Sljedeća je jezgra helija sa dva protona i dva neutrona.

Vrlo često se uvodi maseni broj jezgre koji je jednak zbroju protona i neutrona u jezgri. Vrlo brzo je otkriveno da mogu postojati atomi nekog elementa različite mase. Zaključeno je da se u tim jezgrama nalazi različiti broj neutrona, a broj protona ostaje isti. Takvi atomi su nazvani izotopi nekog elementa.

Na temelju poznavanja građe atoma osniva se suvremeni način bilježenja atomskih vrsta ili nuklida, kako se još zovu. Tako simbol  $^{14}\text{N}$  označava jezgru izotopa dušika masenog broja 14, tj. sastavljenu od 7 protona i 7 neutrona. Kemijski simbol daje njegov redni broj (broj protona), a broj lijevo gore njegov maseni broj, tj. zbroj protona i neutrona.

#### 10.1.1 Struktura atomske jezgre. Model ljuske

Možemo postavljati pitanje kako su nukleoni (zajedničko ime za protone i neutrone) poredani u atomskoj jezgri. Iako nam detalji o strukturi atomske jezgre nisu ni danas sasvim poznati, ovdje ćemo dati neka osnovna saznanja. Osnovna hipoteza o poretku nukleona u jezgri je tzv. model ljusaka koji je prenesen iz atomske fizike. Po tom su modelu protoni i neutroni poredani u jezgri po nakupinama sličnim elektronskim ljuskama. Jezgre s popunjenim ljuskama nazivamo magičnim jezgrama (slično plemenitim plinovima kod atoma). Postojanje takvih jezgri je bio prvi pokazatelj o postojanju energijskih ljuski u jezgrama. Magične jezgre su npr.  $^4\text{He}$  ( $Z=2$ ,  $N=2$ ),  $^{16}\text{O}$  ( $Z=8$ ,  $N=8$ ),  $^{40}\text{Ca}$  ( $Z=20$ ,  $N=20$ ),  $^{48}\text{Ca}$  ( $Z=20$ ,  $N=28$ ). Ostali magični brojevi su 28, 50, 82 za protone i neutrone, te 126 za neutrone.

Model ljusaka dobro objašnjava strukturu lakih jezgara, a iz skupa težih objašnjava samo one čiju su brojevi protona i neutrona blizu magičnih brojeva. Kod ostalih jezgri prevladavaju tzv. skupna svojstva. Ta svojstva dolaze od zajedničkog gibanja velikog broja nukleona u jezgri, pa su, barem na prvi pogled, suprotna

<sup>1</sup>James Chadwick (1891-1974), engleski fizičar. Dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1935. godine.

predviđanjima modela ljusaka. Prema modelu ljusaka svaki nukleon u jezgri giba se po određenim orbitalama. Jezgre koje pokazuju skupna svojstva, u pravilu odstupaju od kuglastog oblika koje je karakteristično za magične jezgre. Takve jezgre često su vrlo izdužene ili spljoštene u obliku palačinke. Pokazuje se da se skupna svojstva koja pokazuju neke jezgre mogu izvesti iz ljuskaste strukture.

## 10.2 Radioaktivnost

Ako bismo pošli od sadašnjeg znanja o atomskoj jezgri, lako bi nam bilo objasniti pojave nestabilnosti u atomskoj jezgri, koje jednim imenom zovemo radioaktivnost. Povijesni razvoj, međutim, tekao je drukčije. Godine 1896. francuski fizičar Becquerel otkrio je čudnu i na prvi pogled neobjašnjivu pojavu. Naime, uranova ruda, uranov oksid, postavljena u blizini fotografske ploče uzrokuje njihovo zacrnenje kao da ih je obasjala svjetlost. Ako bi te ploče umotao u crni papir i aluminijske folije one bi se i dalje zacrnjivale. Tek kad bi ploče oklopio debelim slojem olova ne bi bilo zacrnenja. Očito da uranova ruda zrači. No kakve je prirode to zračenje, nije bilo jasno. Mlada fizičarka Marija Sklodowska-Curie i njen suprug Pierre Curie ustanovili su da su takva zračenja svojstva urana i ne ovise o vanjskom utjecaju. Tragajući za novim izvorima radioaktivnosti, Marija je opazila da iz nekih minerala izlazi mnogo jače zračenje nego što to odgovara sadržaju urana. Zaključila je da u tim rudačama mora postojati novi nepoznati radioaktivni element. Novi element su nazvali radij. Aktivnost radija bila je tri milijuna puta jača od iste količine urana. Nešto kasnije je otkriven novi element, polonij, tako nazvan po Marijinoj domovini. Ovim otkrićima počela je nova epoha u povijesti fizike i kemije. Rodila se nova disciplina, nuklearna fizika, koja ni do danas nije sišla s pozornice najzbudljivijih događaja u znanosti.

### 10.2.1 Priroda radioaktivnog zračenja

Novo zračenje pokazuje svojstvo prolaza kroz debele slojeve materijala, sposobnost ioniziranja plinova, čime je jasno da se radi o zračenju visoke energije. Jedna komponenta koja je jako ionizirala zrak, savijala se u magnetskom polju i slabo prolazila kroz tanke listiće, nazvana je  $\alpha$ -zračenje. Druga komponenta, također električki nabijena, slabije je ionizirala plinove, ali lakše prolazila kroz tanke listiće metala, nazvana je  $\beta$ -zračenjem. Za treće zračenje je utvrđeno da se radi o elektromagnetskom zračenju nezamislivo malih valnih duljina i visoke frekvencije. Za  $\beta$ -zračenje je utvrđeno da se radi o sličnim ili istim česticama kao i elektronima, ali do tada nezamislivo velikih brzina. Za  $\alpha$ -zračenje je utvrđeno da se radi o jezgrama atoma helija.

Proučavajući raspade, Rutherford i Soddy su 1902. godine utvrdili da se  $\alpha$ -raspadom maseni broj radioaktivnog elementa umanjuje za 4, a njegov redni broj za 2 ( $A \rightarrow A - 4; Z \rightarrow Z - 2$ ).  $\beta$ -raspadom ne mijenja se maseni broj radioaktivnog elementa već se njegov redni broj povećava za 1 ( $A \rightarrow A; Z \rightarrow Z + 1$ )<sup>2</sup>.  $\gamma$ -raspadom ne mijenja se ni maseni broj ni redni broj radioaktivnog elementa ( $A \rightarrow A; Z \rightarrow Z$ ). Ovaj raspad se događa kad se jezgra ne nalazi u energijski najpovoljnijem stanju.

### 10.2.2 Vremenski zakoni radioaktivnog raspada

Radioaktivni raspad elemenata je spontani raspad jedne jezgre u drugu. Zakon po kojem se raspad odvija u vremenu se može izvesti na osnovi pretpostavke da je vjerojatnost raspada u vremenu  $\lambda$  ista za svaku jezgru istog skupa te da je vjerojatnost neovisna o starosti pojedine jezgre.

Broj jezgri koje će se raspasti u jedinici vremena dan je izrazom

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (10.1)$$

Znak minusa dolazi zbog smanjenja broja radioaktivnih elemenata. Odavde je lako izraziti broj jezgri koje se još nisu raspale nakon proteklog vremena  $t$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.2)$$

<sup>2</sup>Ovdje treba napomenuti da danas znamo da postoji i tzv.  $\beta^-$  i  $\beta^+$ -raspad. Gore spomenuti raspad bi bio  $\beta^-$ -raspad koji se događa kod prirodnih elemenata.

gdje je  $N_0$  broj jezgri u početnom trenutku. Veličina  $\lambda$  se naziva i konstanta radioaktivnog raspada.

Odredimo vrijeme potrebno da se polovica jezgri nekog uzorka raspadne. To vrijeme  $T_{1/2}$ , nazvano vrijeme poluraspada, dobivamo iz gornjeg izraza

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \quad (10.3)$$

odnosno za vrijeme poluraspada

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (10.4)$$

Vremena poluraspada različitih radioaktivnih elemenata variraju od dijelića sekundi do više milijardi godina.

Aktivnost radioaktivnog uzorka se definira kao

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (10.5)$$

koja se, također, eksponencijalno umanjuje s vremenom

$$A = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.6)$$

gdje je  $A_0$  početna aktivnost uzorka. Jedinica za aktivnost uzorka je becquerel (znak Bq = s<sup>-1</sup>), a odgovara jednom raspadu u sekundi.

### 10.3 Međudjelovanje radioaktivnog zračenja s materijom

Jedno od svojstava zračenja iz radioaktivnih materijala je da ioniziraju sredinu kroz koju prolaze gubeći time svoju energiju. Mehanizam predaje energije sredstvu kroz koje prolaze razlikuje se od jedne vrste zračenja do druge. Glavni način predaje energije kod brzih nabijenih čestica neposredna je ionizacija sredstva. Nabijene se čestice prolazom kroz materiju usporavaju tako da ioniziraju atome i molekule sredstva. Gubitak energije ionizacijom to je brži što su veća masa i naboj čestice odgovarajućeg zračenja. To znači da  $\alpha$ -čestice gube energiju mnogo brže nego elektron.

Međudjelovanje rendgenskog i  $\gamma$ -zračenja, odnosno općenito elektromagnetskog zračenja, s materijom se odvija kroz tri glavna procesa. Pri tzv. Comptonovom učinku gubitak energije zračenja odvija se neposrednim sudarom fotona s elektronima, pri čemu foton preda dio svoje energije elektronu. Kod elektromagnetskog zračenja niže energije važan je i fotoelektrični učinak pri kojem foton svu svoju energiju preda elektronu. Kod  $\gamma$ -zračenja visoke energije prevladava tzv. tvorba parova pri kojem se foton pretvori u par čestica-antičestica, npr. elektron-pozitron. Koji će od tri procesa prevladati ovisi i o energiju upadnog zračenja i o sredstvu kroz koji zračenje prolazi.

Neutroni ne ioniziraju materiju neposrednim djelovanjem, nego tek sudarima s jezgrama.

#### 10.3.1 Zaštita od zračenja

Želimo li prostor ili ljude zaštititi od djelovanja ionizirajućeg zračenja, moramo ih ili udaljiti od izvora ili od njega odvojiti nekom pregradom. Mehanizam međudjelovanja zračenja s materijom uvjetuje da i način zaštite bude različit. Za nabijene čestice moguće je definirati duljinu pri kojoj se u potpunosti zaustavljaju u nekom sredstvu. Sasvim je druga situacija pri zaštiti od elektromagnetskog zračenja i neutrona. Snop električki neutralnog zračenja nije moguće u potpunosti zaustaviti debljinom nekog sredstva jer se proces međudjelovanja odvija probabilistički. Upadni snop takvih zračenja  $N_0$  opadati će, stoga, eksponencijalno po zakonu

$$N = N_0 e^{-\mu x}, \quad (10.7)$$

gdje je  $\mu$  linearni koeficijent atenuacije.

### 10.3.2 Doza zračenja

Rekli smo da ionizirajuće zračenje prolaskom kroz materiju ostavlja energiju. U živom tkivu te se promjene posebno očituju kao biološka oštećenja. Biološka oštećenja uzrokovana dugotrajnim izlaganjem ionizirajućem zračenju mogu biti smrtonosna ili uzrokovati teška oboljenja. Da bismo djelovanje zračenja na materiju, osobito na žive organizme, kvantitativno izrazili uvodimo dvije srodne fizikalne veličine, apsorbiranu dozu zračenja i ekspoziciju.

Do pojma apsorbirane doze zračenja dolazimo ako promatramo ukupnu energiju koju je zračenje ostavilo u materiji kojom je prošlo. Neka je zračenje prolazom kroz volumen materije  $\Delta V$ , čija je masa  $\Delta m$ , predalo tom volumenu materije energiju  $\Delta E$ . Tada apsorbiranu dozu zračenja nazivamo omjer

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m}. \quad (10.8)$$

Mjerna jedinica je J/kg, nazvana gray, Gy.

Ekspoziciju  $X$  definiramo kao omjer ukupnog naboja  $\Delta Q$  koji je ionizirajuće zračenje stvorilo u sredstvu mase  $\Delta m$

$$X = \frac{\Delta Q}{\Delta m}. \quad (10.9)$$

### 10.3.3 Biološko djelovanje zračenja

Biološko djelovanje ovisi prije svega o apsorbiranoj dozi, ali i ne samo o njoj. Pojedine vrste zračenja imaju, uz istu dozu, različito biološko djelovanje. Na primjer, neutroni imaju deset puta veće biološko djelovanje na čovjeka i životinje nego  $\gamma$ -zračenje. Na primjer, doza zračenja od 1 Gy  $\gamma$ -zračenjem na čovjeka dovodi do oštećenja kože, ali su šanse da preživi visoke. S druge strane, zračenje neutronima od 1 Gy dovodi najčešće do smrti. To biološko djelovanje zračenja izražavamo tzv. ekvivalentnom dozom  $H$ , koju definiramo na sljedeći način

$$H = DQ, \quad (10.10)$$

gdje je  $D$  apsorbirana doza, a  $Q$  tzv. faktor kvalitete. Tak faktor iskazuje štetnost pojedine vrste zračenja. Za brze neutrone,  $Q$  iznosi oko 15, a za  $\gamma$ -zračenje oko 1. Faktor kvalitete ovisi i o primljenoj dozi. Mjerna jedinica za ekvivalentnu dozu je J/kg, a naziva se sievert, 1 Sv.

## 10.4 Nuklearna fisija i fuzija

Godine 1938. Hahn i Strassmann ispravno su protumačili što se događa kad se uran bombardira sporim neutronima. Uočili su da se jezgra urana 235 pod djelovanjem neutrona cijepa na dva podjednaka dijela. Taj proces, nazvan nuklearna fisija osnova je današnje nuklearne tehnologije kako ratne, tako i mirnodopske. Pri tom procesu jezgra urana se jako deformira u izduženi oblik i lako se cijepa po polovici. Pri tom procesu oslobađa se ogromna energija te još po nekoliko neutrona, čime je omogućena lančana reakcija fisije. Ovakav proces se događa samo kod urana 235, a ne kod drugih izotopa urana.

Oslobodena energija kod fisije posljedica je toga što je masa produkata fisije manja od mase jezgre koja se raspada. To znači da se dio mase pri fisiji pretvorio u energiju. Taj se proces može razumijeti ako promatramo energiju veze po nukleonu. Ako slabije vezani nuklearni sustav prijeđe u jače vezani, oslobodi se energija. Najjače su vezane jezgre masenog broja oko 50.

Stoga je energiju moguće dobiti cijepanjem, fisijom, težih jezgri ili spajanjem, fuzijom, lakših jezgri, npr. fuzijom jezgri vodika.

### Pitanja za vježbu

1. Od kojih čestica se sastoji jezgra atoma?
2. Što su to izotopi nekog kemijskog elementa?
3. U čemu se sastoji model ljusaka atomske jezgre?

4. Iskažite neke tzv. magične jezgre.
5. Što nazivamo radioaktivnošću jezgre?
6. Objasnite  $\alpha$ -raspad.
7. Objasnite  $\beta$ -raspad.
8. Objasnite  $\gamma$ -raspad.
9. Objasnite vremenski zakon radioaktivnog raspada.
10. Što je vrijeme poluraspada? Izrazite ga.
11. Što je aktivnost radioaktivnog uzorka? Koja je mjerna jedinica za aktivnost?
12. Koji je osnovni način međudjelovanja zračenja s materijom?
13. Objasnite gubitak energije zračenja ionizacijom materije, posebno za različite vrste zračenja.
14. Po kojem zakonu opada upadni snop neutralnih čestica pri prolazu kroz materiju?
15. Što je apsorbirana doza zračenja? Koja je mjerna jedinica te veličine?
16. Kako definiramo ekspoziciju zračenja?
17. Što je ekvivalentna doza i kako je definiramo? Koja je mjerna jedinica te veličine?
18. Objasnite ideju nuklearnu fisiju.
19. Objasnite ideju nuklearnu fuziju.