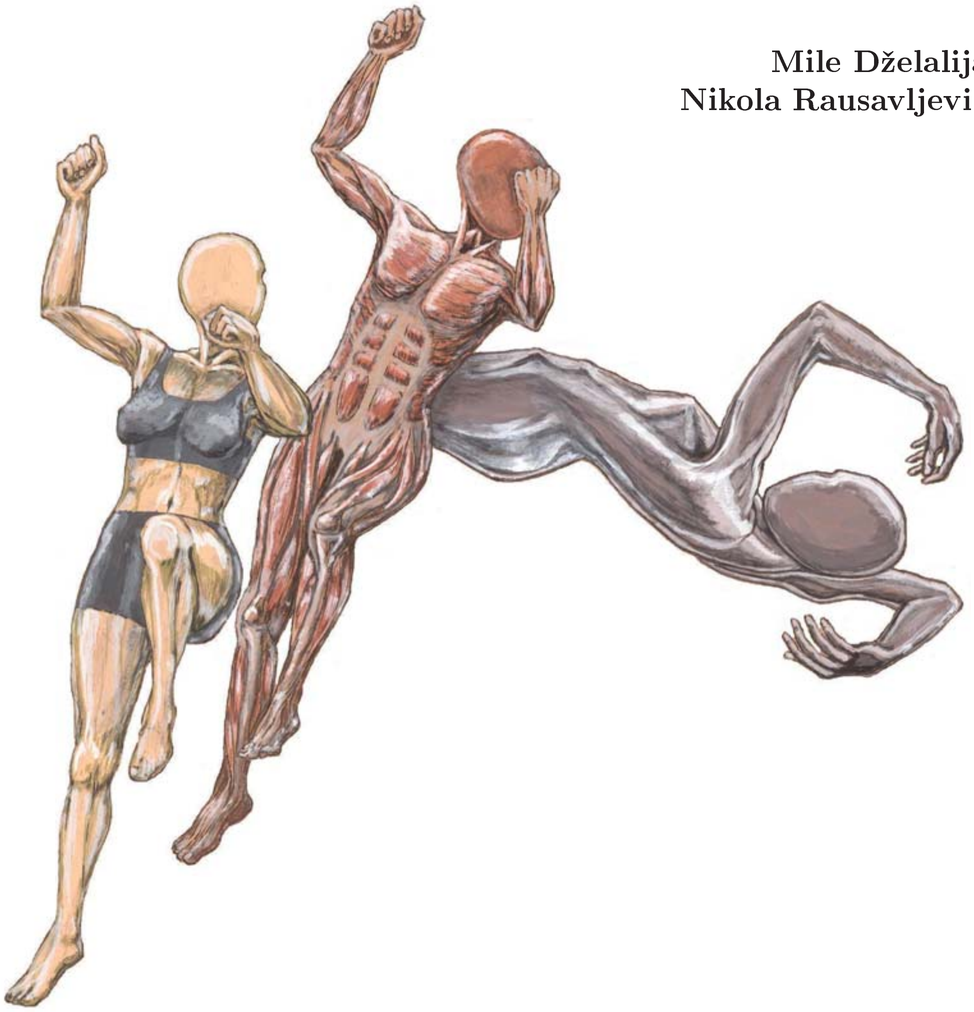
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM SPALATENSIS
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U SPLITU

Mile Dželalija
Nikola Rausavljević



BIOMEHANIKA SPORTA

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U SPLITU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM SPALATENSIS

Nakladnik:
Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja Sveučilišta u Splitu

Urednica:
doc. dr. sc. Đurđica Miletić

Recenzenti:
prof. dr. sc. Milan Čoh, Fakulteta za šport, Ljubljana
prof. dr. sc. Mladen Mejovšek, Kineziološki fakultet, Zagreb
doc. dr. sc. Ivica Puljak, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split

Lektorica:
Marina Magazinović, prof.

Ilustracija na naslovnici:
Vladimir Dželalija

Objavljivanje ovog sveučilišnog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Splitu rješenjem broj: 04-11/32-5-02 od 16. siječnja 2003.

Ovaj udžbenik je tiskan uz novčanu potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Sveučilišna knjižnica u Splitu

UDK 612.766:572.087>(035)
796.012(035)

DŽELALIJA, Mile
Biomehanika sporta/Mile Dželalija, Nikola Rausavljević - Split: Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja, 2003. — 208 str. : ilustr.; 25 cm

Bibliografija: str. 205-206. — Kazalo.

ISBN 953-96516-7-0

ISBN 953-96516-7-0

Sadržaj

Poglavlje 1

UVOD

Biomehanika je izrasla u samostalnu znanstvenu disciplinu iz fizike i stoga je u dubokoj svezi s njom. Iako je njene začetke moguće pronaći još kod prvih civilizacija koje su istraživale prirodu te tražile zakonitosti koje vladaju u njoj, biomehanika se ubraja među novije znanstvene discipline.

1.1 O fizici

Riječ **fizika** potječe od grčke riječi fýsis što znači priroda, pa se fizika dugo vremena zvala filozofija prirode. Fizika je fundamentalna prirodna znanost koja se bavi proučavanjem ponašanja materije u njenom temeljnom smislu. Pojam materije se koristi za sve ono što postoji u prirodi, a dijeli se na tvar i zračenje. Pojam tvari označava sva tijela čija je masa različita od nule (npr. nogomentna lopta, teniski reket, molekula, elektron, ...), a ostali se dio materije naziva zračenje (npr. vidljiva svjetlost, toplinske zrake, radio valovi, X-zračenje, infracrveno zračenje, ...) [1]. To bismo slikovito zapisali na sljedeći način:

$$\boxed{\text{MATERIJA}} = \boxed{\text{TVAR}} \oplus \boxed{\text{ZRAČENJE}}$$

gdje $\oplus$ označava ujedinjavanje dviju disjunktnih skupina, tj. onih skupina koje se međusobno ne preklapaju.

Iskustva nam kazuju kako je materija u neprestanom gibanju. Pod **gibanjem** u širem smislu podrazumijevamo sve mehaničke, kemijske i druge procese koji se događaju u prirodi. Uz pojam gibanja vezani su i pojmovi

[1] Ako bi se uzela svojstva materije na nivou mikrosvijeta, tada bi se njena podjela izvršila po drugoj osnovi.

prostora i **vremena**. Prostor i vrijeme su manifestacija određenih univerzalnih svojstava materije. Intuitivno razumijemo vremenske i prostorne odnose (sutra s obzirom na sada, tamo s obzirom na ovdje), ali sama bit pojmova prostora i vremena često ostaju zbunjujući. Nema smisla uvoditi pojmove gibanja, prostora i vremena, ako prije toga nije uveden pojam materije. Zbog toga se zaključuje kako su gibanje, prostor i vrijeme tri osnovna svojstva materije.

Ilustracija 1.1: Promatrajući svijet oko sebe neprestano uočavamo materiju i njena osnovna svojstva: gibanje, prostor i vrijeme.

Fizika izučava ona objektivna svojstva materijalnog svijeta koja su osnovna i temeljna. Fizika pred sebe ne postavlja zadatak koji bi odgovarao na pitanje zašto materija ima takva svojstva koja ima, već izučava kako se materija ponaša u svojim najjednostavnijim oblicima. Fizika, na primjer, daje odgovor na pitanje kakva je sila između svemirskih tijela, ali ne daje odgovor na pitanje zašto je sila između dvije mase baš takvog oblika.

Prožimanje s drugim znanostima i područjima ljudskog djelovanja neizbježno je, te je ponekad teško povući granicu između fizike i drugih područja znanosti. Fizika ima fundamentalno značenje za ostale prirodne, tehničke, pa i za mnoge društvene znanosti. Kao tipična eksperimentalna znanost fizika se zasniva na promatranju prirodnih pojava, izvođenju eksperimenata i mjerenja. Rezultati opažanja, nakon što su svedeni u prihvatljiv oblik, iskazuju se kroz principe i zakone. Ponekad se do određenih fizikalnih zakona dolazi teorijski, pretpostavljajući postojanje određenih simetrija u prirodi, a zatim se njihova valjanost provjerava eksperimentima. Fizikalne zakone najčešće simbolički zapisujemo matematičkim jednadžbama.

Dio fizike koji proučava gibanja tijela u užem smislu, tj. vremensku promjenu položaja tijela u prostoru (npr. gibanje teniske loptice, automobila, sportaša, molekula, ...), nazivamo **mehanika** (grč. *mēchanē* — stroj ili naprava) i uzroke tog gibanja, a može se odnositi na mehaniku materijalne točke, sustava materijalnih točaka, krutog tijela, mehaniku fluida, mehaniku titranja i valova, pa tako i na mehaniku živih organizama.

1.2 O biomehanici

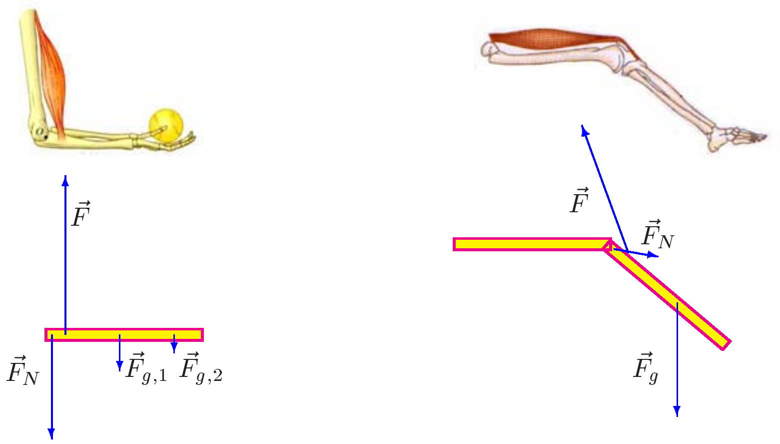
Kad unutar mehanike promatramo gibanja živog organizma, odnosno tijela koje ima vlastitu sposobnost pokretanja, neophodno je uzeti u obzir i one elemente koji predstavljaju osnovna svojstva žive prirode. Potreba za istraživanjima zakona relativnog gibanja živih organizama uvjetovala je stvaranje jedne nove znanstvene discipline, nazvane **biomehanikom**, koja većim dijelom svoga sadržaja sjedinjuje mehaniku, kao dio fizike, te anatomiju živih organizama. Zakonitosti biomehanike istražuju se u biljnom, životinjskom i ljudskom organizmu.

Potreba za gibanjem jedno je od osnovnih svojstava živih bića. Ponavljanjem pokreta poboljšava se motorika što se odražava na stanje svijesti, što nadalje omogućava usvajanje navika na još složenija gibanja (usvajanjem navika, među ostalim, smanjuje se tok informacija od jednog do drugog dijela organizma otvarajući time bržu izmjenu informacija između ostalih dijelova organizma). Analiza uvjeta gibanja živih tijela daleko je složenija od analize gibanja nežive prirode. Da bismo primijenili fizikalne zakone na gibanje živog organizma, sustav za gibanje tog organizma predstavljamo modelom koji se sastoji od povezanih segmenata (kao primjer vidjeti ilustraciju 1.2). Svaki segment u tom modelu ima svoje mjesto i određenu ulogu. Pojedini se segmenti ne mogu proizvoljno gibati unutar sustava, već je njihovo gibanje ovisno o njihovim svojstvima i međusobnim vezama s drugim segmentima. Svaki pokret živog organizma još više se usložnjava i činjenicom što su svaki segment, organ, tkivo ili stanica neprestano pod djelovanjem različitih sila. Tu uključujemo i silu gravitacije, kao vanjsku silu najvažniju za živi organizam, te mnoge druge vanjske i unutarnje sile. Sve ovo nam ukazuje kako se optimalni pokret može odrediti tek ako je potpuno poznat cijeli sustav za gibanje, odnosno živi organizam, te se na takvom sustavu primijene zakoni fizike.

1.2.1 Definicija biomehanike

Prije nego što krenemo u dublja razmatranja problema kojima se bavi biomehanika, možemo se upitati što je to biomehanika i kako je definirati.

Već iz riječi biomehanika vidimo kako se ona sastoji od dva dijela: od prefiksa 'bio' i korijena riječi 'mehanika'. Prefiksom 'bio' ukazuje se kako je biomehanika primjena mehanike na biološke sustave. Time imamo pravo



Ilustracija 1.2: Primjeri fizikalnih modela ruke i noge čovjeka. Za određivanje gibanja pojedinih segmenata tijela potrebno je odrediti ona svojstva toga segmenta koja su važna u opisu gibanja, te sve sile koje djeluju na njega.

zaključiti kako je biomehanika znanost kojom se istražuju sile i njihov utjecaj na žive organizme. Na taj smo se način približili definiciji biomehanike koju je još 1974. godine iznio Herbert Hatze: "Biomehanika je znanstvena disciplina kojom se istražuje struktura i ponašanje bioloških sustava koristeći zakone mehanike". Mi ćemo ovdje tu definiciju biomehanike izreći na sljedeći način: "Biomehanika je znanstvena disciplina kojom se istražuju sve sile i njihovi učinci na žive sustave".

Iz navedene definicije biomehanike uočavamo njenu duboku povezanost s fizikom, odnosno najviše s jednim njenim dijelom koji se naziva mehanikom. Kako je fizika fundamentalna znanost, veza biomehanike i fizike je jednosmjerna, tj. primjena zakona i spoznaja fizike na biološke sustave.

Područje istraživanja u biomehanici može biti fundamentalno i primijenjeno te možemo razlikovati više smjerova razvitka biomehanike: biomehanika bioloških materijala, biomehanika procesa upravljanja, biomehanika zamjene bioloških tkiva, biomehanika umjetnih organa, medicinska biomehanika, biomehanika rada, biomehanika sporta, te mnoge druge. Ovdje ćemo izučavati **biomehaniku sporta** kroz koju se istražuje mehanika zglobno-koštano-mišićnog sustava čovjeka s ciljem otkrivanja suštine postizanja optimalnih rezultata u sportskim aktivnostima.

1.3 O biomehanici sporta

Želja za izučavanjem gibanja sportaša postoji od samog početka suvremenog razvoja sporta. Metode kojima se nastoji proniknuti u suštinu sportske lokomocije naglo se razvijaju zahvaljujući novim tehnologijama. Tako je biomehanika sporta iz teorijski začahurene discipline postala egzaktnim znanstvenim područjem. Primarni interes biomehanike sporta je usmjeren na otkrivanje suštine vrhunskih motoričkih dostignuća ljudskog tijela, te na prijenos tih spoznaja u područjima obrazovanja, rekreacije i kineziterapije. Široka primjena spoznaja fizike u sportu i tjelesnom vježbanju sugerirala je i uporabu različitih naziva, kao što su antropomehanika, homokinetika, kinantropologija, biokinetika, kineziološka mehanika i druge. Svi ovi nazivi ne ukazuju samo na razliku u semantici, već i na naglu primjenu biomehanike u sportu te potrebu za znanstvenim definiranjem te nove discipline. Danas se najviše upotrebljava naziv biomehanika sporta koji ukazuje na međusobnu povezanost tih dvaju područja.

1.3.1 Definicija biomehanike sporta

Iz definicije biomehanike kao znanosti kojom se istražuju sile i utjecaj na žive organizme, nije teško uvesti definiciju biomehanike sporta. Biomehanikom sporta izučavaju se sile i njihov utjecaj na sportaše tijekom sportskih aktivnosti.

1.3.2 Ciljevi biomehanike sporta

Primarni interes biomehanike sporta usmjeren je ka otkrivanju bitnosti vrhunskih sportskih dostignuća. Ostali se ciljevi odnose na istraživanja vezana za sprečavanje ozljeda tijekom sportskih aktivnosti te rehabilitaciju. Navedeni ciljevi nisu suštinski razdvojeni, već stoje u dubokoj međusobnoj vezi.

Razvoj tehnike. Razvijanje sportskih vještina kod većine sportova vrši se kroz dopune i izmjene različitih pokreta sportaša. Nastavnici i treneri koriste znanja mehanike s ciljem poboljšanja ili uvođenja novih pokreta u ostvarenjima vrhunskih sportskih rezultata. Naprimjer, ako gimnastičarka ima problema u ostvarenju dvostrukog salta na podlozi, analizirajući njene pokrete, možda joj se najprije može savjetovati ostvarenje velikog skoka uvis jer tako dobiva dovoljno vremena za ostvarenje dvostrukog salta. Nadalje, poznavajući zakon očuvanja momenta količine gibanja, može joj se savjetovati jače savijanje tijela kako bi se smanjio moment inercije, a povećala kutna brzina rotacije. Prije nego se ide na poboljšanje i izmjene određenih pokreta, potrebna je dobra analiza svih pokreta koje jedan sportaš izvodi u svojoj aktivnosti. Nerijetko se događaju bitne izmjene tehnike izvođenja vježbe, kao na primjer kod bacačkih vještina, skijaških sportova, skokova uvis i udalj, i drugih. Na Olimpijskim igrama u Meksiku osvajač zlatne medalje u skoku uvis upotrijebio je tehniku koja prije nikad nije viđena. Bio je to Dick Fosbury koji je preskočio 2.24 metra. Uz određene izmjene, takva se tehnika i danas koristi.

Razvoj opreme. Biomehanika sporta ima veliki utjecaj i u razvoju obuće, odjeće i druge sportske opreme. Mnogi su primjeri izmjene i razvoja sportske opreme koji su doveli do boljih rezultata. Laganija i prikladnija oprema kod biciklizma, skijanja, tenisa, golfa, bacanja koplja, te mnogih drugih sportova, dovela je do ostvarenja nevjerojatnih sportskih rezultata. Na primjer, prikladniji aerodinamički izgled koplja doveo je do takvih rezultata da su se uvela nova pravila koja su bitno ograničila daljnji biomehanički razvoj te discipline. To je primjer kada se biomehanika nije koristila za razvoj jedne discipline, već štoviše, u toj se disciplini dogodila primjena biomehanike u stvaranju pravila s ciljem ograničenja razvoja te discipline.

Razvoj treninga. Biomehanika ima velik utjecaj i u procesu treniranja. Analizom svih pokreta sportaša mogu se uočiti nedostaci koji se ispravljaju odabranim treninzima. To se može odnositi na jačanje određene mišićne skupine ili izmjenu samo jednog dijela pokreta. Na primjer, kod umjetničkog klizanja za ostvarenje trostrukog okreta u zraku potrebno je smanjiti moment inercije tijela skupljajući ruke oko tijela. Kako bi se to ostvarilo dovoljno brzo, potrebno je imati prikladnu snagu u točno određenim mišićima. Jačanjem potrebne mišićne skupine trostruki se okret puno lakše izvodi.

Sprečavanje ozljeda i rehabilitacija. Cilj biomehanike je ostvarenje vrhunskih sportskih rezultata, ali ne po svaku cijenu. Potrebna je stalna briga o mogućim ozljedama sportaša. Spoznajama koje izlaze iz biomehanike utječe se na pravila u izvođenju sportskih vještina kojima se sprečavaju nepotrebne ozljede sportaša. Iz toga proistječe kako razvoj sportske opreme ne smije ići onim smjerom koji će dovesti samo do ostvarenje boljih sportskih rezultata, već i do smanjenja vjerojatnosti ozljeda.

Pored svih mogućnosti koje nudi biomehanika sporta, još je uvijek relativno mala njena primjena. Razlog tomu je slaba biomehanička obučenost nastavnika, trenera i sportaša.

1.3.3 Postupci istraživanja

Biomehanika se u svojim istraživanjima koristi izravnim i neizravnim postupcima. Izravni postupci određivanja nekih fizikalnih svojstava ne mogu dati uvid u internu strukturu gibanja. Zbog toga su u uporabi različiti modeli koji na osnovi eksperimentalnih podataka izračunavaju one fizikalne veličine koje se ne mogu izravno odrediti. Postoji nekoliko različitih postupaka određivanja eksperimentalnih podataka koje se odnose na kinematička mjerenja, kinetička (ili dinamička) mjerenja te elektromiografska mjerenja, koja ćemo upoznati kasnije u tekstu.

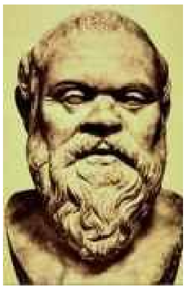
1.4 Izvorišta biomehanike

Povezivanje povijesti znanosti s analizom osnovnih pojmova koji se izučavaju vrlo je važno u razumijevanju kako povijesti tako i dotične znanosti, u ovom slučaju biomehanike. Nemoguće bi bilo shvatiti suvremene teorije, a da ih se ne poveže s prijašnjim spoznajama. Većina pojmova i nazora imaju dugu povijest, a izvorišta im blijede u nedokučivim davninama pa su, stoga, često predmetom različitih diskusija.

Povijest biomehanike nije moguće odijeliti od povijesnog razvoja fizike, a ni od biologije, medicine te informatike bioloških sustava. Povijesni korijeni spoznaje biomehanike zasigurno potječu iz daleke prošlosti. Oblici tijela čovjeka kao i različitih životinja, te njihova gibanja, oduvijek su zaokupljala pažnju ljudi mnogih profila, od pjesnika, umjetnika, filozofa pa do fizičara, tehničara i liječnika. Dok su za jedne gibanja i oblici živih bića vrhunski estetski doživljaj, za druge su ti isti oblici i gibanja savršenstvo i vrhunska racionalnost. Sva oruđa i oružja za lov i rat nastala su, uglavnom, kao rezultat biomehaničkog iskustva i promišljanja. Tako su npr. oklopi ratnika vjerojatno nastali po uzoru na oklope različitih insekata i ljuskara. Mnoge ideje za letjelice, plovila i druge strojeve proizišle su iz analogije s oblicima i pokretima živih bića.

Korijene znanosti obično vežemo uz antičke filozofe, matematičare i fizičare koji su među prvima ostavili zapise svojih spoznaja i opažanja o prirodi u kojoj živimo i čiji smo dio. Poznati grčki filozof Tales, 624.—545. godine prije Krista, utemeljio je tzv. prirodnu filozofiju. U to je vrijeme grčka znanost razvila osnovne elemente matematike, astronomije, fizike, geografije i medicine. Najpoznatiji matematičar toga doba je, svakako, Pitagora, rođen oko 582. godine prije Krista, čije neke od njegovih spoznaja i danas oblikuju živote ljudi. Njegovo shvaćanje cijelog svemira i čovjekova tijela zasnovano je na njegovoj matematičkoj analizi glazbe. Poznat je po svom poučku o pravokutnom trokutu, $a^2 + b^2 = c^2$.

Zlatno doba grčke znanosti započinje Sokratom (ilustracija 1.3), koji

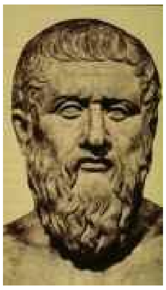



Ilustracija 1.3: Sokrat, 469. — 399. godine prije Krista, bio je jedan od najpoznatijih grčkih filozofa. Prikazan je i sa svojim učenicima tijekom jedne od mnogobrojnih filozofskih rasprava.

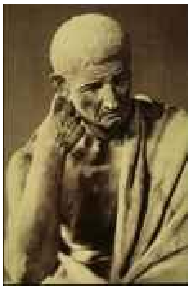
je rođen prije više od 2400 godina. Tvrdio je je kako nije moguće razumjeti prirodu koja nas okružuje prije nego upoznamo sami sebe (vjeruje se kako je to najvjerojatnije pročitao na pročelju hrama u Delfima). Stoga je u svojim razmišljanjima proučavao ljudsku dušu. Kao znanstvenika koji je tragao za znanjem mehanike svoga vlastitoga tijela, pa i drugih živih bića, možemo ga svrstati među znanstvenike koji su gradili biomehaniku. Nije ostavio niti jedno pisano djelo, ali su njegove misli i filozofske poglede zapisali njegovi učenici s kojima je vodio filozofske rasprave. Do odgovora na razna pitanja dolazio je razmatranjem pojava u prirodi, ustvrđivajući što je u njima zajedničko te na osnovi toga određivao njihov pojam. Nakon sukoba s vlastima u Ateni osuđen je i pogubljen u 70-toj godini života za navodno "štetno djelovanje na atensku mladež". Iz zatvora nije htio pobjeći, iako je imao priliku za to, tvrdeći da bi se time kršio zakon.

Pogubljenje Sokrata imalo je veliki utjecaj na Platona (ilustracija 1.4) koji je 51 godinu bio Sokratov učenik i član atenske aristokracije. U Ateni je osnovao filozofsku školu nazvanu Akademijom po vrtu posvećenom bogu Akademu, gdje se sastajao sa svojim učenicima. Započeo je filozofska razmatranja koja su postala najvažniji dio Zapadne filozofije, psihologije, logike pa i politike. Postulirao je postojanje ideja neovisno o svijetu kojega doživljavamo osjetilima ili eksperimentima uopće. Za njega je ideja uzrok svih stvari, a vrhovna ideja je ideja dobra. Njegovo shvaćanje matematike kao jednog alata znanosti stvorilo je potrebna krila za razvoj mehanike uopće.

Otkrića i stavovi Aristotela (ilustracija 1.5), poznatog antičkog filozofa, matematičara i fizičara, utjecala su na liječnike toga doba koji su zakonima fizike pokušali objasniti određene medicinske pojave (Erazistrat, Asklepijad)



Ilustracija 1.4: Platon, 427. — 347. godine prije Krista, Sokratov učenik. Nastavio je njegova učenja. Zalagao se za postojanje ideja neovisno o svijetu kojeg opažamo osjetilima. Matematiku je shvaćao kao jedan od alata znanosti.



Ilustracija 1.5: Aristotel, 384. — 322. godine prije Krista, sin fizičara, porijeklom iz sjeverne Grčke. Došao je u Atenu studirati na Platonovoj akademiji u 17. godini života. Bio je izuzetno inteligentan i imao je veliku moć uočavanja. Njegov utjecaj je vidljiv u filozofskim školama kroz srednji vijek pa sve do danas. Prikazan je i sa svojim učiteljem, Platonom.

ili ih primijeniti u liječenju iščašenja i kostoloma (Hipokrat). Suprotno od svog učitelja Platona, smatrao je kako je tvar osnova svijeta i života. Aristotela je izuzetno zanimala anatomija i struktura živih bića. Napisao je prvu knjiga sa sadržajem iz biomehanike *"De Motu Animalium"* (O gibanju životinja). U ovom su djelu prvi put iznesene znanstvene analize pokreta i djelovanja mišića. Aristotel nije samo promatrao tijelo životinja kao mehanički sustav za gibanje, nego je promatrao i fiziološke osnove stvaranja njihovih pokreta. Svojim pristupima stvorio je metodu zaključivanja na osnovi pretpostavljenih postulata koju zovemo dedukcija. Jedan od njegovih najpoznatijih učenika je i Aleksandar Veliki koji se oduševljavao Aristotelovim predavanjima o etici i politici.

Od liječnika i fizičara iz doba Rimskog Carstva zaslužnih za razvoj biomehanike posebno se ističe Galen (ilustracija 1.6), poznati gladijatorski

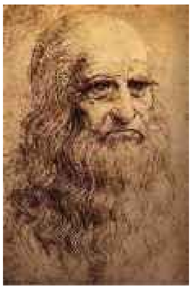
Ilustracija 1.6: Galen, 129. — 201., poznati gladijatorski liječnik. Živio je u doba imperatora Marcusa Aureliusa. Jedan je od najvećih medicinskih autoriteta antičkog doba. Njegovao je i razvijao fizikalnu terapiju.

liječnik, koji je uočio ovisnost nastanka ozljeda o načinu djelovanja sila na organizam. Razvio je fizikalnu terapiju i dao osnove znanju iz anatomije. Ustvrdio je kako se impulsi iz mozga prenose živcima na mišiće koji se zbog toga skraćuju i tako nastaje gibanje u zglobovima. Bio je religiozan te je vjerovao kako duša pokreće tijelo. Njegovo veliko djelo o ulozi i funkciji ljudskog organizma postalo je standardni tekst iz medicine za narednih 13 stoljeća.

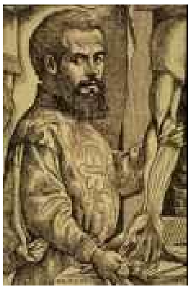
Kroz rani srednji vijek arapske su civilizacije prenijele znanstvene spoznaje antičkog svijeta. Većina znanstvenika toga doba ostala je vjerna Aristotelovim učenjima kao i pogreškama iz anatomije koje su preuzete iz Galenova djela. U ovom periodu nije se dogodio značajniji razvoj biomehanike.

Trebalo je pričekati sve do razdoblja renesanse kako bi se prevladao skolastički dogmatizam u prirodnim znanostima. Leonardo da Vinci (ilustracija 1.7), čovjek koji je živio izvan svoga vremena, savršeni umjetnik, znanstvenik i izumitelj, proučavao je kretanja čovjeka i životinja, letenja ptica, anatomiju lokomotornog sustava, rad koštanih mišića, te mehaniku disanja, povezujući u jedinstvenu cjelinu spoznaje fizike i anatomije. Dao je veliki doprinos razvoju mehanike kroz razumijevanje komponenti sila, koeficijenta trenja i akceleracije tijela u slobodnom padu. Uočio je Treći Newtonov zakon kod analize letenja ptica, ali nije uspio doći do pojma akceleracije kao ni pojma mase. Mnogi crteži, kojima je ovaj vrhunski umjetnik ilustrirao svoje studije o anatomiji čovjeka, očuvani su do danas. Jedna je od važnijih osoba u razvoju biomehanike. Njegove analize mehanike gibanja čovjeka uključivale su zglobove, mišiće, kosti, ligamente, tetive te hrskavice.

Fizičar Andreas Vesalius (ilustracija 1.8) 1543. godine, kada je imao 29 godina, objavio je svoj dobro ilustrirani tekst o strukturi tijela čovjeka.



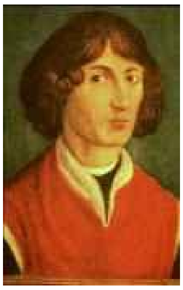

Ilustracija 1.7: Leonardo da Vinci, 1452. — 1519., rođen u siromaštvu, većim se dijelom sam obrazovao. Postao je poznat kao umjetnik, ali je uglavnom radio kao znanstvenik i izumitelj. Doprinio je razvoju mehanike, a posebno razumijevanju sila trenja. Proučavao je kretanje čovjeka i životinja. Ubraja se među važnije osobe koje su zaslužne za razvoj biomehanike.

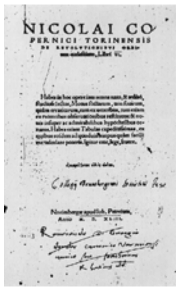



Ilustracija 1.8: Andreas Vesalius, 1514. — 1564., objavio je tekst o strukturi čovjekova tijela. Prvi je odbacio dogmatska shvaćanja u anatomiji i svoje je spoznaje zasnovao na zapažanjima pri seciranju ljudskog tijela.

Ispravio je određene pogreške koje je Galen objavio u svojim tekstovima. Za razliku od Leonarda da Vincia imao je formalnu naobrazbu iz medicine. Odbacio je dogmatska shvaćanja u anatomiji te spoznaje zasniva na zapažanjima pri seciranju ljudskog tijela, čime je uočio kako su Galenova pogrešna shvaćanja o anatomiji čovjeka zasnovana na anatomiji životinja.

Iste godine kad je objavljen tekst Vesaliusa, umro je Nikola Kopernik (ilustracija 1.9), koji je za života vrlo bojažljivo uveo koncept heliocentričnog sustava. Njegovo je djelo uzrokovalo promjene ne samo u astronomiji, već i u drugim područjima znanosti. Uveo je matematički pristup u rješavanju problema kao suprotnost Aristotelovoj literalnoj fizici. To je imalo izravnog utjecaja i na biomehaniku, najvećim dijelom već samim razvojem mehanike. U svom djelu o gibanju nebeskih tijela, on Sunce stavlja u središte oko kojega



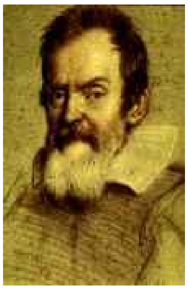


NICOLAI CO
PERNICI TORINENSIS

Ilustracija 1.9: Nikola Kopernik, 1473. — 1543., u svom djelu o gibanju nebeskih tijela stavlja Sunce kao središte oko kojeg se gibaju sve planete među kojima i Zemlja.

se gibaju Zemlja i ostale planete.

Otac mehanike, Galileo Galilei (ilustracija 1.10), rođen je 21 godinu

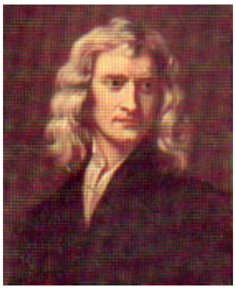


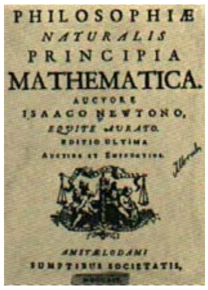
Ilustracija 1.10: Galileo Galilei, 1564. — 1642., je jedan od ključnih osnivača mehanike. Studirao je i medicinu, te je napravio veliki doprinos u biomehanici.

nakon Kopernikove smrti. Sa 17 godina započeo je studiranje medicine u Pisi. Nakon neuspjeha, u 21. godini vratio se u Firencu te je od 25. godine predavao matematiku. Snaga njegove osobnosti vladala je svijetom znanosti tadašnjeg vremena. Postao je pokretač novog duha znanstvene revolucije. Ujedinio je mnogobrojna opažanja u strogu matematičku formulaciju gibanja tijela konstantne akceleracije, kakvo je, na primjer, slobodni pad. U 45. godini života teleskopom je otkrio četiri prirodna satelita Jupitera. Napravio je i veliki doprinos u biomehanici tvrdeći kako je čvrstoća kosti proporcionalna površini poprečnog presjeka, čime je objašnjavao zašto veće životinje imaju proporcionalno veće kosti. Oslanjajući se na nepromjenjiv perioda njihala i njegovu ovisnost o duljini njihala, otkucaj srca izražavao je preko duljine njihala.

René Descartes, 1596. — 1650., utemeljio je analitičku geometriju. Zakonima fizike tumači funkciju organizma čovjeka. On čovjeka shvaća kao stroj kojemu je pridodan duh, dok su, životinje obični strojevi. Liječnik i fizičar Robert Hooke, 1635. — 1703., dao je poznati zakon o proporcionalnosti sile i deformacije elastičnih tijela.

Isac Newton (ilustracija 1.11), 1642. — 1727., je čovjek koji je uveo





Ilustracija 1.11: Isac Newton, 1642. — 1727., engleski fizičar, obavio je najveću sintezu znanosti. Poslije njega nije izrečen ni jedan novi princip klasične mehanike, osim što su se zakoni elegantno izražavali diferencijalnim jednadžbama. Poznat je i po svom općem zakonu gravitacije. Prikazana je i naslovnica njegovog poznatog djela *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, u kojem je 1714. objavio svoja tri povijesna zakona gibanja.

pojam sile kroz svojim trima povijesnim zakonima gibanja. Izvršio je jednu od najvećih sinteza znanosti. Tekovine svojih prethodnika poopćio je i sustavno povezao u principe mehanike koji strogo matematički omogućavaju riješavanje različitih gibanja, pa time i problema iz biomehanike. Poznavanjem sila, položaja i brzina svih tijela u nekom početnom trenutku iz općih jednadžbi gibanja predviđalo bi se daljnje ponašanje sustava. Time je renesansna znanost postigla vrhunac. Genijalnom preciznošću u traženju uzročne veze između ubrzanja i sile, Newton je otkrio zajednički korijen za gibanje planeta i padanje tijela u blizini površine Zemlje, poznat kao opći zakon gravitacije. Po njemu je nazvana i osnovna mjerna jedinica za silu.

Giovanni Alfonso Borelli (ilustracija 1.12) osobno je upoznao Galilea. U Pisi, gdje je dobio mjesto voditelja matematičke katedre, radio je s Marcellom Malpighijem, mnogo mlađim voditeljem teorijske medicine. Kao i Descartes, smatrao je kako je mehanika ključ za shvaćanje ponašanja ljudskog tijela. Borellievo najvažnije djelo je djelo s biomehaničkim sadržajem *"De Motu Animalium"* koje je objavljeno 1680. godine, kratko nakon njegove smrti. U tom djelu on analizira gibanja tijela, pokrete mišića, let ptica, plivanje riba, rad srca i mnoge druge primjere iz biomehanike. Odredio je

Ilustracija 1.12: Giovanni Alfonso Borelli, 1608. — 1679., rođen je u Napulju kada je Galileo imao 44 godine. U 16. godini života postao je student kod Benedeta Castellia, bivšeg Galileevog studenta. Prikazana je i naslovnica njegovog najvažnijeg teksta *"De Motu Animalium"*. Tekst je objavljen 1680. godine, jednu godinu nakon smrti Borellia.

položaj središta mase ljudskog tijela. Pored istraživanja u biomehanici, dao je doprinos i u astronomiji dokazujući pojedine Galileijeve rezultate.

Među istaknuta imena toga doba, koji su se bavili problemima ovog područja, treba ubrojiti i naše znanstvenike, kao što je Marin Getaldić, 1568. — 1626. koji se bavio određivanjem omjera između težine i obujma različitih tijela.

Tijekom 18. stoljeća najznačajniji utjecaj na razvoj onog dijela prirodnih znanosti koji je povezan s biomehanikom imali su Euler, d'Alambert i Lagrange. U to se vrijeme vidjelo kako se Newtonovi zakoni lako primjenjuju na nebeska tijela i tijela čije se dimenzije mogu zanemariti. Međutim, primjena tih zakona na gibanja krutih tijela i gibanja fluida nije bila jednostavna. Grupa znanstvenika iz Basela, braća Jakob i Johann Bernoulli, njihov nećak Daniel Bernoulli, i učenik Leonhard Euler, 1707. — 1783., bavili su se tim problemima. Euler je proširio primjenu Newtonovih zakona na kruta tijela i fluide, a prepoznao je i zakon očuvanja energije. Lagrange i d'Alambert razvili su nove metode analize, zasnovane na Newtonovoj mehanici, kojima su se istraživali pokreti čovjeka. Lagrange je uveo jednadžbe kojima se Drugi Newtonov zakon izražavao preko pojmova kinetičke i potencijalne energije.

Nakon Borellia bilo je malo novih tekstova iz biomehanike sve do polovice 19. stoljeća kada je francuski astronom Janssen predložio istraživanje kretanja kinematografskim pristupima. Kao znanstvenika koji je značajno doprinio razvoju biomehanike valja ubrojiti i Etiennea Julesa Mareya (ilustracija 1.13), 1838. — 1904., koji je izvršio mnoge eksperimente na pokretima čovjeka. Napisao je djelo *Le Mouvement* u kojem je opisao upotrebu različitih uređaja kojima su se mogla mjeriti određena svojstva ljudi dok su

FACULTÉ DE MÉDECINE DE PARIS.

THÈSE

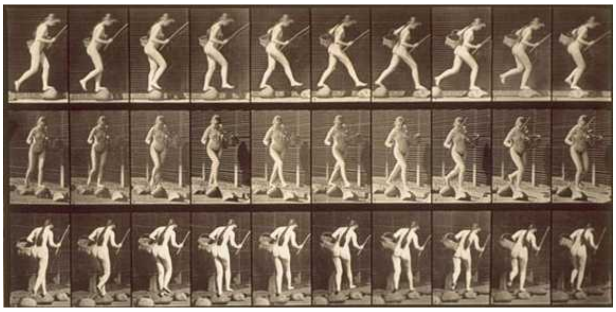
LE DOCTORAT EN MÉDECINE,

LA CIRCULATION DU SANG

PARIS.

Ilustracija 1.13: Etienne Jules Marey, 1838. — 1904., upotrijebio je mnoge uređaje pri mjerenjima različitih svojstava ljudskog tijela u gibanju.

u različitim aktvinostima. Osim utjecaja na biomehaniku, njegovi radovi su važni i za razvoj kinematografije. Pored Mareya, značajna osoba toga doba u razvoju biomehanike je Edwerd Muybridge, 1830. — 1904., koji je napravio više od 20000 fotografija ljudi i životinja u pokretima. Jedan takav primjer niza fotografija prikazan je na ilustraciji 1.14.



Ilustracija 1.14: Primjer niza fotografija koje je napravio Muybridge.

Zahvaljujući radovima Mareya i Muybridga, biomehanika je prešla iz jedne intuitivne znanosti u znanost koja se zasniva na eksperimentalnim mjerenjima i matematičkoj analizi podataka.

Postoji mnogo znanstvenika 20. stoljeća koji su doprinijeli razvoju biomehanike, među kojima valja istaknuti Nicholasa Bernsteina, 1896. — 1966., koji je odrastao u obitelji fizičara. Razvio je metode mjerenja pokreta koje su zasnovane na matematičkoj analizi, a posebno je uspoređivao koordinaciju pokreta u djece i odraslih. Zaključio je kako odrasli ostvaruju svoje pokrete bitno ekonomičnije nego djeca. Za razvoj biomehanike sporta u dvadesetom stoljeću je i Thomas Cureton koji je, među ostalim radovima, pisao o biomehanici plivanja. Kao znanstvenika iz suvremene biomehanike treba još spomenuti Fridricha Pauwelsa, 1885. — 1980., koji je stvorio klasična djela iz biomehanike. Utemeljio je i europsku biomehaničku školu. Biomehanika sporta doživjela je veliki procvat u drugoj polovici 20. stoljeća, no, svaki detaljan opis tih događaja izlazi iz okvira ovoga teksta.

Valja spomenuti kako je Međunarodno društvo biomehaničara osnovano 1973., a u ranim 1980.-tim i Međunarodno društvo biomehaničara sporta.

Poglavlje 2

ELEMENTI LOKOMOTORNOG SUSTAVA

Čovjeka, kao umno biće, uvelike premašuje puki zbroj sastavnih dijelova što čine njegovo tijelo. No, ipak, da bi se na čovjeka, kao sustav za gibanje (kretanje), mogli primijeniti zakoni fizike, potrebno je upoznati anatomiju onih dijelova čovjekovog tijela važnih za njegovo gibanje. Taj dio čovjeka nazivamo sustavom organa za gibanje ili lokomotornim sustavom, koji se sastoji od kostiju, zglobova i mišića.

Sustav organa za gibanje u cjelini proučava funkcionalna anatomija, koja je temelj znanosti o gibanju, kineziologija. Funkcionalana anatomija proučava sustav organa za gibanje kroz prizmu njegove mehaničke cjelovitosti i u raznim položajima, kada se, za razliku od normalnog položaja tijela, pojedini dijelovi sustava za gibanje premještaju u prostoru, u odnosu na ostale dijelove istoga sustava.

Biomehanička analiza jednog pokreta ne može se izvesti ukoliko se prethodno ne odredi veličina i smjer djelovanja unutarnjih sila (sila mišića), pa je stoga neophodno, prije prelaska na tumačenje osnovnih principa biomehanike, objasniti osnovne karakteristike sastavnih dijelova lokomotornog sustava (kosti, zglobovi, mišići), onako kako se one objašnjavaju u okviru funkcionalne anatomije.

2.1 Osnove funkcionalne anatomije

Sustav organa za pokretanje, lokomotorni sustav (systema locomotorius) čovjeka čine kosti, spojevi među kostima i mišići. Prema djelovanju, sustav organa za pokretanje možemo podijeliti na aktivni i pasivni dio. Kosti koje su međusobno povezane zglobovima, spojevima i svezama u jedinstvenu cjelinu (kostur ili skelet) pasivno sudjeluju u držanju i kretanju tijela pa govorimo o pasivnom dijelu sustava za pokretanje. Poprečnoprugasti ili skeletni mišići, koji se vežu krajevima za kosti i imaju sposobnost kontrakcije te pokreću pojedine dijelove kostura ili ih učvršćuju u nekom položaju predstavljaju aktivni dio sustava organa za pokretanje.

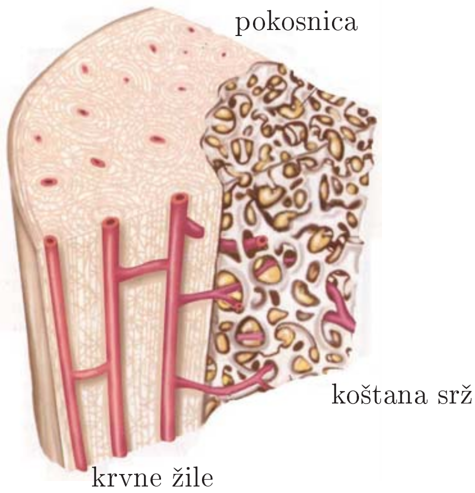
Tijelo čovjeka dijelimo na glavu, vrat, trup te gornje i donje udove. Glava se dijeli na lubanju i lice koja se vratom spaja s trupom. Prednji dio trupa se dijeli na prsni koš, trbuh i zdjelicu, a stražnju stranu čine leđa. Gornji udovi počinju od ramena i pazušne jame. Slobodni dio gornjeg uda je ruka, koja se sastoji od nadlaktice, lakta, podlaktice i šake. Šaka se dijeli na pest, zapešće i prste. Donji udovi dijele se na kuk, bedro, koljeno, potkoljenicu i stopalo. Stopalo se sastoji od korjena stopala ili nožja, donožja i prstiju.

2.2 Koštani sustav

Kosti (ossa) su tvrdi organi, međusobno povezani pomičnim i nepomičnim spojevima u trodimenzionalni kostur, koji pored lokomotorne ima i zaštitnu ulogu štiteći mozak, pluća, srce, utrobu, leđnu moždinu i druge vitalne organe. Kod svake kosti čovjeka razlikuju se dvije vrste koštanog tkiva, i to: zbijeno ili kompaktno (substantia compacta) koje tvori površinski sloj kosti i spužvasto koštano tkivo (substantia spongiosa) koje ispunjava njene dublje dijelove. Raspored koštanog tkiva u jednoj kosti zavisi o nizu mehaničkih optercénja (tlačnim i vlačnim silama, torziji, savijanju, smicanju) koja djeluju na nju tijekom cijelog života. U svakoj se kosti koštane lamele raspoređuju tako da pružaju maksimalni otpor mehaničkim opterećenjima. Djelovanje mehaničkih opterećenja uočava se ako na jedno tijelo, koje se sastoji iz homogene mase, postavi teret. Teret nastoji u pravcu djelovanja sile pritiska (tlaka) djeliće mase približi jedne drugima, a okomito ih odmaknuti. Zbog toga se u optrećenom tijelu javlja otpor koji se suprotstavlja sili sabijanja (tlačna) i sili istezanja (vlačna). Ovaj otpor nije svugdje podjednako raspoređen, već samo duž glavnih linija ili putanja koje se nazivaju trajektorije. Glavne trajektorije npr. kod potpornih stubova, nosača, nalaze se uglavnom uzduž njihovih površina. Zbog toga se u tehnici i primjenjuju cjevasti profili ili rešetkasti nosači jer podnose isti teret kao i masivni, od kojih su znatno lakši. Kod kosti je također zastupljen isti princip gradnje. Koštano tkivo se skuplja uzduž glavnih trajektorija otpora prema sili sabijanja i istezanja.

Na taj način s manje materijala kost postiže isti učinak kao i kad bi bila masivna, ali i puno teža. Prema tome, kompaktno koštano tkivo jedne kosti predstavlja, ustvari, zbijene trajektorije, a spužvasto tkivo mjesta gdje su trajektorije razmaknute. U spužvastom tkivu glavne koštane trajektorije povezane su sporednim, tanjim trajektorijama koje sprečavaju njihovo međusobno razmicanje. Trajektorije dugih kostiju, idući ka epifizama šire se lepezasto da bi se suprotstavile zglobnom pritisku koji se, radi uštede tkiva, raspoređuje na veću površinu, kao i da bi pružile otpor trakcijama periartikularnih mišića i sveza. Međutim, izdržljivost kosti na opterećenje je puno veća kada je ona u sklopu s mekim dijelovima. Mišići i tetive koji okružuju kost primaju opterećenje dijelom na sebe, smanjuju njegov intenzitet i sprečavaju prijelome kostiju prilikom jačih udaraca i trzaja koji se, u pravilu, događaju kod brzih pokreta, npr. pri trčanju i skakanju.

Svaka kost je prekrivena pokosnicom (ilustracija 2.1) preko cijele površine, osim na onom dijelu gdje se zglobljava s drugim kostima. U pokosnici se nalaze mlade koštane ćelije koje tijekom života omogućavaju promjenu oblika kostiju. U dubini kostiju nalaze se krupnije koštane ćelije koje rastvaraju koštano tkivo. Ovakva uloga dviju vrsta koštanih ćelija omogućava svakoj



Ilustracija 2.1: Struktura kosti.

kosti osnovnu vitalnost. Svaka kost tijekom evolucije formirala je takav oblik koji najbolje odgovara ulozi za koju je namjenjena. U sastav koštanog sustava za gibanje (ilustracija 2.2) spadaju kosti različitog oblika koje se dijele na kratke, duge i pločaste kosti. **Kratke kosti** se nalaze na završecima ekstremiteta i u sastavu kralješnice, a osiguravaju elastičnost, pokretljivost i amortiziranje pri različitim oblicima gibanja. Za njih je karakteristična podjednaka vrijednost svih triju prostornih dimenzija. Sustav kratkih kostiju u sastavu šake omogućava vrlo složena gibanja te pojedinačnu ulogu svakog prsta. U predjelu stopala, tijekom svakog koraka, sustav kratkih kostiju najefikasnije prigušuje nepoželjne vibracije. Kralješnici su omogućene velike amplitude pokreta upravo zbog niza kratkih kostiju te niza zglobova koji vezuju te kosti.

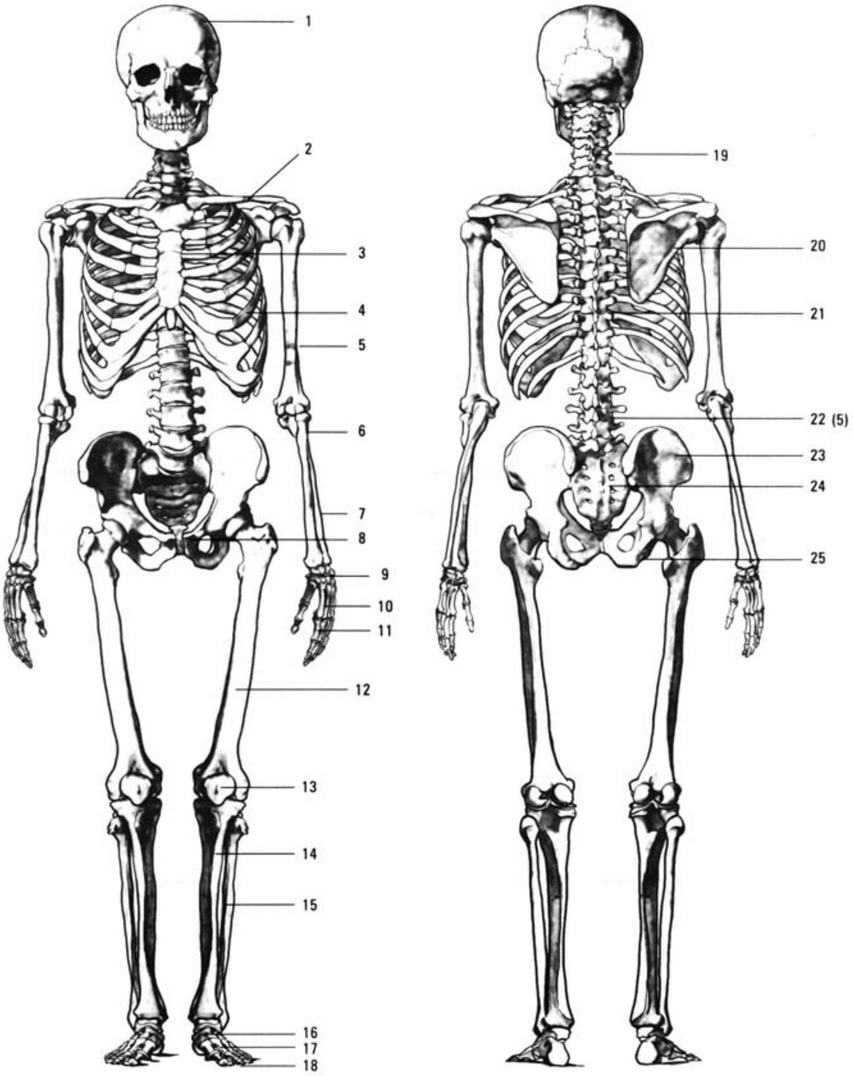
Duge kosti imaju prije svega motoričku ulogu, a nalaze se uglavnom u ekstremitetima. Pri tome su duge kosti donjih ekstremiteta masivnije jer nose cijelo tijelo, a pri koračanju ili trčanju trpe uzastopna udarna opterećenja. Za duge kosti je svojstveno to da im je jedna prostorna dimenzija znatno veća od ostalih dviju. Svaka duga kost sastoji se od središnjeg suženog dijela, trupa ili dijafize i dva zadebljana okrajka, epifize. Na okrajcima se nalaze zglobne glatke površine koje su proširene u cilju manjeg pritiska u njima. Posebno na dugim kostima postoje i ispupčenja za koja se, preko tetiva, pripajaju mišići.

Pločaste kosti imaju, uglavnom, zaštitnu ulogu. Najčešće zaštićuju osjetljive organe (kao na primjer lubanju) ili pružaju oslonac nekim dugim kostima (na primjer lopatici) pa su za biomehaniku od manjeg značaja.

Pored navedenih triju osnovnih grupa kostiju možemo razlikovati još **u luku zavinute kosti** (npr. donja čeljust, jezična kost) te **zrakaste kosti** (npr. kralješci).

2.2.1 Kosti glave

Kostur glave tvore plosnate nepravilne kosti koje su međusobno čvrsto povezane i nepomične izuzevši donju čeljust. Tako spojene one čine dvije koštane šupljine, kostur lubanje (cranium cerebrale) i kostur lica (cranium viscerale). Kostur lubanje oblikuje osam kostiju koje zatvaraju šupljinu lubanje (cavum cranii) u kojoj je smješten veliki i mali mozak. Četiri središnje kosti su neparne i to: zatiljna (os occipitale), klinasata (os sphenoidale), rešetnica (os ethmoidale) i čeona kost (os frontale), a dvije bočne su parne sljepoočna (os temporale) i tjemena kost (os parietale). Šupljina lubanje nastavlja se u kanal kralješnice pa zajednički oblikuju stražnju (neuralnu) cijev gdje je smješten središnji živčani sustav. Kostur lica sačinjava 15 kostiju, od kojih



Ilustracija 2.2: 1. lubanja (cranium), 2. ključna kost (clavicula), 3. prsna kost (sternum), 4. rebra (costae), 5. nadlaktica (humerus), 6. palčana kost (radius), 7. lakatna kost (ulna), 8. preponska kost (os pubis), 9. korijen šake ili pest (carpus), 10. zapešće ili međupešće (metacarpus), 11. prsti šake (digiti manus), 12. bedrena kost (femur), 13. iver (patella), 14. goljenična kost (tibia), 15. lisna kost (fibula), 16. korijen stopala ili nožje (tarsus), 17. donožje ili međunožje (metatarsus), 18. prsti stopala (digiti pedis), 19. vratni kralješci (vertebrae cervicales), 20. lopatica (scapula), 21. prsni kralješci (vertebrae thoracicae), 22. slabinski kralješci (vertebrae lumbales), 23. bočna kost (os ilium), 24. križna kost (sacrum), 25. sjedna kost (os ishii).

su šest parnih: gornja čeljust (maxilla), nosna (os nasale), sponasta (os zygomaticum), suzna (osa lacrimale) i nepčana kost te donja nosna školjka (concha nasalis inferior) i tri neparne: donja čeljust (mandibula), ralo (vomer) i jezična kost (os hyoideum). Kostur lica okružuje početne dijelove dišnog i probavnog sustava.

Lubanja balansira na gornjem kraju kralješnice. Ona se može usporediti s dvokrakom polugom čiji prednji kraj leži ispred zatiljnih kondila dok stražnji kraj leži iza kondila. Ta se poluga nalazi u labilnoj ravnoteži. Na nju djeluju dvije sile: na prednji krak poluge djeluje sila teže, a na stražnji krak snažni mišići šije.

2.2.2 Kosti trupa

Osnovu kostura trupa i cijelog tijela čine kralješci (vertebrae) koji zajedno čine kralješnicu (columna vertebralis). Osim kralješaka kosturu trupa pripadaju rebra (costae) i prsna kost (sternum). Rebra zajedno s rebrenim hrskavicama, prsnom kosti i prsnim dijelom kralješnice oblikuju prsni koš. Duljina rebara se povećava od prvog do osmog, a potom se smanjuje, tako da je osmo rebro najdulje. Time kosti trupa oblikuju dva prostora, prednji (visceralni) u kojemu su smješteni unutarnji organi i stražnji (neuralni) u kojem je smješten živčani sustav. Kralješnicu oblikuju 33 ili 34 kralješka. Prema dijelu trupa kojemu pripadaju dijelimo ih na sedam vratnih, dvanaest prsnih, pet slabinskih, pet križnih te četiri ili pet trtičnih. Prva 24 kralješka su slobodni i pokretljivi jedan prema drugome. Posljednjih 9-10 kralješaka su međusobno srasli i čine dvije kosti, križnu (os sacrum) i trtičnu (os coccygis), koje ulaze u sastav zdjeličnog obruča (prstena).

2.2.3 Kosti gornjih udova

Kostur gornjih udova oblikuju rameni obruč i kostur ruke. Rameni obruč koji čine ključna kost (clavicula) i lopatica (scapula), povezuje gornji dio prsnog koša i kostur ruke. Kostur ruke ili slobodnog dijela gornjeg uda dijelimo na nadlakticu, podlakticu i kostur šake. U nadlaktici je jedna nadlaktična kost (humerus), a u podlaktici su dvije, palčana (radius) i lakatna (ulna). Kostur šake se sastoji od ukupno 27 kostiju koje čine pest ili korijen šake (carpus), zapešće ili međupešće (metacarpus) i prste (digiti manus) koje grade članci (ossa digitorum manus). Kosti pešća (ossa carpi) raspoređene su u dva reda: proksimalni i distalni. U svakom su redu po četiri kratke kosti čime se postižu malena, ali raznolika gibanja. Kostiju zapešća (ossa metacarpalia) ima pet, duguljastog su oblika, a nalaze se skrivene u dlanu. Kosti prstiju šake (ossa digitorum manus) duguljaste su i oblikuju pet prstiju. Svaki prst ima po tri članka, dok palac ima dva, što ukupno iznosi 14 članaka.

2.2.4 Kosti donjih udova

Kostur donjih udova oblikuju zdjelični obruč i kostur noge. Zdjelični obruč čine dvije zdjelične kosti (os coxae) koje su straga spojene s križnom kosti (os sacrum). Kostur noge ili slobodnog dijela donjeg uda sastoji se iz više kostiju i dijelimo ga na natkoljenicu ili bedro, potkoljenicu i stopalo.

U natkoljenici se nalazi bedrena kost (femur), a u potkoljenici goljenična kost (tibia) i lisna kost (fibula). U zglobu koljena nalazi se sezamska kost iver (patella). Goljenična kost je duga, cjevasta i masivna kost smještena okomito na medijalnoj strani potkoljenice, dok je lisna kost tanka i služi uglavnom za hvatište mišića.

Kostur stopala dijelimo na korijen stopala ili nožje (tarsus), kostur donožja ili međunožja (metatarsus) i prste (digiti pedis), koje izgrađuju članci (ossa digitorum pedis). Kosti stopala se bitno razlikuju od kostiju šake zbog funkcije koje imaju. Dok kosti šake omogućavaju istančane kretnje i služe za hvatanje, precizan i složen rad, stopala imaju funkciju održavanja stabilnosti i kretanja tijela. Stoga su kosti šake razvijenije i kratke, dok su kosti stopala slabije razvijene, masivnije i duže. Korijen stopala čini sedam kostiju (ossa tarsi), koje su raspoređene u dva reda, stražnji i prednji. U stražnjem redu su dvije najveće kosti, gležanjska kost (talus) i petna kost (calcaneus), dok se u prednjem redu nalazi pet kostiju koje trpe najveće opterećenje. Kosti donožja ili međunožja (ossa metatarsi) su duguljaste i ima ih pet. Kosti prstiju stopala (ossa digitorum pedis) su duguljaste i oblikuju pet prstiju.

2.3 Zglobni sustav

Spoj ili zglob (junctura) predstavlja skup elemenata pomoću kojih se kosti međusobno spajaju. Ovi spojevi između kostiju omogućavaju stabilnost, elastičnost i gibljivost pojedinih dijelova ili cijelog tijela. Anatomskim i funkcionalnim zahtjevima, najbolje odgovara podjela spojeva prema pokretljivosti, i to na nepokretne, polupokretne i pokretne.

Nepokretni zglobovi su urođene srasline različite prirode i to: koštane (synostosis, npr. kralješci), hrskavične (synchondroses, npr. završeci prednjih krajeva rebara) i vezivne prirode, šavovi (suturae) i fibrozne sveze (syndesmosis, npr. šavovi lubanje).

Polupokretni zglobovi vezuju kratke kosti snažnim zglobnim čahurama i svezama. To su uglavnom zglobovi između kratkih kostiju šake, stopala i kralješnice. Amplitude pokreta u tim zglobovima su male, ali neophodne i važne. Pomoću njih se u velikoj mjeri ublažavaju dodiri sa čvrstom podlogom, čime se ublažavaju vibracije koštanih dijelova tijela.

Pokretni ili pomični spojevi su pravi zglobovi (articulationes synoviales). Kod njih razlikujemo glavne i sporedne dijelove. U glavne dijelove spadaju: zglobna tijela i površine, zglobna šupljina i zglobna čahura. Zglobna tijela čine krajevi kostiju koja su obično priljubljena, a često i utisnuta jedno u drugo pa kažemo da su to pravilni ili sukladni (kongruentni) zglobovi. Međuprostora između zglobnih površina gotovo da i nema. Kod nepravilnih (diskongruentni) zglobova njihova tijela nisu priljubljena pa tu sukladnost ostvaruju zglobni koluti (discus) ili zglobni meniskusi (meniscus). Zglobnih površina (facies articulares) u svakom zglobu ima obično po dvije, jedna je udubljena (konkavna), a druga izbočena (konveksna). Obložene su tankim slojem glatke i sjajne zglobne hrskavice (cartilago atricularis) što smanjuje trenje, štiti koštane zglobne plohe, a istodobno elastičnošću ublažuje pritisak, opterećenja, potrese i udare.

Zglobna šupljina (cavum articulare) je pukotinast, kapilarni prostor između zglobnih površina, karakterističan za pokretne zglobove. Ona sadrži sluzavu tekućinu (synovia) koja omogućuje ishranu zglobnih hrskavica i lako klizanje zglobnih površina.

Zglobna čahura (capsula articularis) potpuno obavija i nepropusno zatvara čitav zglob, rubovima se vezujući za krajeve koštanih zglobnih tijela. Na zglobnoj čahuri razlikuju se dva sloja (opne), vanjski fibrozni (membrana fibrosa) i unutarnji sinovijalni (membrana synovialis). Fibrozni sloj daje zglobnoj čahuri čvrstoću i elastičnost, dok sinovijalna opna oblaže unutarnju površinu fibroznog sloja i sveze unutar zgloba te pokriva dijelove kosti koje nisu pokrivene zglobnom hrskavicom. Sinovijalna opna ima malu elastičnost, otporna je i teško se kida. Izlučuje bistru zglobnu tekućinu (synovia), koja vlaži slobodne površine u zglobu i omogućuje im lakše klizanje i gibljivost.

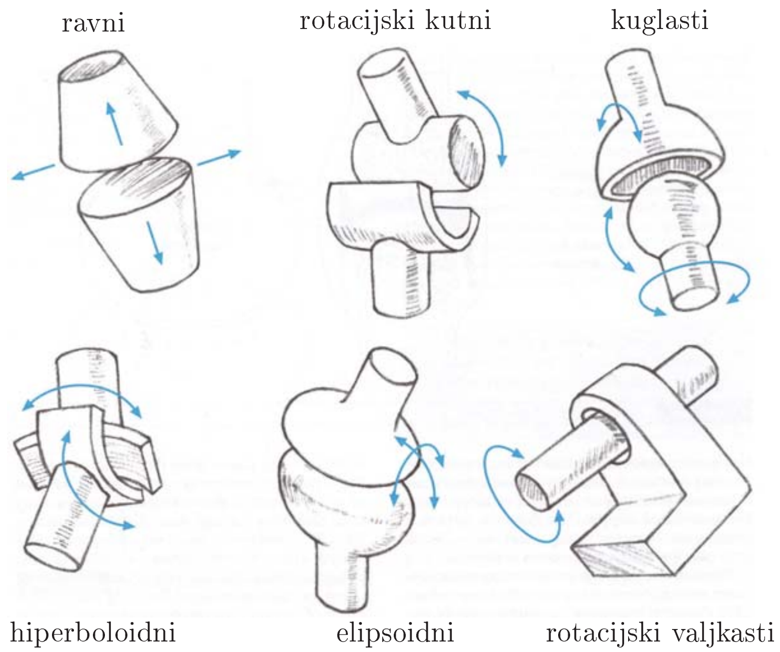
U sporedne dijelove pokretnih spojeva (sreću se samo kod pojedinih zglobova) spadaju zglobne sveze (ligamenta), fibrozno-hrskavične ploče i zglobni mišići.

Zglobna sveza (ligamentum) je snop čvrstog veziva s kolagenim i elastičnim vlaknima. Zglobne sveze osim što pojačavaju zglobnu čahuru i osiguravaju spoj između kostiju ili dijelova kosti, imaju i aktivnu ulogu u dinamici zgloba. One pravcem i rasporedom svojih fibroznih vlakana, pojedine pokrete u zglobu ograničavaju ili ih dozvoljavaju samo do određenih granica, dok druge pokrete uvjetuju i omogućavaju.

Vezivno-hrskavične ploče nalaze se unutar pojedinih zglobova kao zglobni kolutovi, meniskusi i zglobni masni jastučići. Njihova je uloga ublažavanje udaraca kod različitih pokreta ili mogu služiti kao pokretne dopune zglobnih površina.

Zglobni mišići (musculi articulares) nalaze se u nekim zglobovima, a obično ih tvore vlakna susjednih mišića koja završavaju u zglobnoj čahuri. Oni izvlače zglobnu čahuru iz udubina nastalih pri pokretu i sprečavaju uklještenje čahure između zglobnih tijela.

S obzirom na to ulaze li u sustav zgloba dvije kosti, ili više, pokretni se zglobovi dijele u dvije skupine: jednostavne (articulatio simplex), takav je npr. rameni zglob, i složene (articulatio composita), npr. lakatni zglob. Prema obliku zglobnih površina (ilustracija 2.3) pokretni se zglobovi dijele



Ilustracija 2.3: Vrste mehaničkih zglobova prema obliku zglobnih površina.

na: kuglaste (art. spheroidea), elipsoidne (art. ellipsoidea), hiperboloidne (art. sellaris), rotacijske (art. trochoidea), a mogu biti kutni ili valjkasti (art. ginglymus), te ravne (art. plana).

2.3.1 Rotacije zglobova

Prilikom gibanja kosti ostvaraju određene rotacije. Zamišljeni pravac oko kojega sve pokretne točke kosti koja rotira opisuju dijelove kružnica naziva se os rotacije. Pojedini dijelovi čovjeka tijela ne mogu vršiti sva gibanja, tj. rotacije oko bilo koje osi. Ograničenja su uvjetovana oblikom zgloba. U tom se smislu prema mogućim rotacijama pokretni zglobovi mogu podijeliti na jednoosne, dvoosne i troosne zglobove.

Jednoosni pokretni zglobovi (kutni i rotacijski), prema obliku koštanih okrajaka koji ulaze u sastav zgloba, nazivaju se još i cilindričnim zglobovima. Naime, jedan koštani okrajak jednoosnog zgloba je cilindrično ispupčen, a drugi odgovarajuće cilindrično izdubljen. Tipični jedoosni zglobovi su zglobovi između članaka prstiju, te zglobovi lakta. Ovakav sastav zgloba omogućava rotaciju samo oko jednog pravca u ravnini okomitoj na taj pravac.

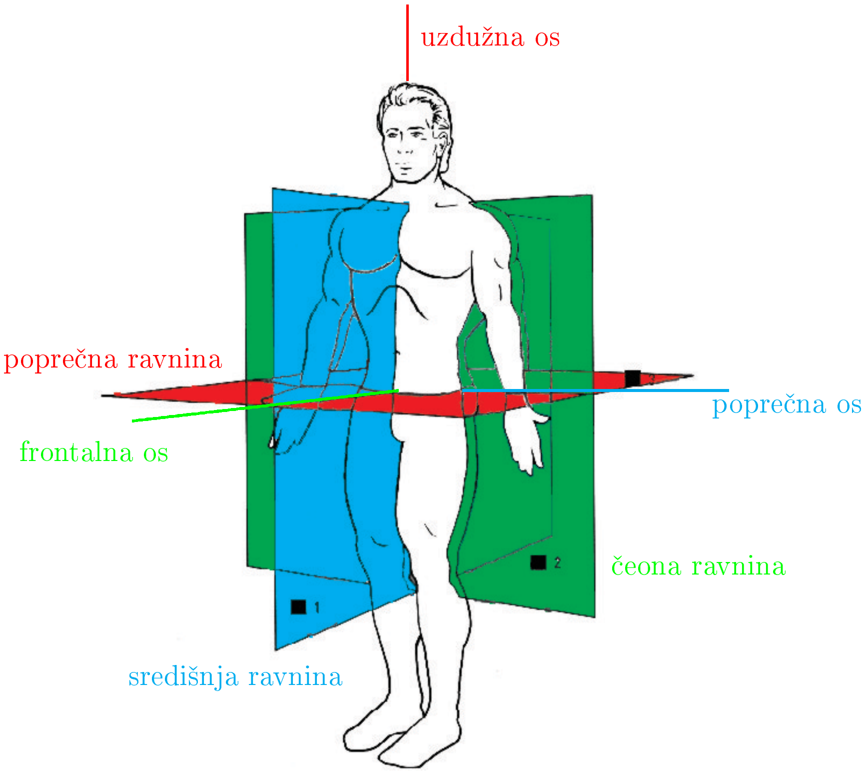
Dvoosni pokretni zglobovi (elipsoidni i hiperboloidni) imaju klizne površine koštanih okrajaka najčešće elipsoidnog (jajolikog) oblika ili hiperboloidnog (sedlastog) oblika. Jedan koštani okrajak je ispupčen, a drugi odgovarajuće udubljen. Jedna os rotacije kod ovakvih zglobova je udaljenija od kliznih površina u odnosu na drugu os rotacije. Kod elipsoidnih zglobova obje osi rotacije su na istoj strani zakrivljene površine, dok su kod hiperboloidnih na različitim stranama. Primjer dvoosnog zgloba je zglob korjena šake.

Troosni pokretni zglobovi (kuglasti) imaju okrajke sfernog oblika. Rotacije se mogu vršiti oko bilo koje osi koja prolazi kroz središte takve sfere pa tako i oko osi koja prolazi duž kosti čiji okrajak ulazi u sastav zgloba. Ovakvi zglobovi se još zovu i kuglasti ili sferoidni zglobovi. Primjeri troosnih zglobova su zglobovi ramena i zglobovi kuka.

Ako se pri pokretu nekog zgloba pređu njegove dozvoljene granice slobode gibanja, doći će do njegova iščašenja ili drugih vrsta povreda zgloba.

2.3.2 Osnovni pokreti u zglobovima

Pokret u pojedinom zglobu označava promjenu položaja jednog dijela u odnosu na drugi dio zgloba, tj. promjenu zglobnog kuta. Gibanje čovjeka označava promjenu položaja cijelog tijela u odnosu na svoju okolinu. Ova dva pokreta su, često, u uzajamnoj svezi jer se gibanje cijelog tijela najčešće zasniva na pokretima u zglobovima. Pokreti čovjeka mogu biti vrlo kompleksni zbog složenih gibanja dijelova tijela jednih u odnosu na drugi, tj. zbog istovremenih pokreta u više zglobova. Za opis i analizu čovjekova gibanja neophodno je poznavati pokrete koji se pri tome izvode pojedinačno u svakom zglobu te gibanje tijela u odnosu na okolinu. Stoga uvodimo tri osnovne ravnine tijela: središnja (ili medijalna), čeona (ili frontalna), i poprečna (ili horizontalna), koje su međusobno postavljene pod pravim kutevima (ilustracija 2.4).



Ilustracija 2.4: Tri osnovne ravnine tijela i osi rotacije.

Središnja ravnina prolazi sredinom tijela dijeleći ga na lijevi i desni dio. Osnovni zglobni pokreti koji se vrše u ovoj ravnini su pregibanje (ili fleksija) i ispružanje (ili ekstenzija).

Čeona ravnina prolazi sredinom tijela dijeleći ga na prednji i stražnji dio. Rotacije u čeonoj ravnini su lijevo i desno. U njoj se vrše pokreti odmicanja (ili abdukcije) i primicanja (ili adukcije).

Poprečna ravnina dijeli tijelo na gornji i donji dio. Osnovni zglobni pokreti u njoj su rotacije izvrtanja i uvrtanja.

Uz osnovne ravnine pokreta definiraju se tri osnovne osi rotacije: frontalna (okomita na čeonu ravninu), poprečna (okomita na središnju ravninu), i uzdužnu os rotacije (okomita na poprečnu ravninu). Drugdje u literaturi mogu se naći drugačiji pristupi nazivima osnovnih osi rotacije, gdje su osnovnim osima rotacije, na primjer, dana imena ravnina na koje su okomite. Iz definicija triju osnovnih ravnina i odgovarajućih osi rotacije, jasno je da se rotacije oko jedne osi vrše u odgovarajućoj ravnini. Na primjer, rotacije oko frontalne osi vrše se u čeonoj ravnini.

Naglasimo kako položaj gore definiranih osnovnih osi rotacije i ravina vrijede za tijelo kao cjelinu. Za svaki pojedinačni zglob definiraju se njegove osi i ravnine rotacije koje se kreću zajedno s tim zglobom. Za jednoosne zglobove tipično je pregibanje i ispružanje, za dvoosne pregibanje i ispružanje te primicanje i odmicanje. Kombinacijom navedenih pokreta za dvoosne i troosne zglobove može se dobiti i kruženje, redoslijedom: pregibanjem, odmicanjem, ispružanjem i primicanjem. Za troosne zglobove moguće su još i rotacije oko uzdužne osi ekstremiteta. Pored ovih osnovnih pokreta, postoje i različite varijacije.

Za biomehaniku sporta od značaja je, osim opisa pokreta i rotacija, i opis trenutnih položaja koje tijelo zauzima tijekom pokreta. Tako se za točke koje su bliže medijalnoj ravnini kaže da su medijalne (medianus, srednje), dok su u suprotnom lateralne (latus, strana). Točke ispred čeone ravnine su ventralne (venter, trbuh), dok su one iza nje dorzalne (dorsum, leđa). U odnosu na transverzalnu ravninu, točke iznad su postavljene kranijalno (cranium, lubanja), dok su u suprotnom postavljene kaudalno (cauda, rep). Posebno za ekstremitete, bez obzira na ravninu kretanja, vrijedi da su točke bliže trupu proksimalne, a dalje od trupa distalne. Tako, na primjer, šaka se nalazi distalno u odnosu na podlakat, a koljeno proksimalno u odnosu na skočni zglob.

2.3.3 Mehanička svojstva zglobova

Svojstva zglobova trebaju biti takva kako bi zglobovi mogli zadovoljiti uvjete vršenja osnovnih zglobnih funkcija. S jedne strane zglob treba osigurati što čvršću vezu između koštanih okrajaka, a s druge strane treba toj vezi osigurati što veću pokretljivost. Na osnovu toga možemo zaključiti da su osnovna mehanička svojstva zglobova čvrstoća i pokretljivost.

Čvrstoća zgloba podrazumijeva sposobnost zgloba suprotstavljanju silama koje djeluju u njemu i koje tijekom različitih gibanja nastoje izvršiti moguće iščašenje (dislokaciju) zgloba. Anatomski elementi koji osiguravaju čvrstinu zgloba, koji se obično nazivaju zglobnim stabilizatorima, dijele se na pasivne i aktivne.

Pasivne zglobne stabilizatore čine zglobne površine, zglobne čahure i zglobne sveze. Zglobne površine su obično konkavne kod jednog, a konveksne kod drugog zglobljenog koštanog okrajka. Svojim oblikom zglobne površine suprotstavljaju se mogućem isčašenju zgloba. Zglobne čahure, pored ostalih, imaju i mehaničku ulogu jer spajaju zglobljene okrajke, a svojim zatezanjem u nekim položajima ograničavaju njihove pokrete. Zglobne sveze pak (unutar i van zglobne čahure), zbog svoje vlastite čvrstoće u mnogim zglobovima predstavljaju najvažniji dio zglobne stabilnosti. Pored ovih navedenih zglobnih stabilizatora, smatra se da i razlika između atmosferskog tlaka i tlaka u zglobu (tj. podtlaka koji nastaje u zglobu, u slučaju razmicanja koštanih okrajaka pod uticajem vanjskih sila), također u određenoj mjeri stabilizira zglob. Inače, što su pasivni zglobni stabilizatori kraći i jači, zglobu će biti osigurana veća čvrstoća.

Sveze su najvažniji pasivni zglobni stabilizatori, a imaju sličnu strukturu i mehanička svojstva kao i mišićne tetive. Naime, mogu se lako deformirati u svim smjerovima osim u smjeru istezanja čime sprečavaju razmicanje koštanih okrajaka, a time i iščašenje zgloba. Međutim, treba napomenuti kako ovo vrijedi samo u slučajevima kada su sveze (i zglobne čahure) zategnute, odnosno, u maksimalnom otklonu. Između maksimalnih amplituda pokreta sveze često ne daju zglobovima potrebnu čvrstoću. Slično tetivama, sveze imaju i izražena elastična svojstva čime se štite od mogućih povreda, a sustavu kratkih kostiju (npr. stopalo, kralješnica, šaka) daju umjerenu pokretljivost i potrebnu elastičnost. Kao primjer možemo navesti elastičnost stopala koja je od posebnog značaja za učinkovitost i ekonomičnost kretanja, jer se u svezama i mišićima stopala akumulira energija elastične deformacije koja se koristi u narednim fazama pokreta (npr. kod uzastopnih maksimalnih odraza). Osim toga, elastičnost stopala amortizira udare koji nastaju pri sudarima s podlogom čime sprečava oštećenja drugih dijelova sustava za pokretanje kao i nekih unutarnjih organa.

U aktivne zglobne stabilizatore spadaju mišići čija je uloga složenija od uloge pasivnih stabilizatora. Mišići mogu biti uobičajene, pa i veće duljine, no važna je njihova snaga. U većini položaja tijela sila mišića djeluje u pracu zgloba i time ne dopušta razmicanje kostiju. Međutim, u nekim položajima zgloba radijalna komponenta mišićne sile djeluje u suprotnom smjeru i teži razmicanju zglobljenih koštanih okrajaka. Zbog toga, kao i zbog drugih nepovoljnih djelovanja (npr. držanje velikih tereta), stabilnost zgloba može biti ugrožena. No, pri izvođenju takvih pokreta, uz mišiće agoniste istovremeno počinju djelovati određenom silom i mišići antagonisti, što uzrokuje pojavu mišićne koaktivnosti (sinergije). Na primjer, kod nošenja putnih torbi osjećamo aktivnost dvoglavog mišića (mišić biceps), ali i troglavog mišića (mišić triceps) nadlaktice koji svojim silama povećavaju čvrstoću zgloba i ne dozvoljavaju razmicanje zglobnih elemenata. Ova pojava zajedničkog djelovanja mišića agonista (mišić biceps) i mišića antagonista (mišić triceps) smanjuje mišićnu efikasnost (antagonisti usporavaju pokret), ali zato u datim uvjetima kada je ugrožena stabilnost zgloba, mišićna koaktivnost povećava njegovu čvrstoću. Smatra se kako je pojava mišićne koaktivnosti najvažnija u stabilizaciji zgloba u uvjetima ekstremnih opterećenja, ali se javlja i u mnogim svakodnevnim motoričkim aktivnostima. Ova uloga koaktivnosti mišića objašnjava i pojavu raznih povreda i deformacija. Naime, naglim jačanjem jedne grupe mišića, a bez istovremenog jačanja njihovih antagonista, slabi se stabilnost zgloba jer slabija mišićna grupa nije u mogućnosti suprotstaviti se svojim antagonistima u svim fazama pokreta, čime se povećava rizik od povrede.

Pokretljivost zgloba (ili fleksibilnost) definira se kao interval kuta osnovnog pokreta od jedne do druge amplitude. Na primjer, ako je amplituda fleksije u zglobu kuka 75^0, a ekstenzije 195^0, onda je njegova pokretljivost u središnjoj ravnini (ili oko središnje osi) 120^0. Ako zglob ima više osi rotacije, onda se pokretljivost određuje za svaku od njih posebno. Na primjer, kod zgloba kuka koji je troosni, možemo spomenuti još i pokretljivosti u čeonoj (oko 70^0) i poprečnoj ravnini (oko 50^0).

Pokretljivost zgloba je ograničena silama koje su intenzivnije u položajima bliskim amplitudi pokreta čime se sprečava gibanje van tih amplituda. Ograničenja pokreta dolaze od koštanog ograničenja, ograničenja zglobnih sveza, mišićnog ograničenja i ograničenja mekih tkiva. Kod koštanog ograničenja daljnji su pokreti nemogući jer koštani okrajci, koji ne pripadaju zglobnim površinama, nalegnu jedan na drugog. Kod ograničenja zglobnih sveza pokreti su onemogućeni zbog pretjeranog zatezanja ligamenata i zglobne čahure. Kod mišićnih ograničenja daljnji pokreti su spriječeni pasivnim silama otpora maksimalno istegnutog mišića. Ovakva pasivna mišićna sila javlja se u skoro svim amplitudama pokreta. Naime, kada mišići agonisti vrše pokret u smjeru svoga djelovanja, njihovi se antagonisti izdužuju. Maksimalna dužina mišića antagonista tog pokreta obično je prilagođena tim amplitudama pa u njima ne djeluju znatnije pasivne sile. Kod ograničenja mekih tkiva daljnji su pokreti spriječeni međusobnim naleganjem mekih tkiva dvaju susjednih segmenata. Ovakvo ograničenje zglobne pokretljivosti postaje dominantno u mnogim zglobovima kod osoba s izrazitom mišićnom hipertrofijom (npr. kod body-bildera, atletičara bacača, i drugih).

Svaki zglob ima mogućnost gibanja s većim ili manjim amplitudama. Takve kvantitativne razlike u pokretljivosti navode na sadržajnu podjelu pokretljivosti, na funkcionalnu i rezervnu pokretljivost.

Funkcionalna pokretljivost je pokretljivost s manjim amplitudama kretanja koja se manifestira u pokretima iz svakodnevnog života. U slučaju neočekivanih djelovanja drugih sila (npr. kod pada, klizanja, guranja, udarca, i slično), neophodno je koristiti veće amplitude gibanja. Na primjer, ako bi se pješak okliznuo, dok bi se njegova situacija registrirala u mozgu, sila teže bi dovela njegovo tijelo u takav položaj da je vrlo moguć pad (npr. nagib prema naprijed). U tom slučaju, čovjek mora brzo i s velikom amplitudom iskoračiti prema naprijed. Kad bi pješak imao samo funkcionalnu amplitudu gibanja u zglobu kuka, on ne bi mogao spriječiti pad. Stoga je važna rezervna pokretljivost. Rezervna pokretljivost je dodatak funkcionalnoj pokretljivosti i omogućava mnogo veće pokrete od onih u svakodnevnom životu. Rezervna se pokretljivost može povećavati sustavnim vježbama za jačanje, rastezanje i opuštanje mišića, tako da se u svakom zglobu može postići maksimalna amplituda gibanja za danu konstrukciju zgloba.

Problemi zglobne pokretljivosti nisu od značaja samo u općim anatomskim i biomehaničkim analizama uloge lokomotornog sustava, već i u posebnim položajima i pokretima čovjeka (npr. u gimnastici i baletu). Naime, povećanjem pokretljivosti može se znatno poboljašati učinkovitost mnogih pokreta sportaša, a naročito kod skokova, bacanja i trčanja. Time se objašnjava veliki značaj koji se daje treningu pokretljivosti kod sportskog treninga.

2.4 Mišićni sustav

U biomehaničkom smislu, čovjekova svakodnevna aktivnost je rezultat međudjelovanja vanjskih i unutarnjih sila. Na određene vanjske sile čovjek ne može utjecati (npr. gravitacijska sila), dok na pojedine može i to na neizravan način. Tako može utjecati na otpor zraka smanjenjem brzine kretanja ili promjenom položaja tijela (aerodinamičnost) ili na trenje s podlogom upotrebom odgovarajuće opreme (npr. klizaljke, skije). Na većinu unutarnjih sila čovjek ne može izravno utjecati (npr. na silu interakcije između koštanih poluga, zglobno trenje). Jedina sila koja je izravno pod kontrolom čovjeka je sila određenih mišića. Odavde slijedi važnost uloge mišića u pokretima čovjeka. Prema tome gledano s neurofiziološkog, histološkog, biokemijskog, i drugih aspekata, mišići predstavljaju vrlo složen biološki i biomehanički sustav. Posljedica toga je i složenost djelovanja mišića pri obavljanju njegove osnovne funkcije u sustavu čovjekovog tijela.

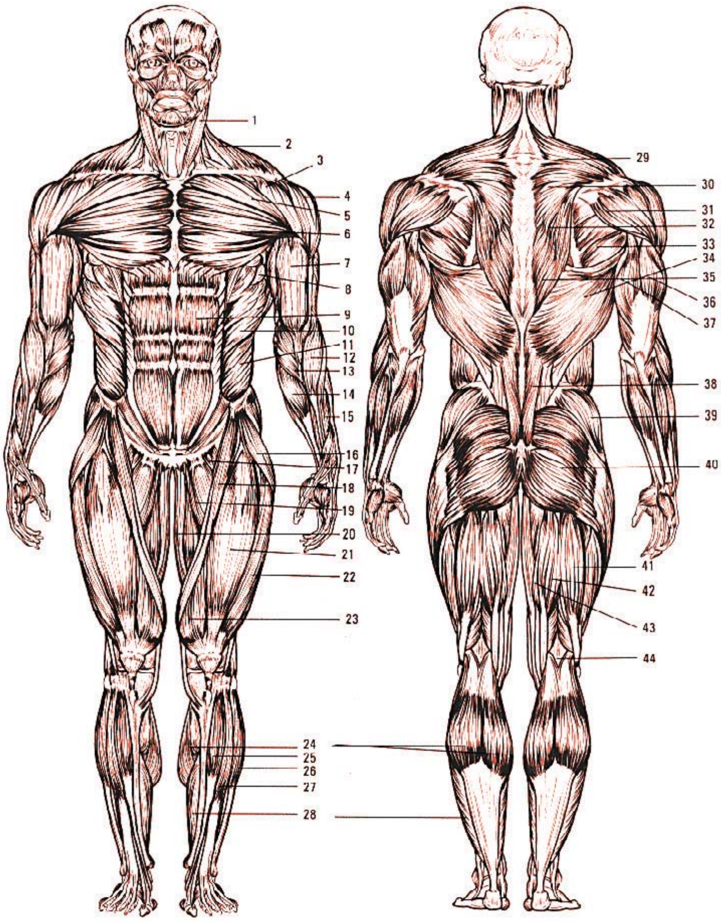
2.4.1 Oblik, dijelovi i građa mišića

Mišići pokrivaju cjelokupan kostur čovjeka, popunjavaju određene tjelesne prostore i nalaze se u svim unutarnjim organima (ilustracija 2.5). Mišići su sastavljeni od mišićnog tkiva pa, prema klasičnoj podjeli, s obzirom na građu i funkciju razlikujemo tri vrste mišićnog tkiva: srčano, glatko i poprečno-prugasto. Srčani i glatki mišići su pod kontrolom autonomnog (vegetativnog) živčanog sustava dok se poprečno-prugasti mišići nalaze pod kontrolom somatskog (animalnog) živčanog sustava.

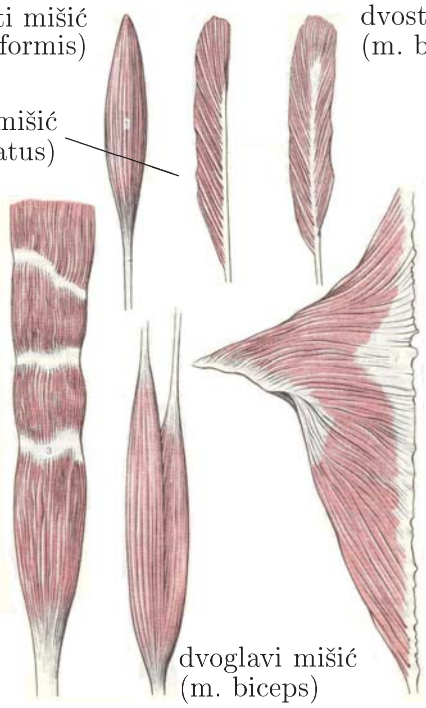
Prema vanjskom izgledu mišiće dijelimo na duge, kratke, plosnate i široke. Na svakom mišiću razlikujemo polazište ili početak (origo), srednji dio ili trbuh (venter) i hvatište ili završetak (insertio). Početni dio mišića nazivamo glava (caput), a završni dio rep (cauda).

Prema obliku mišiće dijelimo na jednostavne i složene (ilustracija 2.6). Jednostavni mišići su: vretenasti, lepezasti, perasti, četverokutasti i kružni. Složeni mišići također mogu biti različitih oblika. Kada se na istu završnu tetivu hvataju dvije, ili više mišićnih glava (što počinju na različitim mjestima iste kosti ili na različitim kostima), razlikujemo dvoglave (m. biceps), troglave (m. triceps) i četveroglave (m. quadriceps) mišiće. Nadalje, mišići mogu imati dvije ili više završnih tetiva (npr. tetiva m. fleksor digitorum longusa završava na nekoliko prstiju). Tetiva također može biti umetnuta između dvaju ili više mišićnih trbuha, pa govorimo o dvotrbušnom ili višetrbušnom mišiću.

Predmet našeg razmatranja bit će samo poprečno-prugasto mišićno tkivo koje se, zbog toga što je pod kontrolom somatskog živčanog sustava, odnosno čovjekove volje, naziva još i voljno mišićno tkivo. Poprečno-prugasto mišićno tkivo je najrazvijenije u čovjekovu tijelu. Ono oblikuje mišiće glave, trupa i udova i najvećim dijelom je vezano za kosti ali i za kožu, organe glave i vrata, te za izlazne otvore probavnog i urogenitalnog sustava. Stoga često susrećemo naziv skeletno mišićno tkivo. Poprečno-prugasto mišićno tkivo sastoji se od mišićnih vlakana. Mišićno vlakno predstavlja više mišićnih ćelija, koje su udružene i obrazuju cilindričnu formaciju debljine 10-100 mikrona čija duljina može varirati od nekoliko milimetara pa do 15 ili više centimetara. Mišićno vlakno omotano je tankom opnom koju nazivamo sarkolema (sarcolemma). Ispod sarkoleme nalaze se brojne jezgre i trup stanice. Citoplazmu mišićnog vlakna nazivamo sarkoplazma (lat. sarcos, meso), a u njoj se nalaze mišićna vlakanca miofibrili (myofibrilae). Mišićna vlakanca su produkt sarkoplazme i ispunjavaju mišićno vlakno raspoređujući se jednolično ili u obliku snopova. Mišićna vlakanca tvore dvije tvari s različitim optičkim svojstvima i različitim kemijskim sastavom. Mikroskopskim pregle-



Ilustracija 2.5: 1. m. sternocleidomastoideus, 2. m. trapezius, 3. m. deltoideus-prednji dio, 4. m. deltoideus-srednji dio, 5. m. pectoralis major-pars clavicularis, 6. m. pectoralis major-pars sternalis, 7. m. biceps brachii, 8. m. serratus anterior, 9. m. rectus abdominis, 10. m. obliquus internus abdominis, 11. m. obliquus exsternus abdominis, 12. m. brachioradialis, 13. m. palmaris longus, 14. m. flexor carpi radialis, 15. m. extensor carpi radialis, 16. m. tensor fasciae late, 17. m. pectineus, 18. m. sartorius, 19. m. adductor longus, 20. m. gracillis, 21. m. rectus femoris, 22. m. vastus lateralis, 23. m. vastus medialis, 24. m. gastrocnemius, 25. m. tibialis anterior, 26. m. peroneus longus, 27. m. extensor digitorum longus, 28. m. soleus, 29. m. levator scapule (nalazi se ispod m. trapeziusa), 30. m. rhomboideus (nalazi se ispod m. trapeziusa), 31. m. deltoideus posterior, 32. m. trapezius-srednji dio, 33. m. teres major, 34. m. latissimus dorsi, 35. m. trapezius-donji dio, 36. m. triceps brachii-lateralna glava, 37. m. triceps brachii-duga glava, 38. m. erector spinae, 39. m. gluteus medius, 40. m. gluteus maximus, 41. m. biceps femoris, 42. m. semitedninosus, 43. m. semimembranosus, 44. m. popliteus.

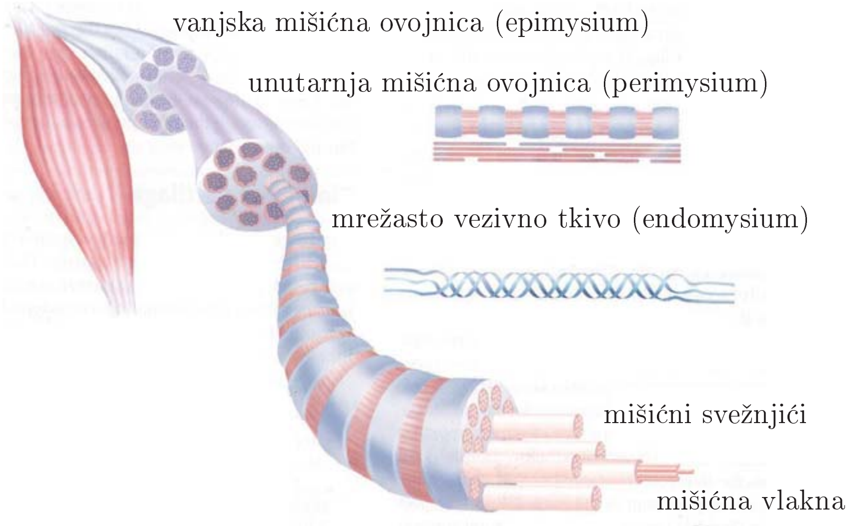


Ilustracija 2.6: Vrste mišića prema obliku.

dom mišićnih vlakanaca zapažamo poprečne pruge, svijetle i tamne boje, što je rezultat nejednakog prelamanja svjetlosti zbog njihovog različitog kemijskog sastava.

Kod čovjeka, a i kod mnogih drugih kralješnjaka postoje dvije vrste poprečno-prugastog mišićnog tkiva: crveno (tamno) i bijelo (blijedo). Tamna vlakna imaju puno sarkoplazme i manje se umaraju dok se blijeda vlakna s malo sarkoplazme brže umaraju, ali su zato sposobnija za brze kontrakcije. Svako mišićno vlakno poprečno-prugastog tkiva može djelovati kao zasebna cjelina i po tome se bitno razlikuje od ostalih tipova mišićnog tkiva. Time se može objasniti mogućnost djelimične aktivnosti mišića. Tako se može dogoditi da različiti snopovi istog mišića izvode u jednom zglobu potpuno različite pokrete.

Mišićna vlakna su ovijena rahlim i mrežastim vezivnim tkivom (endomysium) i ujedinjuju se u manje (primarne) mišićne svežnjiće (ilustracija 2.7). Oni su isto tako ovijeni rahlim vezivnim tkivom i udružuju se u veće



Ilustracija 2.7: Struktura mišića.

(sekundarne i tercijarne) mišićne snopiće i snopove. Cjelokupno vezivno tkivo koje ovija i spaja mišićna vlakna, svežnjće, snopiće i snopove vlakana međusobno je povezano i čini cjelinu koju zovemo unutarnjom mišićnom ovojnicom, perimysium internum. Cijeli mišić izvana ovija vanjska ovojnica mišića, perimysium externum (ili epimysium). Krvni sudovi i živci ulaze u mišić obično na mjestu što odgovara geometrijskoj sredini mišića, ali bliže debljem kraju mišića.

2.4.2 Djelovanje mišića

Osnovna fiziološka svojstva mišića su razdražljivost, sprovodljivost podražaja i kontraktilnost. Zbog bioelektričkih i biokemijskih procesa dolazi do kontrakcije mišića, koja generira silu određene veličine, uz pretvorbu kemijske energije u mehaničku i toplinsku [1]. Kontrakcijom mišića nastaje dinamička

[1]Energija potrebna za kontrakciju mišića nastaje hidrolitičkim cijepanjem trifosfata (ATP), uz pomoć fermenta miozina ATP-aze, u adenozindifosfat (ADP) i anorganski fosfat. Energija nastala cijepanjem ATP pri izotoničkoj kontrakciji troši se dijelom kao mehanička energija kontrakcije, a dijelom kao toplinska energija. Pri izotoničkoj kontrakciji mišić se skraćuje, ali je u njemu uvijek održana ista napetost. Pri tome nastaje sila koja pokreće i daje ubrzanje objektu (kostima) za koji se mišić hvata. Izometrička kontrakcija nastaje kada su hvatišta mišića učvršćena i nepomična, pa se pri podražaju mišić

akcija, tj. pokret. Veličina proizvedene sile kojom mišić djeluje na svoja hvatišta (pripoje) ovisi o broju istovremeno angažiranih motoričkih jedinica i o akcijskom potencijalu ekscitacije tih jedinica.

Djelovanje mišića temelji se na sposobnosti kontrakcije ili grčenja, koja nastaje djelovanjem podražaja iz središnjeg živčanog sustava, sposobnosti relaksacije ili opuštanja koje nastaje prestankom podražaja i sposobnosti istezanja ili elongacije. Mišićno se vlakno u opuštenom stanju se pri najjačoj kontrakciji (prema Weber-Fickovu zakonu) može skratiti čak za jednu polovicu svoje dužine. Razliku između najveće i najmanje moguće dužine mišića zovemo raspon ili amplituda kontrakcije. Aktiviranjem mehanizma kontrakcije, mišić djeluje protiv vanjske sile preko koštanih poluga. Odnos na poluzi transformirane mišićne sile i vanjske sile određuje tip kontrakcije.

Kontrakcija mišića može biti dvojaka u odnosu na silu koju generira mišić i silu kojima se mišićna sila suprotstavlja. Ako je sila mišića veća od vanjske sile, mišić će se skratiti i tada govorimo o koncentričnoj (izotoničkoj) kontrakciji. Ukoliko je vanjska sila veća od mišićne sile, usprkos kontrakciji, dolazi do istezanja mišića, što se označava kao ekscentrična (pliometrička) kontrakcija. Međutim, ako je vanjska sila u ravnoteži s mišićnom silom, a dužina mišića ostaje nepromijenjena, u tom se slučaju radi o izometrijskoj (izometričkoj) kontrakciji. Ovisno o tipu kontrakcije razlikujemo statičku i dinamičku mišićnu silu. Kao i svaka druga sila i sila mišića ima četiri osnovne značajke, i to: veličinu ili intenzitet, pravac djelovanja, smjer i hvatište djelovanja mišića. Smjer djelovanja mišića određen je i odnosom pravca djelovanja mišića prema uporištu zgloba, pa mišiće dijelimo na pregibače ili fleksore (smješteni ispred osi zgloba i međusobno primiču dva zgloba), opružače ili ekstenzore (smješteni iza osi zgloba i suprotne su orijentacije), primicače ili aduktore (leže postranično prema zglobu i primiču kost prema tijelu), odmicače ili abduktore (leže postranično prema zglobu i odmiču kost od tijela) i obrtače ili rotatore (postavljeni su ukoso na os zgloba i rotiraju kost oko uzdužne osi). Po djelovanju razlikujemo još i mišiće podizače ili levatore, natezače ili tenzore i ispravljače ili erektore. Također treba napomenuti da postoje mišići koji sudjeluju izravno u radu različitih organa ili dijelova tijela gdje nema koštanih poluga kao npr. kružni mišići ili sfinkteri, i rastezači ili dilatatori.

Prema tome, djeluju li mišići pozitivno ili negativno na određeno gibanje zgloba, razlikujemo suradne mišiće ili sinergiste i mišiće koji suprotno djeluju, a zovu se protivni mišići ili antagonisti. Međusobni odnos siner-

ne može skratiti, ali se u mišiću povećava napetost, a sva energija nastala cijepanjem ATP pretvara u toplinsku.

gista i antagonista, u odnosu na njihovo djelovanje, je od velikog značaja za prirodne pokrete. Kod kontrakcije sinergista, antagonisti se, zahvaljujući recipročnoj inervaciji (Sherrington), postupno opuštaju i na taj način reguliraju rad sinergista kočeći brzinu pokreta. Ako pak dođe do istovremene kontrakcije i antagonista i ako se rezultanta sila sinergista i antagonista poklopi s točkom rotacije, zglob se prestaje kretati i u određenom položaju biva fiksiran. Zahvaljujući ovom usklađenom djelovanju sinergista i antagonista, pokreti čovjekova tijela, ili jednog njegovog dijela, su odmjereni i ujednačeni.

2.4.3 Sile koje djeluju na tijelo i komponente mišićne sile

Sile koje djeluju u kretanju čovjeka možemo podijeliti na unutarnje i vanjske. Unutarnje sile koje nastaju i djeluju nutar lokomotornog sustava su: mišićna sila, sila interakcije među kostima, sila trenja između zglobova, sila abdominalnog tlaka, sila zatezanja zglobnih stabilizatora i sila mekih tkiva. O mišićnoj sili je već bilo govora, dok je druga po značajnosti sila koštane interakcije sila koja se javlja u točki dodira zglobljenih koštanih okrajaka. Ona nastaje kao posljedica djelovanja drugih sila na dijelove tijela, koje se zatim prenose duž kinetičkih lanaca. U nekim kretanjima, iznos sile koštane interakcije mogže biti 20 do 30 puta veći od težine tijela (npr. pri doskoku s veće visine). Zbog toga se ove sile smatraju najvećim silama koje se razvijaju unutar lokomotornog sustava. Osim ove sile pojavljuje se i sila zglobnog trenja koja nastaje pri pokretima u zglobu kada zglobne površine klize jedna po drugoj. Ona je proporcionalna sili koštane interakcije. Nadalje, postoji i sila abdominalnog tlaka koja nastaje kao rezultat nadtlaka koji se stvara unutar trbušne šupljine, a koji nastaje kontrakcijom mišića koji je okružuju. Funkcija ove sile je davanje oslonca kralješnici pri podizanju teških tereta u nepovoljnim položajima. Sila zatezanja zglobnih stabilizatora i sila mekih tkiva pojavljuju se u trenucima (i izrazito su velike) kada ograničavaju amplitidu nekih pokreta.

Vanjske sile nastaju interakcijom između tijela čovjeka i okoline u kojoj se on kreće. Najvažnije vanjske sile su gravitacija, sila trenja, sila reakcije podloge, sila otpora okoline, te mnoge druge sile, koje će se kasnije detaljnije obraditi.

Mišićna sila nastaje kao rezultat superpozicije, tj. zbrajanja više neovisnih komponenti. Da bismo razumjeli mehanička svojstva mišića važno je razumjeti svojstva tih komponenti. Osim toga, sile koje ove komponente razvijaju razlikuju se kako po svojoj ovisnosti o režimu rada mišića (kontrakcije) i stupnja aktivacije mišića, tako i po svojoj anatomskoj lokaciji.

Aktivna komponenta mišićne sile nastaje kao rezultat međudjelovanja aktinskih i miozinskih niti mišićnog vlakna. Ona nastaje u mišićnim vlaknima, a razvija se samo kada je mišić aktivan. Pasivna komponenta mišićne sile nastaje kao posljedica suprotstavljanja prekomjernom izduživanju vezivno-potpornog mišićnog tkiva. Nalazi se kako unutar mišića, tako i u mišićnim ovojnicama i tetivama. Zbog toga ova sila nastaje samo pri većim istezanjima mišića, dok se kod manjeg istezanja može zanemariti. Viskozna komponenta mišićne sile nastaje kao posljedica viskoznosti (unutarnje trenje) mišića. Naime, mišićno tkivo se, u izvjesnom smislu, ponaša kao fluid, jer se pri međusobnom klizanju aktinskih i miozinskih niti javlja unutarnje trenje. Iz toga slijedi da će viskozna komponenta mišićne sile postojati samo ako se dužina mišića mijenja (ekscentrična i koncentrična kontrakcija). Za razliku od druge dvije komponente viskozna komponenta može djelovati u oba smjera. Ako neka vanjska sila izdužuje mišić, ona se tome opire i djeluje u smjeru skraćenja, a ako se mišić skraćuje, npr. pod utjecajem aktivne sile, viskozna se komponenta opet tome opire i djeluje u smjeru izduživanja.

Na osnovu navedenog možemo zaključiti da aktivna komponenta djeluje samo ako je mišić aktivan, dok druge dvije komponente ne zavise o nivou mišićne aktivacije, već o obliku i strukturi mišića kao i trenutnim uvjetima njegovog rada. Prema tome možemo kazati da čovjek, odnosno njegov živčani sustav, izravno upravlja samo aktivnom komponentom mišićne sile.

2.4.4 Ovisnost sile mišića o površini fiziološkog presjeka

Uspoređivanjem različitih mišića iste osobe ili jednakih mišića kod različitih osoba (pri jednakom stupnju aktivacije), sila koju mišić razvija najviše ovisi o njegovom fiziološkom presjeku. Fiziološki presjek mišića možemo definirati kao zbroj pojedinačnih površina poprečnih presjeka svih mišićnih vlakana, a što je različito za različite oblike mišića, npr. vretenast, perast ili neki drugi mišić. Pri maksimalnoj voljnoj aktivaciji u izometrijskom režimu rada i pri srednjoj duljini mišića, aktivna komponenta razvija prosječnu silu u iznosu od 50 N na površinu od 1 cm^2. U literaturi ova se vrijednost kreće od 10 N pa sve do 100 N na površinu od 1 cm^2, ovisno o metodi određivanja, odabranom mišiću i drugim svojstvima. Ova vrijednost ovisi i o utreniranosti, jer se pokazalo kako vrhunski sportaši razvijaju nešto veću silu i snagu po jedinici fiziološkog presjeka od nesportaša. Ako je poznata površina fiziološkog presjeka mišića, tada je moguće odrediti vrijednost sile kojom mišić djeluje na svojim hvatištima. Biomehaničkim istraživanjima potvrđeno je kako se mišićna sila najviše povećava povećanjem fiziološkog presjeka mišića, odnosno mišićnom hipertrofijom. Zahvaljujući tome sportaši u disciplinama gdje dominira snaga (bacači, skakači i sprinteri u atletici, dizači utega) postižu nešto veće vrijednosti maksimalne izometrijske sile po jedinici fiziološkog presjeka mišića, od sportaša u disciplinama gdje je izražajnija izdržljivost (dugoprugaši, biciklisti, neki plivači i dr.).

2.4.5 Ovisnost sile mišića o duljini

Pri svakom gibanju duljina mišića se mijenja i, kako je to u svim eksperimentima pokazano, takve promjene utječu i na njegovu silu. Pokazano je kako se mišić kostura može skratiti ili izdužiti za oko trećinu svoje srednje fiziološke duljine [2]. To podrazumijeva kako je omjer između minimalne i maksimalne duljine mišića (ne računajući tetive) 1 naprama 2. Ovisnost sile o duljini mišića naziva se relacijom sila-duljina. Aktivna komponenta mišićne sile pri jednakom stupnju aktivacije razvija najveću silu pri srednjoj duljini mišića. Međutim, ovisnost sile mišića o duljini pokazuje kako mišić može djelovati određenom silom samo u ograničenom intervalu svoje duljine, odnosno ako mu je duljina između minimalne i maksimalne vrijednosti. Budući da postoje segmenti izvan ovog intervala (manji od minimalne i veći od maksimalne duljine) govorimo o dva slučaja mišićne insuficijencije, aktivnoj i pasivnoj. Aktivna insuficijencija je pojava nemogućnosti djelovanja silom dovoljno velikog iznosa pri nekim zglobnim kutevima jer je mišić previše skraćen.

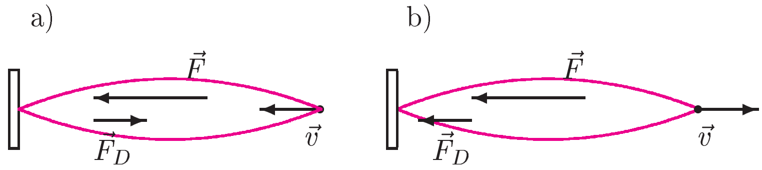
Pasivna insuficijencija je pojava ograničenja amplitude pokreta u nekom zglobu jer je mišić maksimalno izduljen, tako da se velikim iznosom pasivne sile suprotstavlja daljnjem produljenju. Pri svakodnevnim pokretima čovjeka pojave aktivne i pasivne insuficijencije relativno su rijetke. Međutim u sportskim aktivnostima vježbama istezanja pokušavaju se pomaknuti granice pasivne insuficijencije, tj. povećati amplituda pokreta u zglobovima. Također treba napomenuti da na ovisnost sile o duljini mišića (relaciju sila-duljina), osim vježbama istezanja, možemo utjecati i treninzima.

2.4.6 Ovisnost sile mišića o brzini skraćivanja

Drugi, možda i najvažniji mehanički čimbenik o kojem ovisi mišićna sila, je brzina skraćivanja mišića. Uzrok tome je viskozna komponenta mišićne sile kojom se mišić suprotstavlja promjeni svoje duljine. Smjer djelovanja viskozne sile uvijek je suprotan smjeru promjene mišićne duljine, dok intenzitet te sile raste s brzinom promjene duljine mišića. Kako i aktivna i pa-

[2] Kada na tijelo, ili neke njegove dijelove, ne djeluju vanjske i unutarnje sile, zglobovi se postavljaju u tzv. fiziološki položaj. Kako zbog tonusa i vezivnog tkiva mišića u njemu ipak postoji djelovanje mišićnih sila, ali su ona izjednačena, duljina se mišića u tom položaju naziva srednja fiziološka duljina mišića.

sivna komponenta mišićne sile djeluju isključivo u smjeru skraćenja mišića, a viskozna komponenta uvijek suprotno, lako se zaključuje kako je mišićna sila pri ekscentričnoj kontrakciji veća nago pri koncentričnoj (ilustracija 2.8). Navedena će se razlika povećavati s povećanjem brzine produljivanja,



Ilustracija 2.8: Prikaz koncentrične (a), i ekscentrične (b) kontrakcije. Prikazane su aktivne ($\vec{F}$) i pasivne ($\vec{F}_D$) komponente sile ovisno o orijentaciji brzine ($\vec{b}$) gibanja mišića.

odnosno skraćivanja mišića. Ovo vrijedi pri konstantnom stupnju aktivacije mišića.

Analogno relaciji sila-duljina, ovisnost sile mišića o brzini njegovog skraćivanja najčešće se naziva relacijom sila-brzina. Pri koncentričnoj kontrakciji s povećanjem brzine skraćivanja mišića, njegova sila opada sve do maksimalne brzine pri kojoj mišić više ne može razviti silu (sila viskozne komponente potpuno poništava aktivnu i pasivnu silu mišića). Maksimalna brzina skraćivanja mišića direktno je proporcionalna njegovoj duljini. Pri ekscentričnoj kontrakciji, kada neka vanjska sila izdužuje mišić, sila kojom mišić djeluje na svojim hvatištima raste s povećanjem brzine. Taj rast je posljedica činjenice da u ovim uvjetima sile svih komponenti djeluju u istoj orijentaciji, a viskozna raste s brzinom produljivanja. Treninzima se može utjecati i na relaciju sila-brzina.

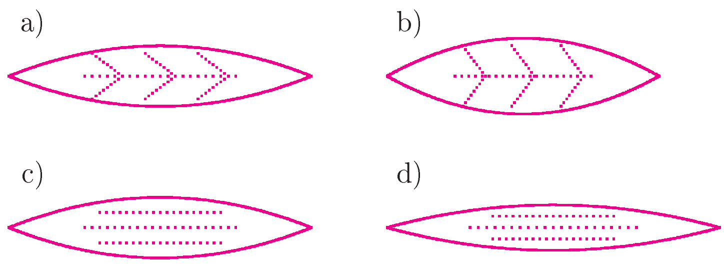
2.4.7 Ovisnost sile mišića o stupnju aktivacije

Ukupna sila aktivne komponente mišića ovisi o frekvenciji impulsa, kao i o ukupnom broju aktivnih motornih jedinica, što se zajednički naziva stupnjem aktivacije mišića. Povećanjem stupnja aktivacije mišića raste sila njegove aktivne komponente, a time i ukupna mišićna sila. Nivo aktivacije mišića u realnim kretnjama čovjeka neprekidno se mijenja. Rezultat toga je nesposobnost mišića da svoju silu trenutno prilagodi promjenjenom stupnju aktivacije. Stoga je potrebno neko vrijeme kako bi mišićna sila postigla vrijednost koja odgovara novom stupnju aktivacije. Vremenski interval tijekom kojega se mišićna sila prilagođava novom stupnju svoje aktivacije naziva se vremenom aktivacije i vremenom relaksacije. Analogno relacijama sila-duljina, sila-brzina, mehanička svojstva mišića (po kojoj njegova sila ovisi o vremenu proteklog od trenutka promjene njihove aktivnosti) kraće se naziva relacijom sila-vrijeme.

2.4.8 Ovisnost sile mišića o strukturi, arhitekturi i elastičnosti mišića

Kako je već prije spominjano postoji više vrsta mišićnih vlakana, pa samim time i motornih jedinica, jer je svaka motorna jedinica sastavljena od istovrsnih mišićnih vlakana. Iako postoji podijela na više rzličitih tipova, za nas će biti dovoljno podjeliti ih na dva tipa i to, brza i spora mišićna vlakna. Najvažnije razlike u mehaničkim svojstvima brzih i sporih vlakana su u parametrima relacije sila-brzina, u trajanju prijelaznog režima, u ekonomičnosti vršenja mehaničkog rada i otpornosti na zamor. Razna istraživanja pokazala su kako brza vlakna imaju veću maksimalnu brzinu skaraćivanja dok prelazni režim brzih vlakana kraće traje, odnosno, ta vlakna svojom silom brže prate promjene nivoa aktivacije mišića. Spora su vlakna, s druge strane, ekonomičnija jer isti mehanički rad izvrše s manjim utroškom metaboličke energije i sporije se umaraju. Skeletni su mišići najčešće sastavljeni od vlakana različite vrste i njihov postotak određuje strukturu mišića. Različiti mišići iste osobe imaju različitu strukturu, a time i mehanička svojstva, pa im se i funkcija bitno razlikuje. Međutim, najveći značaj strukture mišića je postojanje znatnih razlika u strukturi jednakih mišića kod različitih osoba na osnovu čega možemo, uvjetno, ljude podijeliti na brze i spore, već prema tome imaju li u strukturi svojih mišića natprosječan broj brzih ili sporih vlakana. Kako je struktura mišića genetski određena i ne može se mijenjati treningom, ona je jedan od najvažnijih faktora u sportskoj selekciji.

Arhitekturu mišića određuje omjer duljine mišića i površine fiziološkog presjeka mišića. Duljina se mišića može povećati ili izduživanjem mišićnih vlakana ili smanjenjem kuta njihovog pripajanja (npr. kod perastih mišića). Površina fiziološkog presjeka mišića može se povećati ili povećanjem spomenutog kuta pripajanja (čime se skraćuje mišić) ili hipertrofijom njegovih vlakana. Arhitektura mišića kod koje mišići imaju kratka vlakna i veću površinu fiziološkog presjeka razvijaju jaču mišićnu silu (npr. perasti mišići), dok kod arhitekture mišića kod koje su vlakana dulja i male površine fiziološkog presjeka (npr. vretenasti mišići), mišići imaju veću maksimalnu brzinu skraćivanja (ilustracija 2.9). Međutim, obje arhitekture mišića vrše jednak rad i imaju istu snagu, tako da mehanički učinak mišićnog rada i snage mišića ne ovisi o njegovoj arhitekturi, i može se povećati samo brojem ili hipertrofijom



Ilustracija 2.9: U odnosu na početno stanje (a), povećanje kuta pripajanja skraćuje mišić, ali mu povećava površinu presjeka (b). U odnosu na početno stanje (c), izduženje mišićnih vlakana (d) povećava duljinu, ali smanjuje površinu fiziološkog presjeka mišića.

mišićnih vlakana, odnosno povećanjem mišićne mase.

Dok mišićna vlakna imaju svojstvo razvijanja sile (aktivna komponenta mišićne sile) i svojom unutarnjom silom suprotstavljanje brzim promjenama svoje duljine (viskozna komponenta), vezivno tkivo mišića osim svojstva razvijanja pasivne sile, kojom se suprotstavlja prekomjernom produljenju mišića (pasivna komponenta), ima i svojstvo elastičnosti. Naime, ovo vezivno tkivo, nakon istezanja pod utjecajem vanjske sile, pokušava vratiti svoju prvobitnu duljinu. Posljedica ovog svojstva je, deformacijom (istezanjem) mišića, akumuliranje potencijalne energije elastične deformacije. Veća se energija akumulira za veće vrijednosti koeficijenta elastičnosti i većeg produljenja mišića. Istraživanja su pokazala kako se najveći dio energije elastične deformacije mišića akumulira u tetivama. Zato se umjesto o elastičnosti cijelog mišića, može govoriti o elastičnosti mišićnih tetiva i njihovom utjecaju na mehanička svojstva mišića. Kao što se treningom mogu mijenjati neka druga mehanička svojstva, tako treningom možemo mijenjati i mišićnu elastičnost.

2.4.9 Ovisnost mehaničkih svojstava mišića o zamoru i temperaturi mišića

Razna su istraživanja pokazala kako umjereni zamor, kao i umjerena promjena temperature mišića, slično utječu na mehanička svojstva mišića. Prema očekivanju, sniženje temperature i povećanje stupnja zamora mišića utječu negativno, posebno na oblik njegove relacije sila-brzina. Pri tome se znatno smanjuje maksimalna brzina skraćivanja mišića dok maksimalna izometrijska sila mišića ostaje skoro nepromjenjena.

Sniženje temperature i povećanje stupnja zamora mišića utječe i na oblik njegove relacije sila-vrijeme. Naime, ove promjene produljuju prijelazni režim mišića, pa vrijeme aktivacije i relaksacije mišića dulje traju. Za povišenje temperature vrijedi obrnuto, jer se tada vrijeme trajanja prijelaznog režima skraćuje. Zanimljivo je spomenuti kako se pri tome znatno više skraćuje vrijeme relaksacije nego vrijeme aktivacije.

Na kraju valja dodati kako starenje čovjeka prate i promjene u mehaničkim svojstvima mišića. Po mišljenju većine istraživača na ove promjene u znatnoj mjeri utječe suvremeni način života, odnosno fizička neaktivnost. Međutim, rezultati raznih istraživanja pokazali su kako se negativan utjecaj starenja na mehanička svojstva mišića može u znatnoj mjeri spriječiti vježbanjem.

Primjeri

1. U kojoj se od osnovnih ravnina događa najveći broj aktivnosti tijekom sprinta, te oko koje se osnovne osi rotacije događaju te aktivnosti?

   U središnjoj ravnini oko poprečne osi rotacije.

2. Kada zamahnete bejzbol-palicom, u kojoj se ravnini događa gibanje vodeće ruke te kakav se pokret događa?

   U poprečnoj ravnini, pokret odmicanja ili abdukcije.

3. Kada u odbojci udarate prvi udarac koji se pokret zbiva u ramenu ruke kojom udarate?

   Pokret ispružanja.

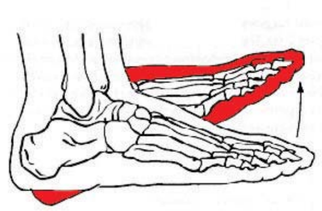
2.5 Prilog funkcionalnoj anatomiji

2.5.1 Mehanika i mišićna analiza pokreta u gornjem i donjem nožnom zglobu

Zglobove stopala (art. pedis) prema građi i položaju možemo podijeliti na zglob potkoljenice sa stopalom i zglobove između kostiju stopala. Za mehaniku su najvažniji gornji i donji nožni zglob koji zajedno čine kuglasti zglob u kojemu se vrše pokreti stopala u svim smjerovima. Gornji gležanjski zglob (articulatio talocruralis) promatran zasebno pravi je kutni zglob. Osovina zgloba smještena je potpuno poprečno i oko nje su mogući samo pokreti pregibanja i opružanja (dorzalna i plantarna fleksija), ilustracije 2.10 i 2.11. Opseg gibanja u gornjem nožnom zglobu je oko 70 stupnjeva, 25 stupnjeva

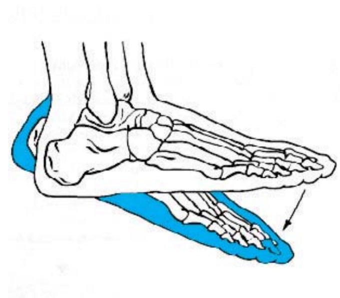
Ilustracija 2.10: Mišići koji vrše pokrete pregibanja (dorzalna fleksija) stopala u gornjem nožnom zglobu:

- prednji golenjični mišić (m. tibialis anterior)
- dugački opružač palca (m. extensor hallucis longus)
- dugački opružač prstiju (m. extensor digitorum longus)
- treći lisni mišić (m. peroneus tertius)



Ilustracija 2.11: Mišići koji vrše pokrete opružanje (plantarna fleksija) stopala u gornjem nožnom zglobu (u nekim anatomskim udžbenicima govori se o plantarnoj ekstenziji):

- troglavi goljenični mišić (m. triceps surae)
- tabanski mišić (m. plantaris)
- stražnji goljenjični mišić (m. tibialis posterior)
- dugački pregibač prstiju (m. flexor dogitorum longus)
- dugački pregibač palca (m. flexor hallucis longus)
- dugački lisni mišić (m. peroneus longus)
- kratki lisni mišić (m. peroneus brevis)



dorzalna fleksija i 45 stupnjeva plantarna fleksija (u normalnom stavu).

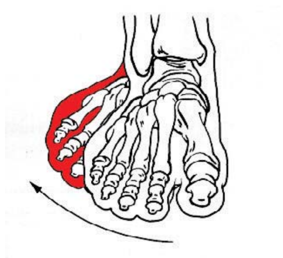
Pokreti primicanja i odmicanja (adukcija i abdukcija), ilustracije 2.12 i 2.13, vrše se u donjem gležanjskom zglobu (articulatio talocalcaneonavicularis) s odgovarajućim dopunskim pokretima u poprečnom zglobu (articulatio tarsi transversa). vrše se u donjem gležanjskom zglobu (articulatio talo-

Ilustracija 2.12: Mišići koji vrše pokrete primicanja s uvrtanjem (inverzija) stopala u donjem nožnom zglobu:

- dugački opružač palca (m. extensor hallucis longus)
- prednji goljenični mišić (m. tibialis anterior)
- stražnji goljenični mišić (m. tibialis posterior)
- dugački pregibač prstiju (m. flexor dogitorium longus)
- dugački pregibač palca (m. flexor hallucis longus)
- troglavi goljenični mišić (m. triceps surae)

Ilustracija 2.13: Mišići koji vrše pokrete odmicanja s izvrtanjem (everzija) stopala u donjem nožnom zglobu:

- dugački lisni mišić (m. peroneus longus)
- kratki lisni mišić (m. peroneus brevis)
- treći lisni mišić (m. peroneus tertius)
- dugački opružač prstiju (m. extensor digitorum longus) – lateralni dio



calcaneonavicularis) s odgovarajućim dopunskim pokretima u poprečnom zglobu (articulatio tarsi transversa). Pokreti se vrše oko zamišljene uzdužne osi i to pretežno u stražnjem dijelu donjeg nožnog zgloba (art. subtalaris). Pri odmicanju vrh se stopala pomiče prema vani, lateralno od središnje linije, a pri primicanju vrh se stopala pomiče prema unutra, medijalno prema središnjoj liniji. U donjem nožnom zglobu moguća je rotacija tj. pokreti uvrtanja i izvrtanja (unutarnja i vanjska rotacija) stopala, i to oko zamišljene frontalne osi koja je usmjerena uzduž stopala i završava se na drugom prstu. Pri rotaciji stopala prema unutra, unutarnji (medijalni) rub stopala odiže se od podloge, a taban se okreće prema unutra. Kod rotacije stopala prema vani lateralni (vanjski) rub stopala odiže se od podloge, a taban se okreće prema vani. Pokreti primicanja, odmicanja, te rotacije stopala prema unutra i prema vani ne događaju se odvojeno, već su zajednički i vrše se istovremeno.

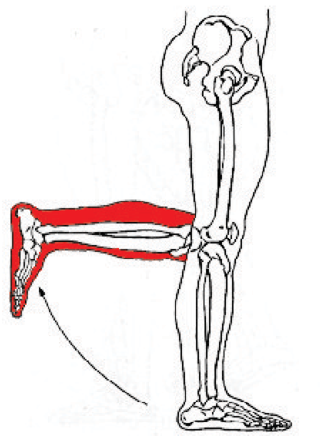
Tako je primicanje stopala udruženo s rotacijom stopala prema unutra, a odmicanje s rotacijom stopala prema vani. Zato neki autori (Poirier, Wells) predlažu da se tim zajedničkim pokretima da i zajednički naziv, uvrtanje (torsio) stopala. Odnosno, pokreti primicanja i rotacije prema unutra, znače uvrtanje ili torziju stopala prema unutra, tj. inverziju stopala, dok pokret odmicanja i istovremene rotacije stopala prema vani znači izvrtanje ili torziju stopala prema vani, odnosno everziju stopala. Inače u donjem gležanjskom zglobu moguća je inverzija od oko 30 do 35 stupnjeva, dok je everzija nešto manja i kreće se između 15 i 20 stupnjeva.

2.5.2 Mehanika i mišićna analiza pokreta u zglobu koljena

Zglob koljena (art. genus) složen je od kutnog i rotacijskog zgloba (trochogynglimus) tako da razlikujemo dvije osi rotacije: poprečnu i uzdužnu. Oko poprečne osi vrši se pregibanje (fleksija) i opružanje (ekstenzija) potkoljenice s velikim amplitudama, dok se oko uzdužne osi vrše pokreti rotacije potkoljenice prema vani i prema unutra. Aktivno pregibanje u zglobu koljena (ilustracija 2.14) moguće je samo do 120 ili 130 stupnjeva. Međutim,

Ilustracija 2.14: Mišići koji vrše pokrete pregibanje (fleksija) potkoljenice u zglobu koljena:

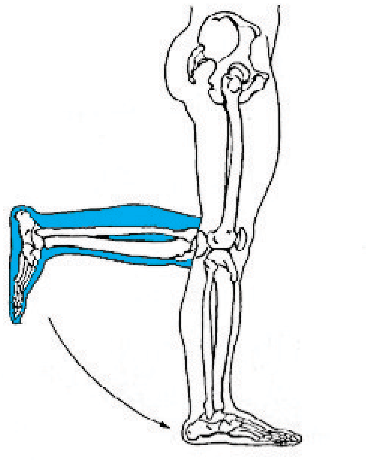
- polutetivni mišić (m. semitendinosus)
- poluopnasti mišić (m. semimembranosus)
- dvoglavi mišić bedra (m. biceps femoris)
- zakoljeni mišić (m. popliteus)
- dvoglavi lisni mišić (m. gastrocnemius)
- krojački mišić (m. sartorius)
- vitki mišić (m. gracilis)
- tabanski mišić (m. plantaris)



pod utjecajem vanjskih sila može se povećati do krajnje granice od oko 160 stupnjeva kada se potkoljenica sasvim priljubi uz natkoljenicu. Raspon između 130 i 160 stupnjeva naziva se pasivna fleksija ili mrtvi mišićni prostor. Opružanje u zglobu koljena (ilustracija 2.15) moguće je samo do položaja kada potkoljenica i natkoljenica čine ispruženi kut (180 stupnjeva), a što označavamo kao nulti položaj (0 stupnjeva). Međutim, pod utjecajem van-

Ilustracija 2.15: Mišići koji vrše pokrete opružanja (ekstenzija) potkoljenice u zglobu koljena:

- četvoroglavi mišić bedra (m. qudriceps) – ravni mišić (rectus femoris)
- četvoroglavi mišić bedra (m. qudriceps) – srednji široki mišić (vastus medialis)
- četvoroglavi mišić bedra (m. qudriceps) – vanjski široki mišić (vastus lateralis)

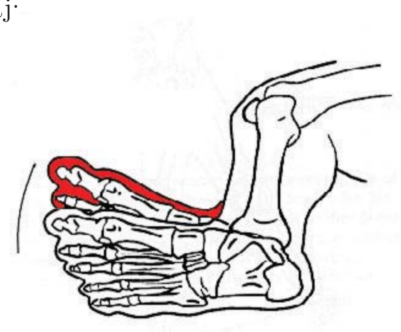


jskih sila moguće je pasivno opružanje (hiperekstenzija), ali samo do oko 5 stupnjeva više od nultog položaja. Daljnje opružanje sprečavaju pobočne i ukrižene sveze.

Kada se čovjek nalazi u uspravnom stavu pri ispruženom koljenu gotovo da i nije moguća rotacija potkoljenice u zglobu koljena. Međutim, kada je zglob koljena u polusavijenom (srednjem) položaju smanjuje se zategnutost pobočnih sveza (ligg. colatteralia) što omogućuje rotaciju potkoljenice oko uzdužne osi prema unutra i prema vani (ilustracije 2.16 i 2.17). Pri fleksiji koljena od 90 stupnjeva moguća je unutarnja rotacija za 10, a vanjska za 40 stupnjeva.

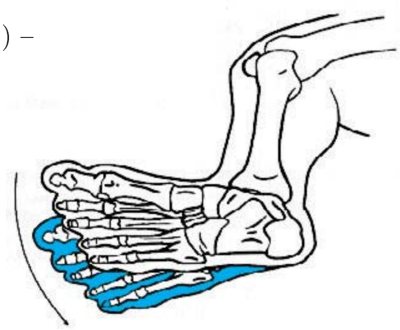
Ilustracija 2.16: Mišići koji vrše rotaciju potkoljenice prema unutra (unutarnja rotacija) u zglobu koljena – polusavijeni položaj·

- krojački mišić (m. sartorius)
- polutetivni mišić (m. semitendinosus)
- poluopnasti mišić (m. semimembranosus)
- zakoljeni mišić (m. popliteus)
- vitki mišić (m. gracilis)
- dvoglavi lisni mišić (m. gastrocnemius) – unutarnja glava (caput mediale)



Ilustracija 2.17: Mišići koji vrše rotaciju potkoljenice prema vani (vanjska rotacija) u zglobu koljena – polusavijeni položaj:

- dvoglavi mišić bedra (m. biceps femoris) – kratka glava (caput breve)
- dvoglavi mišić bedra (m. biceps femoris) – duga glava (caput longum)
- veliki stražnjični mišić (m. gluteus maximus) – površinski dijelovi
- mišić natezač široke fascije (m. tensor fasciae latae)
- dvoglavi lisni mišić (m. gastrocnemius) – vanjska glava (caput laterale)
- tabanski mišić (m. plantaris)



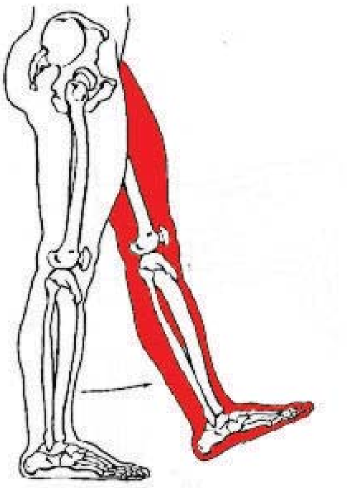
2.5.3 Mehanika i mišićna analiza pokreta u zglobu kuka

Zglob kuka (art. coxae) je po mehanici zdjeličasti zglob pa kao i kuglasti ima veliki broj osi rotacije. Međutim, gibanja u zglobu kuka su ipak ograničena. Ograničenje uvjetuju konkavne zglobne površine koje okružuju gotovo dvije trećine konveksnog zglobnog tijela kao i zategnutost zglobne čahure i sveza koje učvršćuju zdjelicu i drže trup uspravnim. Tri su glavne osi koje prolaze kroz središte glave bedrene kosti: poprečna, frontalna i uzdužna. Oko poprečne osi u zglobu kuka vrše se pokreti pregibanja (fleksije) i opružanja (ekstenzije), ilustracije 2.18 i 2.19. U normalnom uspravnom stavu tijela, opseg fleksije je prilično velik, iznosi čak i do 130 stupnjeva. Opružanje u ovom položaju gotovo da i ne postoji, svega 13 stupnjeva. Međutim, amplituda opružanja može se neznatno povećati ako potpuno rotiramo bedrenu kost prema vani (gimnastičari, plesači).

Pokreti primicanja i odmicanja (ilustracije 2.20 i 2.21) vrše se oko frontalne osi. Odmicanje natkoljenice je moguće do 45 stupnjeva, dok je primicanje u uspravnom stavu ograničeno na samo oko 10 stupnjeva jer pokrete s većom amplitudom onemogućava vodoravni snop iliofemoralne sveze. Da je u uspravnom stavu moguće veće primicanje u zglobu kuka, u trenutku opterećenja jedne noge, došlo bi do naginjanja zdjelice i cijelog trupa na jednu stranu te bi povratak u normalni stav bio znantno otežan (uz veliki mišićni napor).

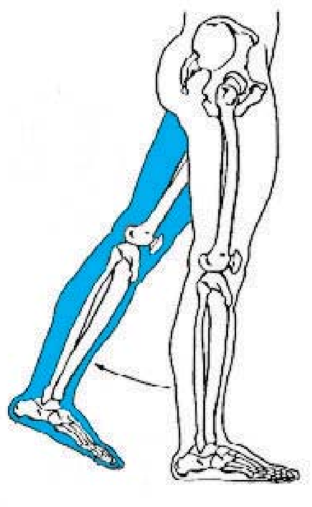
Ilustracija 2.18: Mišići koji vrše pokret pregibanja (fleksija) u zglobu kuka (po nekim autorima pokreti pregibanja nazivaju se antefleksija):

- bočnoslabinski mišić (m. iliopsoas)
- ravni mišić (m. rectus femoris)
- mišić natezač široke fascije (m. tensor fasciae latae)
- najmanji stražnjični mišić (m. gluteus minimus) – gornji snopovi
- srednji stražnjični mišić (m. gluteus medius) – gornji snopovi
- krojački mišić (m. sartorius)
- grebenski mišić (m. pectineus)
- dugački mišić primicač (m. adductor longus)
- kratki mišić primicač (m. adductor brevis)
- bočni mišić (m. iliacus)



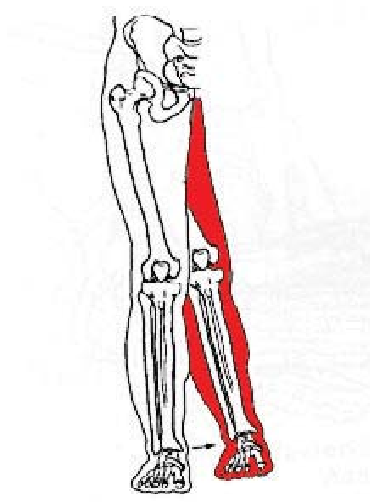
Ilustracija 2.19: Mišići koji vrše pokret opružanja (ekstenzija) u zglobu kuka (po nekim autorima pokreti opružanja nazivaju se retrofleksija):

- veliki stražnjični mišić (m. gluteus maximus)
- dvoglavi mišić bedra (m. biceps femoris) – duga glava (caput longum)
- polutetivni mišić (m. semitendinosus)
- poluopnasti mišić (m. semimembranosus)
- srednji stražnjični mišić (m. gluteus medius) – donji snopovi
- veliki primicač (m. adductor magnus) – donji snopovi
- kruškoliki mišić (m. piriformis)
- četverokutni mišić bedra (m. quadratus femoris)



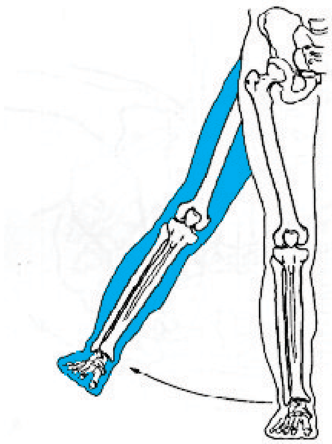
Ilustracija 2.20: Mišići koji vrše pokret primicanja (adukcija) u zglobu kuka:

- veliki stražnjični mišić (m. gluteus maximus) – donji snopovi
- veliki mišić primicač (m. adductor magnus)
- dugački mišić primicač (m. adductor longus)
- kratki mišić primicač (m. adductor brevis)
- najmanji mišić primicač (m. adductor minimus)
- grebenski mišić (m. pectineus)
- vitki mišić (m. gracilis)
- dvoglavi mišić bedra (m. biceps femoris) – duga glava (caput longum)
- bočnoslabinski mišić (m. iliopsoas)
- vanjski zaptivni mišić (m. obturatorius externus)
- bočni mišić (m. iliacus)
- polutetivni mišić (m. semitendinosus)
- poluopnasti mišić (m. semimembranosus)



Ilustracija 2.21: Mišići koji vrše pokrete odmicanja (abdukcija) u zglobu kuka:

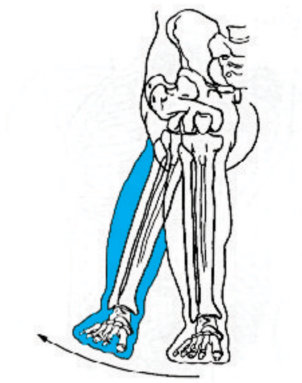
- veliki stražnjični mišić (m. gluteus maximus) – gornji snopovi
- mali stražnjični mišić (m. gluteus minimus)
- srednji stražnjični mišić (m. gluteus medius)
- kruškoliki mišić (m. piriformis)
- mišić natezač široke fascije (m. tensor fasciae latae)
- blizanački mišići (m. gemelli)
- unutarnji zaptivni mišić (m. obturatorius internus)



Pokreti rotacije prema unutra i prema vani u zglobu kuka (ilustracije 2.22 i 2.23) vrše se oko uzdužne osi. Rotacija prema vani moguća je samo do 13 stupnjeva (prema Lanzu), dok je rotacija prema unutra slobodnija, oko 35 stupnjeva.

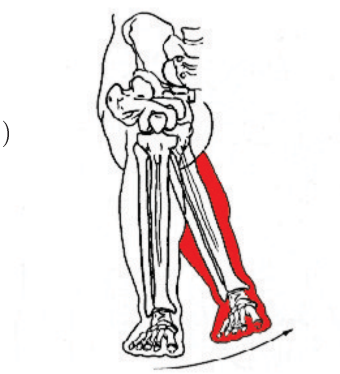
Ilustracija 2.22: Mišići koji vrše pokret rotacije prema unutra (unutarnja rotacija) u zglobu kuka:

- srednji stražnjični mišić (m. gluteus medius) – prednjim snopovima
- mali stražnjični mišić (m. gluteus minimus) – prednjim snopovima
- mišić natezač široke fascije (m. tensor fasciae latae)
- veliki mišić primicač (m. adductor magnus) – donjim snopovima



Ilustracija 2.23: Mišići koji vrše pokret rotacije prema vani (vanjska rotacija) u zglobu kuka:

- bočnoslabinski mišić (m. iliopsoas)
- veliki stražnjični mišić (m. gluteus maximus)
- srednji stražnjični mišić (m. gluteus medius) – zadnjim snopovima
- mali stražnjični mišić (m. gluteus minimus) – zadnjim snopovima
- kruškoliki mišić (m. piriformis)
- unutarnji zaptivni mišić (m. obturatorius internus)
- gornji mišić blizanac (m. gemellus superior)
- donji mišić blizanac (m. gemellus inferior)
- četverokutni mišić bedra (m. quadratus femoris)
- vanjski zaptivni mišić (m. obturatorius externus)
- krojački mišić (m. sartorius)



Kruženje ili cirkumdukcija (circumductio) je kružno kretanje bedrene kosti pri kojemu se pomični kraj kosti giba oko središta zgloba i opisuje stožac, a sastavljeno je od gore spomenutih gibanja.

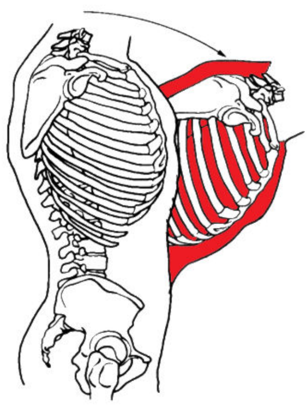
Međutim, ako se izvrši pregibanje u zglobu kuka do srednjeg položaja, zglobna čahura i zglobne sveze postaju labavije, pa je gibanje moguće u gotovo dvostrukom rasponu u odnosu na gibanje u uspravnom stavu ili u hodu. Inače gibanje u zglobu kuka uvijek se prirodno nadopunjuje gibanjima zdjelice i kralješnice, čime se ispravlja položaj trupa i time osigurava ravnoteža.

2.5.4 Mehanika i mišićna analiza pokreta kralješnice

Pokretljivost kralješnice u cjelini prilično je velika s obzirom na istovremena vrlo mala gibanja između pojedinih kralješaka. Kralješnica se praktično ponaša kao jedinstven zglob s tri i više osi rotacije. Gibanja se vrše oko tri glavne osi: poprečne oko koje se vrše pokreti pregibanja i opružanja i to, uglavnom, u slabinskom dijelu, frontalne oko koje se vrše pokreti u stranu (laterofleksija) i to, uglavnom, u prsnom dijelu kralješnice, i uzdužne oko koje se vrši rotacija i to u vratnom i donjem dijelu prsne kralješnice. Međutim, ovisno o obliku i položaju zglobnih površina, neke su kretnje moguće samo u pojedinim dijelovima kralješnice. Zato je najpokretljiviji vratni dio kralješnice, zatim slabinski, dok je prsni dio najmanje pokretljiv. Pregibanje i opružanje su mogući samo u vratnom i slabinskom dijelu kralješnice (ilustracije 2.24 i 2.25). Pregibanje u vratnom dijelu iznosi oko 30 do 45 stupnjeva

Ilustracija 2.24: Mišići koji vrše pregibanje (fleksija) trupa:

- ravni trbušni mišić (m. rectus abdominis)
- unutarnji kosi trbušni mišić (m. obliquus internus abdominis)
- vanjski kosi trbušni mišić (m. obliquus externus abdominis)
- poprečni trbušni mišić (m. transversus abdominis)
- veliki slabinski mišić (m. psoas major)
- mali slabinski mišić (m. psoas minor)

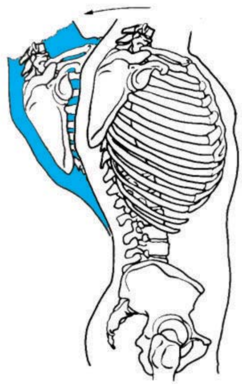


dok je u slabinskom dijelu veće, te iznosi oko 80 do 90 stupnjeva. Opružanje u vratnom dijelu kralješnice je oko 30 do 45 stupnjeva, a u slabinskom dijelu je nešto manje, oko 20 do 30 stupnjeva.

Bočno pregibanje (laterofleksija), ilustracija 2.26, vrši se najslobodnije u vratnom dijelu kralješnice (40 do 45 stupnjeva), dok je u slabinskom dijelu ograničeno na 20 do 35 stupnjeva. U prsnom dijelu kralješnice bočno pregibanje moguće je samo oko 20 stupnjeva, jer ga ograničavaju zglobovi i glave rebara.

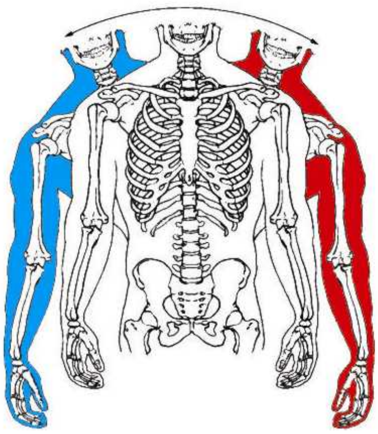
Ilustracija 2.25: Mišići koji vrše opružanje (ekstenzija) trupa:

- mišić opružač kralješnice (m. errector spinae)
- bočnorebreni mišić (m. iliocostalis)
- najduži mišić (m. longissimus)
- mišić trnastih nastavaka (m. spinalis)
- poprečnotrnasti mišić (m. transversospinalis)
- polutrnasti mišić (m. semispinalis)



Ilustracija 2.26: Mišići koji vrše bočno pregibanje (lateralna fleksija) trupa:

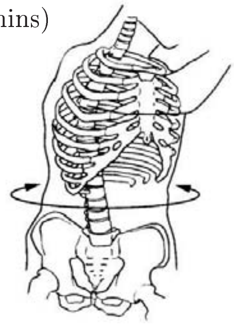
- unutarnji kosi trbušni mišić (m. obliquus internus abdominis)
- ravni trbušni mišić (m. rectus abdominis)
- mišić opružač kralješnice (m. errector spinae)
- četverokutni slabinski mišić (m. quadratus lumborum)
- vanjski kosi trbušni mišić (m. obliquus externus abdomins)



Rotacija oko uzdužne osi (ilustracija 2.27) je rotiranje nekog dijela kralješnice prema nižim dijelovima. Ona je najveća u vratnom dijelu dok se prema dolje opseg rotacije smanjuje. Opseg rotacije u vratnom dijelu se kreće oko 30 do 60 stupnjeva, prsnom 30 do 45, dok je u slabinskom dijelu kralješnice najmanji i iznosi svega oko 5 stupnjeva.

Ilustracija 2.27: Mišići koji vrše rotaciju trupa:

- vanjski kosi trbušni mišić (m. obliquus externus abdomins)
- ravni trbušni mišić (m. rectus abdominis)
- mišić opružač kralješnice (m. errector spinae)

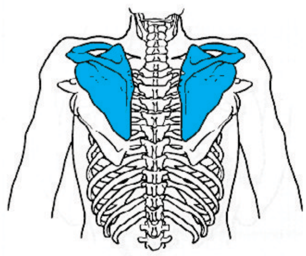


2.5.5 Mehanika i mišićna analiza pokreta ramenog obruča

Gornji udovi nisu izravno vezani čvrstim zglobom za trup. Vezu između ruku i prsnog koša predstavlja rameni obruč. Po građi i djelovanju rameni obruč i rame daju oslonac nadlaktici i gornjim udovima u cjelini i omogućuju im veliku gibljivost i amplitudu pokreta. Gibanje nadlaktice, pa i cijele ruke, vrše se u području ramenog obruča i ramena istodobno u tri zgloba. Zato rameni obruč i rameni zglob valja promatrati kao funkcionalnu cjelinu. Rameni obruč čine zglob prsne i ključne kosti (art. sternoclavicularis) kojeg ubrajamo u kuglaste zglobove i zglob između ključne kosti i lopatice (art. acromioclavicularis). Pokreti koji se vrše u ovim zglobovima su: podizanje (elevacija), ilustracija 2.28, spuštanje (depresija) lopatice, ilustracija 2.29,

Ilustracija 2.28: Mišići koji vrše podizanje (elevacija) lopatice:

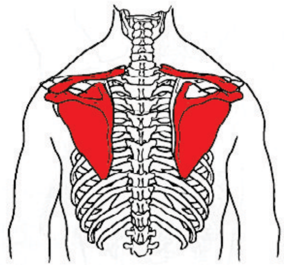
- mišić podizač lopatice (m. levator scapulae)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – gornji dio (pars descendens)
- romboidni mišić (m. rhomboideus)



zatim odmicanje i primicanje lopatice (ilustracije 2.30 i 2.31), kao i rotacija lopatice donjim kutem prema vani i prema unutra (ilustracije 2.32 i 2.33). Opseg pokreta lopatice, prema Vandervaelu, za podizanje i spuštanje je 10 do 12 cm, za primicanje i odmicanje je oko 14 do 16 cm, a za pokete rotacija oko 55 do 70 stupnjeva.

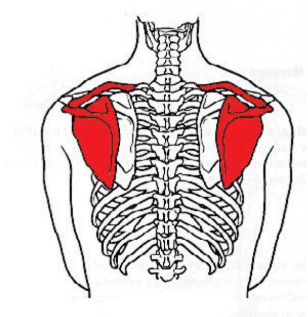
Ilustracija 2.29: Mišići koji vrše spuštanje (depresija) lopatice:

- trapezasti mišić (m. trapezius) – donji dio (pars ascendes)
- mali prsni mišić (m. pectoralis minor)
- prednji nazubljeni mišić (m. seratus anterior) – donji zupci (pars inferior)



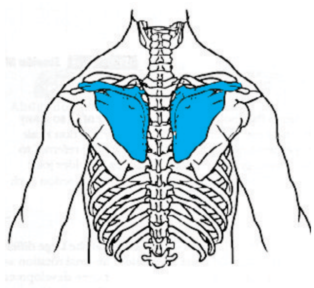
Ilustracija 2.30: Mišići koji vrše odmicanje (protrakcija) lopatice od kralješnice:

- prednji nazubljeni mišić (m. seratus anterior)
- mali prsni mišić (m. pectoralis minor)
- veliki prsni mišić (m. pectoralis major)



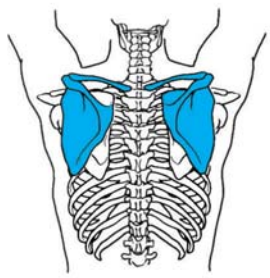
Ilustracija 2.31: Mišići koji vrše primicanje (retrakcija) lopatice kralješnici:

- romboidni mišić (m. rhomboideus)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – sredni dio (pars transversa)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – gornji dio (pars descendens)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – donji dio (pars ascendes)



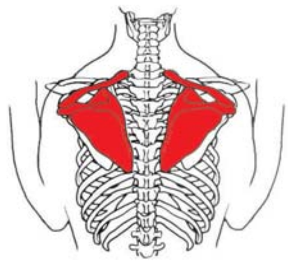
Ilustracija 2.32: Mišići koji vrše rotaciju lopatice donjim kutem prema vani (rotacija prema gore):

- trapezasti mišić (m. trapezius) – gornji dio (pars descendens)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – donji dio (pars ascendes)
- prednji nazubljeni mišić (m. seratus anterior) – donji zupci (pars inferior)
- podlopatični mišić (m. subscapularis)
- veliki obli mišić (m. teres major)



Ilustracija 2.33: Mišići koji vrše rotaciju lopatice donjim kutem prema unutra (rotacija prema dolje):

- romboidni mišić (m. rhomboideus)
- mali prsni mišić (m. pectoralis minor)
- mišić podizač lopatice (m. levator scapulae)



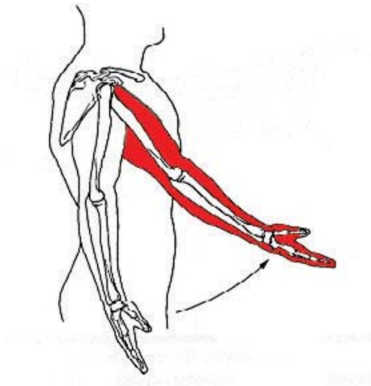
2.5.6 Mehanika i mišićna analiza pokreta u ramenom zglobu

Zglob ramena (art. humeri) je najpokretljiviji zglob u čovječjem tijelu i spada u kuglaste zglobove. U ovom zglobu mogući su pokreti oko sve tri osi. Oko poprečne osi vrše se pokreti pregibanja (antefleksija), ilustracija 2.34, i opružanja (retrofleksija), ilustracija 2.35. Pregibanje u zglobu ramena moguće je do oko 120 stupnjeva, a opružanje je manje i iznosi oko 35 stupnjeva. Ukoliko rotiramo ruku moguća je retrofleksija do oko 80 stupnjeva.

Oko frontalne osi vrše se pokreti primicanja i odmicanja (ilustracije 2.36 i 2.37). Primicanje je moguće za oko 30 do 75 stupnjeva. Odmicanje

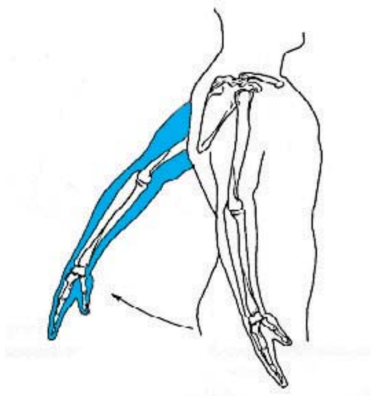
Ilustracija 2.34: Mišići koji vrše pokret pregibanja (antefleksija), u ramenom zglobu:

- deltoidni mišić (m. deltoideus) – prednji dio (pars clavicularis)
- veliki prsni mišić (m. pectoralis major) – gornji dio (pars clavicularis)
- kljunastonadlaktični mišić (m. coracobrachialis)
- dvoglavi mišić nadlaktice (m. biceps brachii)



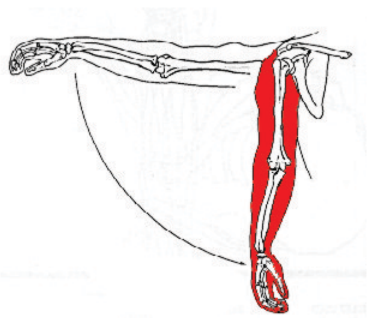
Ilustracija 2.35: Mišići koji vrše pokret opružanja (retrofleksija) u ramenom zglobu:

- deltoidni mišić (m. deltoideus) – zadnji dio (pars spinalis)
- najširi leđni mišić (m. latissimus dorsi)
- veliki obli mišić (m. teres major)
- mali obli mišić (m. teres minor)
- podgrebeni mišić (m. infraspinatus)



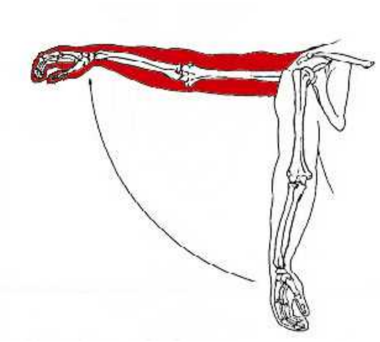
Ilustracija 2.36: Mišići koji vrše pokret primicanja (adukcija) u ramenom zglobu:

- najširi leđni mišić (m. latissimus dorsi)
- veliki prsni mišić (m. pectoralis major)
- veliki obli mišić (m. teres major)
- kljunastonadlaktični mišić (m. coracobrachialis)
- troglavi mišić nadlaktice (m. triceps brachii) – duga glava (caput longum)
- podlopatični mišić (m. subscapularis)



Ilustracija 2.37: Mišići koji vrše pokret odmicanja (abdukcija) u ramenom zglobu:

- deltoidni mišić (m. deltoideus) – srednji dio (pars acromialis)
- nadgrebeni mišić (m. supraspinatus)

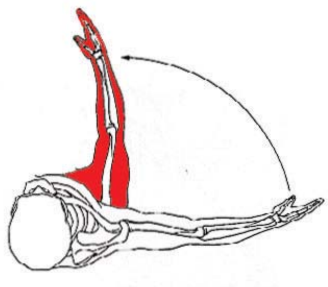


u ramenom zglobu moguće je samo do vodoravnog položaja tj. do oko 96 stupnjeva. Međutim, ako u tom položaju rotiramo nadlakticu prema vani, možemo podići ruku do oko 112 stupnjeva.

Osim opisanih pokreta u zglobu ramena moguće je izvršiti pokrete i u poprečnoj ravnini, a oko uzdužne osi. To su pokreti horizontalnog primicanja ruke (oko 135 stupnjeva) i pokreti horizontalnog odmicanja (oko 45 stupnjeva), ilustracije 2.38 i 2.39.

Ilustracija 2.38: Mišići koji vrše pokret horizontalnog primicanja ruke u ramenom zglobu prema unutra (horizontalna adukcija):

- veliki prsni mišić (m. pectoralis major)
- mali prsni mišić (m. pectoralis minor)
- deltoidni mišić (m. deltoideus) – prednji dio (pars clavicularis)
- kljunastonadlaktični mišić (m. coracobrachialis) – dijelovi
- dvoglavi mišić nadlaktice (m. biceps brachii) – dijelovi

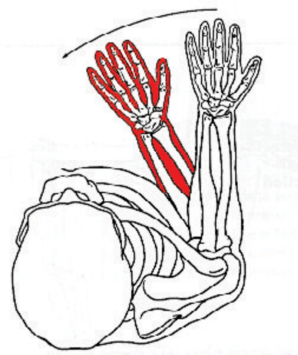


Oko uzdužne osi obavljamo unutarnju i vanjsku rotaciju nadlaktice (ilustracije 2.40 i 2.41). Rotaciju prema vani moguće je izvesti za oko 50 stupnjeva dok unutarnju rotaciju možemo izvesti za oko 40 stupnjeva. I u ovom zglobu moguće je izvesti kretnju kruženja cirkumdukcije.

Ilustracija 2.39: Mišići koji vrše pokret horizontalnog odmicanja ruke u ramenom zglobu prema vani (horizontalna abdukcija):

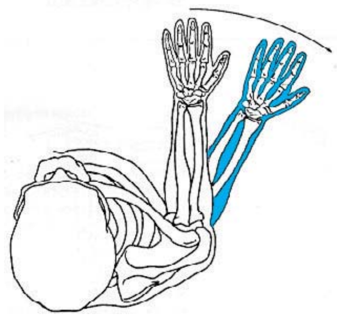
- deltoidni mišić (m. deltoideus) – stražnji dio (pars spinalis)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – gornji dio (pars descendens)
- trapezasti mišić (m. trapezius) – sredni dio (pars transversa)
- romboidni mišić (m. rhomboideus)
- veliki obli mišić (m. teres major) - dijelovi
- najširi mišić leđa (m. latissimus dorsi) - dijelovi

Ilustracija 2.40: Mišići koji vrše pokret rotacije prema unutra (unutarnja rotacija – hyperpronacija) u ramenom zglobu:



- podlopatični mišić (m. subscapularis)
- veliki obli mišić (m. teres major) - dijelovi
- najširi mišić leđa (m. latissimus dorsi)
- veliki prsni mišić (m. pectoralis major)
- deltoidni mišić (m. deltoideus) – prednji dio (pars clavicularis)

Ilustracija 2.41: Mišići koji vrše pokret rotacije prema vani (vanjska rotacija – hypersupinacija) u ramenom zglobu:



- mali obli mišić (m. teres minor)
- podgrebeni mišić (m. infraspinatus)
- deltoidni mišić (m. deltoideus) – stražnji dio (pars spinalis)

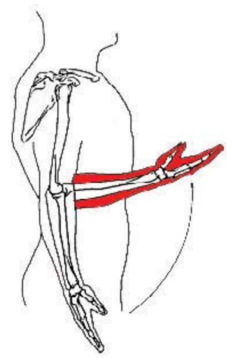
2.5.7 Mehanika i mišićna analiza pokreta u zglobu lakta

Lakatni zglob (art. cubiti) je tipični kutni zglob, a složen je od tri zgloba: zgloba između nadlaktične i lakatne kosti (art. humeroulnaris), nadlaktične i palčane kosti (art. humeroradialis), te zgloba između proksimalnih krajeva palčane i lakatne kosti (art. radioulnaris proximalis). Zglobna čahura lakatnog zgloba zajednička je za sva tri zgloba.

Pokreti pregibanja i opružanja vrše se oko poprečne osi (ilustracije 2.42 i 2.43). Pokreti pregibanja u zglobu lakta mogu se vršiti od oko 135 do 150

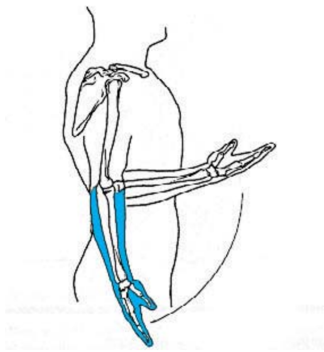
Ilustracija 2.42: Mišići koji vrše pokret pregibanja (fleksija) podlaktice u zglobu lakta:

- dvoglavi mišić nadlaktice (m. biceps brachii)
- nadlaktični mišić (m. brachialis)
- nadlaktičnopalčani mišić (m. brachioradialis)



Ilustracija 2.43: Mišići koji vrše pokret opružanja (ekstenzija) podlaktice u zglobu lakta:

- troglavi mišić nadlaktice (m. triceps brachii) – duga glava (caput longum)
- lakatni mišić (m. anconeus)

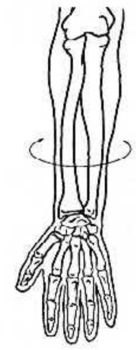


stupnjeva dok nadlaktica i podlaktica pri najvećoj fleksiji čine kut od 35 do 40 stupnjeva. Podlaktica i nadlaktica pri najvećoj ekstenziji čine kut između 160 i 180 stupnjeva, što se po novoj klasifikaciji označava kao 0 stupnjeva. Raspon fleksije i ekstenzije kod žena i djece je veći od 180 stupnjeva, tj. preko nultog položaja jer oni imaju slabije razvijenu muskulaturu i manju stražnju izraslinu lakatne kosti (olekranon).

Pokreti izvrtanja (supinacije) i uvrtanja (pronacije) vrše se oko uzdužne osi, a pokretljivost od jedne do druge amplitude kreće se od 120 do 160 stupnjeva (ilustracije 2.44 i 2.45).

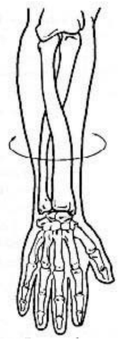
Ilustracija 2.44: Mišići koji vrše pokret izvrtanja (supinacija) podlaktice u zglobu lakta:

- dvoglavi mišić nadlaktice (m. biceps brachii)
- supinacijski mišić (m. supinator)



Ilustracija 2.45: Mišići koji vrše pokret uvrtanja (pronacija) podlaktice u zglobu lakta:

- obli pronator (m. pronator teres)
- četverokutni pronator (m. pronator quadratus)
- nadlaktičnopalčani mišić (m. brachioradialis)



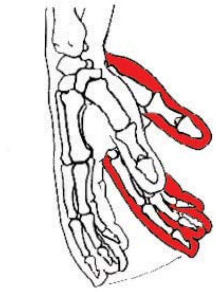
2.5.8 Mehanika i mišićna analiza pokreta u zglobu šake

Zglobove šake (art. manus) čine kosti korijena šake ili pešća, zapešća ili međupešća i članci prstiju. Zglobovi korijena šake su funkcionalno nedjeljiva cjelina u kojoj se vrše pokreti oko poprečne i frontalne osi. Pokreti pregibanja i opružanja (palmarna i dorzalna fleksija) vrše se oko poprečne osi, ilustracije 2.46 i 2.47. Udruženi pokreti korijena šake imaju vrlo velik opseg, pa tako ukupni raspon palmarne i dorzalne fleksije iznosi oko 160 stupnjeva. Pregibanje u zglobu šake moguće je oko 80 stupnjeva, dok je opružanje u zglobu šake moguće oko 70 stupnjeva.

Pokreti pregibanja u stranu prema palčanoj i lakatnoj kosti (radijalna i ulnarna abdukcija) u zglobu šake vrše se oko frontalne osi, ilustracija 2.48. Raspon ulnarne abdukcije obuhvaća oko 40 do 45 stupnjeva, a raspon radi-

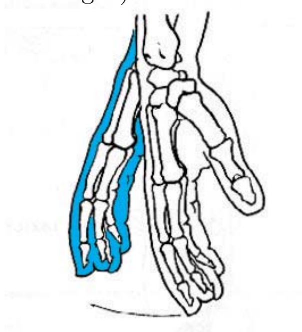
Ilustracija 2.46: Mišići koji vrše pregibanja (palmarna fleksija) u zglobu šake:

- radijalni pregibač pešća (m. flexor carpi radialis)
- ulnarni pregibač pešća (m. flexor carpi ulnaris)
- dugački pregibač palca (m. flexor pollicis longus)
- dugački dlanski mišić (m. palmaris longus)
- površinski pregibač prstiju (m. flexor digitorum superficialis)
- duboki pregibač prstiju (m. flexor digitorum profundus)



Ilustracija 2.47: Mišići koji vrše opružanja (dorzalna ekstenzija) u zglobu šake:

- dugački radijalni opružač pešća (m. extensor carpi radialis longus)
- kratki radijalni opružač pešća (m. extensor carpi radialis brevis)
- dugački opružač palca (m. extensor pollicis longus)
- kratki opružač palca (m. extensor pollicis brevis)
- opružač prstiju (m. extensor digitorum)
- opružač kažiprsta (m. extensor indicis)
- ulnarni opružač pešća (m. extensor carpi ulnaris)
- opružač malog prsta (m. extensor digiti minimi)



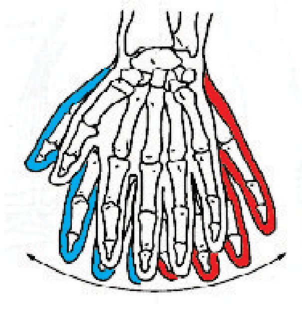
Ilustracija 2.48: Mišići koji vrše pokret pregibanja prema lakatnoj (ulnarna abdukcija) i palčanoj kosti (radijalna abdukcija) u zglobu šake:

Pregibanje prema lakatnoj kosti:

- ulnarni pregibač pešća (m. flexor carpi ulnaris)
- ulnarni opružač pešća (m. extensor carpi ulnaris)

Pregibanje prema palčanoj kosti:

- radijalni pregibač pešća (m. flexor carpi radialis)
- dugački radijalni opružač pešća (m. extensor carpi radialis longus)
- kratki radijalni opružač pešća (m. extensor carpi radialis brevis)
- dugački odmicač palca (m. abductor pollicis longus)



jalne abdukcije oko 15 do 20 stupnjeva. Prema tome ukupni raspon najveće ulnarne i radijalne abdukcije je oko 65 stupnjeva. U zglobovima korijena šake moguća je i cirkumdukcija.

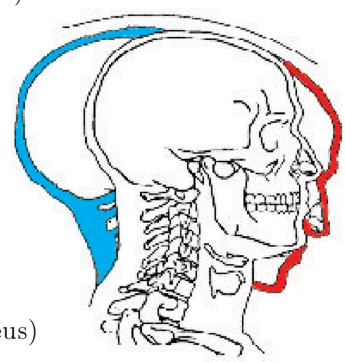
2.5.9 Mehanika i mišićna analiza pokreta u zglobovima glave

Spoj između glave i vratnog dijela kralješnice ostvaruju gornji i donji zglob glave. Gornji zglob (art. atlantoocipitalis) je elipsoidni zglob s dvije osi. Oko poprečne osi vršimo pregibanje i opružanje glave, ilustracija 2.49. Pregibanje

Ilustracija 2.49: Mišići koji vrše pokrete pregibanja (antefleksija) i opružanja (retrofleksije) glave:

Pokret pregibanja (antefleksija) glave:

- prednji ravni mišić glave (m. rectus capitis anterior)
- dugački mišić glave (m. longus capitis)
- ravni mišić vrata (m. rectus colli)



Pokret opružanja (retrofleksije) glave:

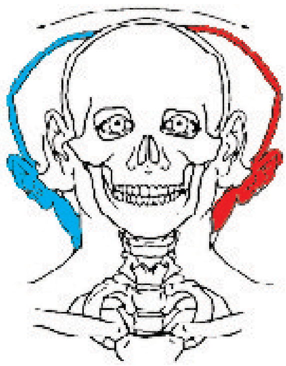
- trapezasti mišić (m. trapetius) – gornji dio (pars descendens)
- najduži mišić glave (m. longissimus capitis) – vratni dio mišića opružača kralješnice
- prsnoključnosisasti mišić (m. sternocleidomastoideus)
- zavojni mišić (m. splenius)
- polutrnasti mišić glave (m. semispinalis capitis)
- stražnji mali ravni mišić glave (m. rectus capitis posterior minor)
- stražnji veliki ravni mišić glave (m. rectus capitis posterior major)

(antefleksija) glave moguće je samo do 20 stupnjeva (Fick), a ograničeno je zbog zategnutosti sveza sa stražnje strane glave. Opružanje (retrofleksija) glave moguće je do 30 stupnjeva.

Oko frontalne osi vršimo bočno pregibanje (laterofleksija) glave, a pokreti se kreću između 7 i 20 stupnjeva (ilustracija 2.50).

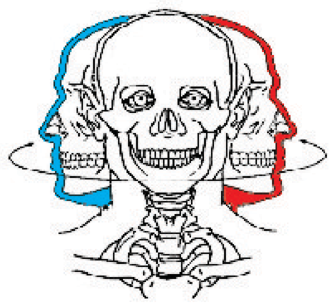
U donjem zglobu glave (art. atlantoaxialis), koji je složeni zglob, vrše se rotacije oko uzdužne osi (ilustracija 2.51). Opseg pokreta je do 30 stupnjeva na lijevu i desnu stranu od središnje ravnine. Međutim, rotiranje glave do 180 stupnjeva činimo udruženom kretnjom u donjem zglobu glave i uvrtanjem cijelog vratnog dijela kralješnice.

Ilustracija 2.50: Mišići koji vrše bočna pregibanja (lateralna fleksija) glave:



- prsnoključnosisasti mišić (m. sternocleidomastoideus)
- zavojni mišić (m. splenius)
- nejednoliki mišići (m. scaleni)
- polutrnasti mišić glave (m. semispinalis capitis)
- najduži mišić glave (m. longissimus capitis) – vratni dio mišića opružača kralješnice
- bočni ravni mišić glave (m. rectus capitis lateralis)
- trapezasti mišić (m. trapetius) – gornji dio (pars descendens)

Ilustracija 2.51: Mišići koji vrše rotaciju glave:



Rotacija glave na istu stranu:
- dugi mišić vrata (m. longi colli) – gornji vanjski kosi dio (pars obliqua superior)
- donji kosi mišić glave (m. obliquus capitis inferior)
- zavojni mišić (m. splenius)

Rotacija glave na suprotnu stranu:
- dugi mišić vrata (m. longi colli) – donji vanjski kosi dio (pars obliqua inferior)
- gornji kosi mišić glave (m. obliquus capitis superior)
- prsnoključnosisasti mišić (m. sternocleidomastoideus)

Na kraju valja napomenuti kako opseg pokreta u pojedinim zglobovima nije specificiran prema određenim konstitucijama i posebno prema određenim sportskim granama. Nadalje, opseg gibanja u različitim zglobovima ne promatra se statički, pogotovo kada je poznato da se određenim intenzivnim i dugotrajnim vježbanjem može utjecati na stanje psihosomatskih karakteristika čovjeka pa prema tome i na opseg pokreta u zglobovima.

Poglavlje 3

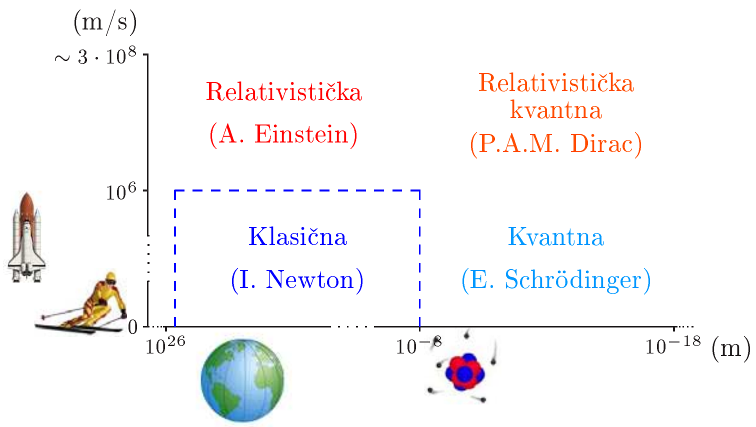
MEHANIKA I PRIMJERI IZ SPORTA

Budući da je biomehanika znanost koja zakone mehanike primijenjuje na gibanjima živih bića, jasno je kako poznavanje mehanike čini osnovu za razumijevanje biomehaničkih zbivanja pri lokomociji ljudskog tijela.

Kao najstarija grana fizike, i znanosti uopće, **mehanika** je prvi i vrlo važan korak u shvaćanju prirode. Mehanikom izučavamo gibanja tijela u užem smislu, tj. vremensku promjenu položaja tijela u odnosu na neko drugo tijelo. Dio mehanike kojim izučavamo gibanja tijela čije dimenzije nisu premalene i brzine nisu prevelike nazivamo **klasična mehanika** ili **Newtonova mehanika**. Dimenzije i najsitnijih zrnaca prašine dovoljno su velike, a brzine puščanih zrna pri ispaljivanju dovoljno su male za dobar opis njihovih gibanja unutar klasične mehanike. **Vrijeme** unutar klasične mehanike ima apsolutno značenje, tj. teče jednako za sve promatrače, zbog čega se vrijeme uzima kao varijabla u odnosu na koju promatramo promjene drugih fizikanih veličina.

U smislu primjene na sustave različitih dimenzija i brzina, mehaniku općenito možemo podijeliti u četiri dijela: klasičnu, relativističku, kvantnu, te relativističku kvantnu mehaniku, kao što je prikazno na ilustraciji 3.1.

Relativističkom mehanikom se izučavaju gibanja makro tijela koja imaju velike brzine, tj. brzine bliske brzini svjetlosti (iznos brzine svjetlosti u vakuumu je 299792458 m/s). Relativističkom se mehanikom mogu izučavati i problemi gibanja makro tijela malih brzina. Međutim, to nije uobičajeno jer klasična mehanika vrlo dobro opisuje ponašanje različitih sustava pri takvim uvjetima, a matematički gledano bitno je jednostavnija od relativističke mehanike. U aproksimaciji malih brzina zakoni relativističke



Ilustracija 3.1: Podjela mehanike s obzirom na brzine i dimenzije sustava čija se gibanja izučavaju. Klasičnom se mehanikom mogu izučavati oni sustavi čije su brzine manje od oko 10^6 m/s i dimenzije veće od oko 10^{-8} m.

mehanike prelaze u zakone klasične mehanike

$$\boxed{\text{Relativistička mehanika}} \xrightarrow{v \ll c} \boxed{\text{Klasična mehanika}}$$

Kvantnom se mehanikom izučavaju problemi koji su vezani za gibanja mikro svijeta ograničavajući se na brzine koje nisu bliske brzini svjetlosti. Kao i relativističkom mehanikom, tako se i kvantnom mehanikom mogu izučavati i makro sustavi čije brzine nisu bliske brzini svjetlosti, ali ni to nije uobičajeno jer je matematički aparat kvantne mehanike bitno kompliciraniji od matematičkog aparata klasične mehanike. U aproksimaciji većih dimenzija sustava koji se izučavaju, zakoni kvantne mehanike prelaze u zakone klasične mehanike,

$$\boxed{\text{Kvantna mehanika}} \xrightarrow{d \gg} \boxed{\text{Klasična mehanika}}$$

Relativističkom kvantnom mehanikom izučavaju se svojstva i ponašanja mikro svijeta u uvjetima brzina bliskih brzini svjetlosti. U nerelativističkoj aproksimaciji, tj. u uvjetima brzina koje su puno manje od brzine svjetlosti, zakoni relativističke kvantne mehanike se svode na zakone kvantne mehanike, i nadalje, u aproksimaciji većih dimenzija u zakone klasične mehanike,

$$\boxed{\text{Relativistička kvantna mehanika}} \xrightarrow{v \ll c} \boxed{\text{Kvantna mehanika}}$$

Mehanika se vrlo često dijeli i na grane s obzirom na objekte koji se izučavaju: mehaniku krutih tijela, mehaniku fluida, mehaniku deformacijskih tijela, mehaniku titraja i valova, te mnoge druge. Mehanika krutih tijela je, matematički gledano, najjednostavnija teorija, a njom izučavamo gibanja onih tijela za koja pretpostavljamo kako ne mijenjaju svoj oblik. Mehanika deformacijskih tijela uzima u obzir promjenu oblika tijela što usložnjava analiziranje ponašanja takvih tijela, a mehanikom fluida istražujemo ponašanje plinova i tekućina te njihov utjecaj na druga tijela.

Mehanika krutih tijela je teorija koja je najprikladnija za opisivanje mnogih sportskih aktivnosti (u pojedinim slučajevima važno je uzeti u obzir još i utjecaj fluida). U stvarnosti se svi segmenti ljudskog tijela deformiraju pod utjecajem sila. Međutim, te deformacije su male i može se pretpostaviti kako je tijelo sportaša sastavljeno od krutih povezanih segmenata.

Uobičajeno se mehanika krutih tijela dijeli na kinematiku i kinetiku. **Kinematikom** (grč. *kinēmā* — gibati, kretati) se izučavaju gibanja tijela ne uspostavljajući vezu s uzrocima koji su uvjetovali gibanje toga tijela, dok se **kinetikom** (grč. *kinéō* — pokrećem, okrećem, uzrokujem) proučavaju gibanja tijela uspostavljajući vezu s uzrocima gibanja. Za razliku od kinematike, kinetika nam daje fizikalnu bit gibanja tijela. Uz kinematiku i kinetiku često se uvodi i **statika** (grč. *statós* — postavljen, stojeći) kao jedan zaseban dio mehanike kojom se izučavaju uvjeti ravnoteže, što ćemo i mi ovdje učiniti.

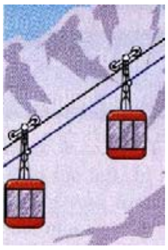
Napomenimo kako se u nekoj literaturi sa sadržajem iz fizike mogu naći drukčiji nazivi za pojedine grane mehanike. Tako se umjesto termina kinetika koristi termin dinamika (grč. dýnamis — sila). U nekoj se drugoj literaturi termin dinamika koristi kao zajednički naziv za kinematiku i kinetiku, što nije prikladno zbog korijena riječi dinamika.

3.1 Kinematika

Kinematika je dio mehanike krutih tijela kojim izučavamo gibanja takvih tijela ne pitajući se za uzroke gibanja. Rezultati mnogih sportskih događaja sastoje se od kinematičkih mjerenja, tako da je razumijevanje kinematičkih veličina od velike važnosti.

3.1.1 Referentni sustavi

Upiatamo li se što je to gibanje, vrlo brzo ćemo uočiti kako pod gibanjem nekog točkastog tijela podrazumijevamo promjenu položaja u odnosu na neko drugo odabrano tijelo. Za to drugo tijelo, u odnosu na koje promatramo gibanja ostalih tijela, vežemo tzv. **referentni sustav** te kažemo kako se tijela gibaju nekom brzinom iznosa različitim od nule ako mijenjaju položaj prema tom referentnom sustavu. Tako, na primjer, neka osoba koja se nalazi u kabini žičare, kao na ilustraciji 3.2, miruje [1] s obzirom na referentni sustav



Ilustracija 3.2: Osoba u kabini žičare giba se nekom brzinom iznosa različitim od nule u odnosu na referentni sustav vezan za zemlju, ali miruje u odnosu na referentni sustav kabine.

kabine, ali se giba nekom brzinom iznosa različitim od nule s obzirom na referentni sustav vezan za zemlju. Stoga zaključujemo kako je svako gibanje relativno gibanje prema odabranom referentnom sustavu.

Primjeri

1. Gledatelji utrke Formule 1 uočavaju dva vozača kako se gibaju jednakim brzinama. U odnosu na jednog od vozača, drugi vozač će mirovati. Kažemo kako se oba vozača gibaju nekom brzinom u odnosu na referentni sustav vezan za gledatelje. Za referentni sustav jednog od vozača oba vozača miruju, a gledatelji se gibaju brzinom koja je istog iznosa kao i brzina kojom se vozači gibaju u odnosu na gledatelje, samo suprotne orijentacije.

2. Zamislimo nogometnu loptu u gibanju nakon slobodnog udarca. Možemo reći kako lopta ima neku brzinu u odnosu na referentni sustav vezan za površinu Zemlje ili okolnih tribina. Međutim, gibanje dane lopte možemo opisivati (promatrati) i u odnosu na referentni sustav vezan za danu loptu. U takvom sustavu lopta miruje, a gledatelji se gibaju zajedno s tribinama.

[1] Mirovanje općenito možemo shvatiti kao poseban oblik gibanja. Kažemo da tijelo miruje ako ne mijenja svoj položaj u odnosu na odabrani referentni sustav.

3.1.2 Koordinatni sustavi

Matematički opis gibanja nekog tijela zahtijeva određenu strogo definiranu metodu opisa položaja **materijalne točke** ili **točkastog tijela** [2] u prostoru. To se najčešće radi pomoću koordinata nekog **koordinatnog sustava**. Tako se npr. položaj materijalne točke na nekoj liniji može opisati jednom koordinatom; položaj točke na nekoj plohi s dvijema koordinatama, a tri koordinate su potrebne za određivanje položaja materijalne točke u trodimenzionalnom prostoru.

Koordinatni sustav, pomoću kojeg određujemo položaj neke materijalne točke, sastoji se od čvrste referentne točke nazvane ishodište [3], i skupa orijentacija koordinatnih osiju s odgovarajućim mjernim jedinicama (skupa jediničnih vektora). Gibanje krutih tijela sastoji se od translacijske i rotacijske komponente. **Translacijska komponenta** gibanja može biti pravocrtna ili, općenito, krivocrtna. **Pravocrtno gibanje** je ono gibanje kod kojega sve točke tijela zadržavaju gibanje po pravcu. Kod **krivocrtnog gibanja** sve točke tijela na isti način mijenjaju orijentaciju gibanja, dok orijentacija tijela ostaje stalna. **Kružno gibanje** događa se kada se sve točke tijela gibaju po kružnicama (ili dijelu kružnica) oko neke zajedničke osi rotacije. U sportskim aktivnostima možemo uočiti mnoge primjere kod kojih se pojavljuju samo neke od tih komponenti, a isto tako uočavamo mnoge primjere u kojima se pojavljuju njihove kombinacije. Skijaški skokovi su dobar primjer kod kojih se, gotovo, ne događaju komponente rotacija, već samo krivocrtna komponenta gibanja. Primjer sportskih aktivnosti kod kojih se pojavljuju rotacijske komponente gibanja su umjetnička klizanja na ledu, akrobatski skokovi u vodu, mnoge gimnastičke aktivnosti, i drugo. Općenito možemo reći kako je puno više primjera u sportu u kojima se pojavljuju rotaticijske komponente, nego u kojima ih nema. Segmenti ljudskog tijela redovito ostvaruju kružna gibanja.

Ovdje ćemo uvesti jednodimenzionalne, dvodimenzionalne i trodimenzionalne koordinatne sustave. Razlog uvođenja različitih koordinatnih sustava je u tome što se jedna vrsta gibanja matematički jednostavnije opisuje u jednom sustavu, dok je opis druge vrste gibanja jednostavniji u drugom.

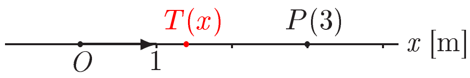
---

[2] Pod pojmom materijalne točke (ili točkastog tijela) podrazumijevamo tijelo čije dimenzije možemo zanemariti u izučavanju njegovog gibanja. Na primjer, planetu Zemlju možemo shvatiti kao materijalnu točku u njenom gibanju oko Sunca, dok bumerang u svom letu ne možemo iako je znatno manji od Zemlje. Uvodimo i pojam krutog tijela čiji se oblik i obujam ne mijenjaju pod utjecajem drugih tijela.

[3] Ponekad je potrebno uvesti i referentne linije, a ne samo referentne točke.

Jednodimenzionalni koordinatni sustav

Jednodimenzionalni pravocrtni koordinatni sustav koristi se u opisivanju

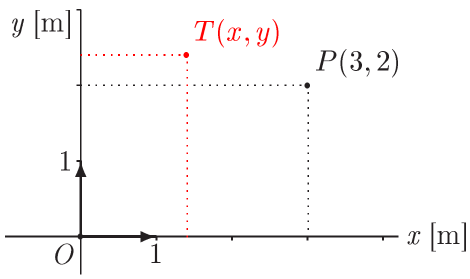


Ilustracija 3.3: Jednodimenzionalni koordinatni sustav na pravcu. Položaj materijalne točke određen je jednom koordinatom. O označava ishodište danog koordinatnog sustava. Vektor na ilustraciji predstavlja jedinični vektor koordinatne osi.

gibanja tijela po pravcu. Na ilustraciji 3.3, na primjer, točka P ima koordinatu 3, a točka T neku koordinatu x.

Dvodimenzionalni koordinatni sustavi

Jedan primjer dvodimenzionalnog koordinatnog sustava, koji je najčešće u uporabi, je tzv. Cartesiusov [4] ili pravokutni koordinatni sustav. Za opis



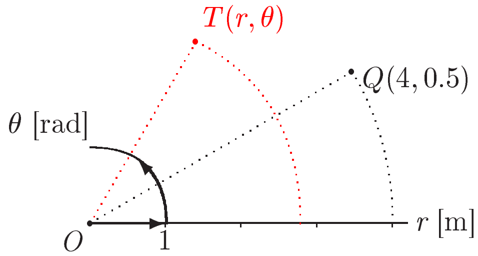
Ilustracija 3.4: Položaj materijalne točke u dvodimenzionalnom pravokutnom (ili Cartesiusovom) koordinatnom sustavu određen je uređenim parom koordinata, (x, y). Koordinatne su osi postavljene okomito jedna na drugu. S obzirom na orijentacije koordinatnih osiju mogu postojati dvije vrste: lijevi i desni koordinatni sustavi. Na ovoj je ilustraciji prikazan desni koordinatni sustav.

položaja točke u ravnini potrebne su dvije koordinate koje se u pravokutnom koordinatnom sustavu najčešće označavaju sa x i y. Na ilustraciji 3.4, točka P određena je koordinatama 3 x-orijentacije, i 2 y-orijentacije. Na jednostavan i jednoznačan način položaj točke u ravnini zapisuje se uređenim parom (x, y), gdje x označava koordinatu koja pripada x-orijentaciji, a y koordinatu

[4] Réne Descartes, 1596. – 1650, zvan još Cartesius. Pravokutni koordinatni sustavi, koje je uveo nazivaju se još i njegovim imenom.

y-orijentacije. Tako se, na primjer, položaj točke P zapisuje kao uređeni par koordinata 3 i 2, tj. kao (3,2).

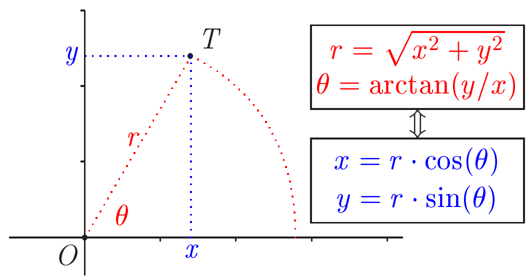
Ponekad je točke u ravnini pogodnije predstaviti u tzv. polarnom koordinatnom sustavu kao što je prikazano na ilustraciji 3.5. Položaj materijalne



Ilustracija 3.5: Položaj materijalne točke u polarnom koordinatnom sustavu određen je uređenim parom koordinata, (r, θ).

točke u polarnom koordinatnom sustavu određen je pomoću udaljenosti r od referentne točke O, te kutem θ što ga zatvara linija koja spaja referentnu točku O s promatranom točkom i referentnom linijom. Orijentacija kuta se uzima suprotno od napredovanja kazaljke na satu. Na primjer, ako je neka točka određena polarnim koordinatama 4 m i 0.5 rad (točka Q na ilustraciji 3.5), onda se ona nalazi na udaljenosti 4 m od referentne točke pod kutem od 0.5 rad u odnosu na referentnu liniju. Kut od 0.5 rad odgovara kutu od približno $28^0 39$' ($180^0 = \pi$ rad).

Položaj neke točke u ravnini može se prikazati i u pravokutnom i u polarnom koordinatnom sustavu, kao što je prikazano na ilustraciji 3.6. To



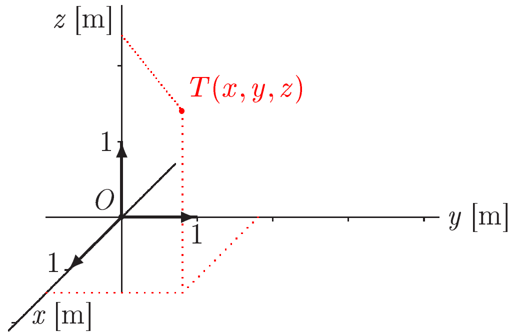
Ilustracija 3.6: Koordinate neke točke u polarnom koordinatnom sustavu, r i θ, jednoznačno se izražavaju preko koordinata iste točke u pravokutnom koordinatnom sustavu, x i y, i obratno.

znači kako moraju postojati jednoznačne transformacije koordinata jednog koordinatnog sustava u drugi. Ako su poznate koordinate položaja materijalne točke u jednom koordinatnom sustavu, tada se mogu saznati i koordinate u drugom sustavu.

Trodimenzionalni koordinatni sustavi

Za označavanje položaja materijalnih točaka u trodimenzionalnom prostoru potrebne su tri koordinate, a uglavnom se koriste pravokutni ili Cartesiev, zatim sferni, te cilindrični koordinatni sustavi.

Na ilustraciji 3.7 prikazan je pravokutni trodimenzionalni koordinatni

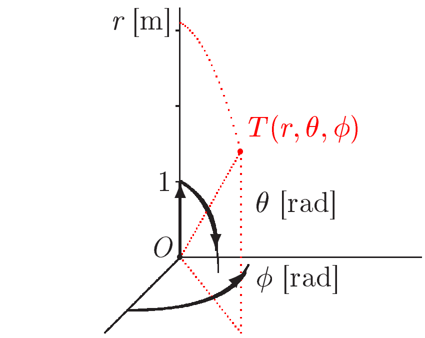


Ilustracija 3.7: Položaj materijalne točke u trodimenzionalnom pravokutnom koordinatnom sustavu određen je uređenom trojkom koordinata, x, y, i z. Na ilustraciji je prikazan desni koordinatni sustav. Lijevi koordinatni sustav dobije se promjenom orijentacije samo jedne koordinatne osi.

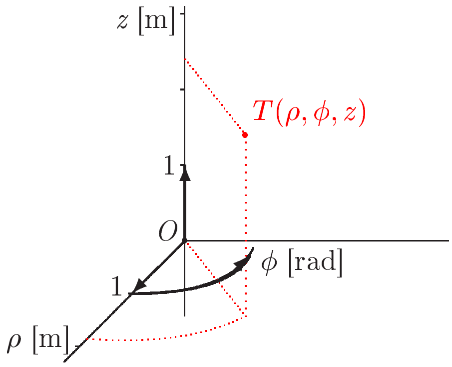
sustav. Točke trodimenzionalnog prostora ovim sustavom određene su uređenom trojkom koordinata (x, y, z). Koordinatne osi, x, y i z, postavljene su međusobno okomito jedne na druge.

Na ilustraciji 3.8 prikazan je sferni koordinatni sustav. Položaj neke točke u tom sustavu određen je uređenom trojkom koordinata (r, θ, ϕ). Koordinata r označava udaljenost dane točke od referentne točke sfernog koordinatnog sustava. Kut θ je kut što ga zatvara spojnica referentne točke i dane točke T s referentnom linijom r. Kut ϕ je kut što ga zatvara projekcija spojnice referentne točke O i dane točke T na referentnoj ravnini s referentnom linijom te ravnine.

Na ilustraciji 3.9 prikazan je cilindrični koordinatni sustav. Točke u tom sustavu određene su uređenom trojkom koordinata (ρ, ϕ, z). Koordinata ρ predstavlja udaljenost između projekcije dane točke na referentnu ravninu i referentne točke O, dok koordinata ϕ označava kut što ga zatvara referentna



Ilustracija 3.8: Položaj materijalne točke u sfernom koordinatnom sustavu određen je uređenom trojkom koordinata, r, θ, i ϕ.



Ilustracija 3.9: Položaj materijalne točke u cilindričnom koordinatnom sustavu određen je uređenom trojkom koordinata, ρ, ϕ, i z.

linija ρ s projekcijom spojnice referentne točke O i dane točke. Koordinata z ima jednako značenje kao i kod pravokutnog koordinatnog sustava.

Koordinate neke točke u jednom koordinatnom sustavu jednoznačno su određene koordinatama te iste točke izražene u drugom koordinatnom sustavu. Na ilustraciji 3.10 prikazane su transformacije koordinata pravokutnog, sfernog i cilindričnog sustava, jednih u druge.

Najčešće je uporabi pravokutni koordinatni sustav. No, ako gibanje danog tijela sadrži komponente rotacijskih gibanja, koristi se sferni, a u nekim slučajevima i cilindrični koordinatni sustav. Gibanje nekog tijela može biti opisano u svim navedenim koordinatnim sustavima, ali je dobro odabrati onaj koordinatni sustav u kojem jednadžbe gibanja danog tijela imaju najjednostavniji oblik.

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \rho = r \cdot \sin(\theta)$$
$$\phi = \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi = \phi$$
$$\theta = \arctan(\rho / z) \qquad z = r \cdot \cos(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \arctan(y/x) \qquad \phi = \arctan(y/x)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \qquad z = z$$

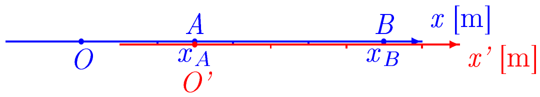
$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$x = r \cdot \sin(\theta)\cos(\phi) \qquad x = \rho \cdot \cos(\phi)$$
$$y = r \cdot \sin(\theta)\sin(\phi) \qquad y = \rho \cdot \sin(\phi)$$
$$z = r \cdot \cos(\theta) \qquad z = z$$

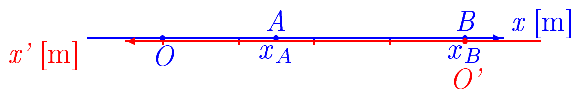
Ilustracija 3.10: Koordinate trodimenzionalnog pravokutnog, sfernog i cilindričnog međusobno se jednoznačno transformiraju jedne u druge.

Primjeri

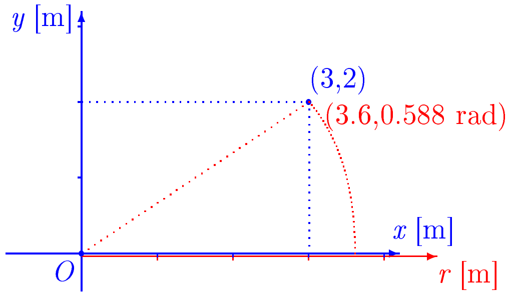
1. Točka A u nekom jednodimenzionalnom koordinatnom sustavu S ima koordinatu 1.5 m, a točka B, 4 m. Ako bismo uveli koordinatni sustav S' kojemu je ishodište u točki A, a orijentacija koordinatne osi jednaka orijentaciji sustava S, tada je koordinata točke A, $x'_A = 0$, a točke B, $x'_B = 2.5$ m.



2. Ako iz gornjeg primjera, koordinatni sustav S' izaberemo tako da mu je ishodište O' u točki B, a orijentacija koordinatne osi suprotna orijentaciji koordinatne osi x sustava S, tada je koordinata točke A, $x'_A = -2.5$ m, a točke B, $x'_B = 0$.



3. Točka A u dvodimenzionalnom pravokutnom koordinatnom sustavu ima koordinate 3 m i 2 m. Odredite polarne koordinate r i θ te točke ako se ishodišta dvaju koordinatnih sustava poklapaju.



$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} = 3.6 \text{ m} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{2 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right) = 0.588 \text{ rad.}
\end{aligned}
$$

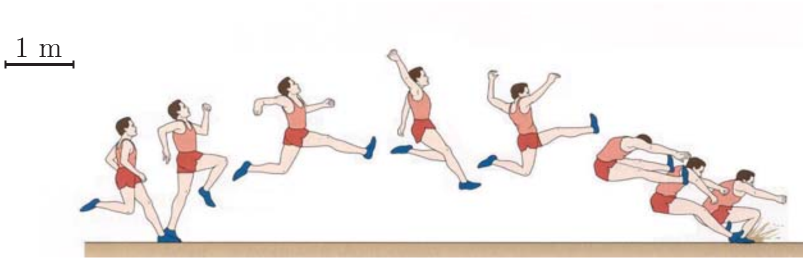
3.1.3 Fizikalne veličine i mjerne jedinice

Pojmovi **fizikalnih veličina** zasnovani su na oblikovanju zakona o prirodi. Moguće ih je prikazati nekom od geometrijskih tvorevina (tzv. skalarima, vektorima ili tenzorima). Koje fizikalne veličine treba uvesti određuje se tek prilikom pronalaženja fizikalnih zakona o prirodi. Fizikalna veličina predstavlja neko mjerljivo svojstvo fizikalnog stanja sustava (npr. položaj tijela, masa tijela, temperatura zraka, izvršeni rad, brzina tijela, ...), a označavamo ih, u najvećoj mjeri, malim i velikim slovima latinske abecede i grčkog alfabeta [5]. Oznake većine fizikalnih veličina međunarodno su dogovorene (ISO [6]), a uglavnom su određene uzimajući početna slova engleskih ili latinskih naziva odgovarajućih fizikalnih veličina. Tako je, na primjer, znak za brzinu v (velocity, velocitas), za vrijeme t (time, tempus), za silu F (force), za rad W (work), za kutnu brzinu ω, itd.

Za razliku od običnih promatranja pojava u prirodi, znanstveni eksperiment se odlikuje postavljanjem prostornog i vremenskog sustava u kojemu se vrše mjerenja. **Mjeriti** neku veličinu znači odrediti **brojčanu vrijednost** koja pokazuje koliko puta ta veličina sadrži u sebi istovrsnu veličinu dogovorom uzetu za **mjernu jedinicu**. Na primjer, kao što je prikazano na ilustraciji 3.11, izmjeriti duljinu skoka udalj znači usporediti tu duljinu s mjernom jedinicom duljine (tj. metrom u SI-sustavu) i ustvrditi koliko

[5] Grčki alfabet: $A, \alpha; B, \beta; \Gamma, \gamma; \Delta, \delta; E, \varepsilon; Z, \zeta; E, \eta; \Theta, \theta, \vartheta; I, \iota; K, \kappa; \Lambda, \lambda; M, \mu; N, \nu; \Xi, \xi; O, o; \Pi, \pi; P, \rho; \Sigma, \sigma; T, \tau; \Upsilon, \upsilon; \Phi, \phi, \varphi; X, \chi; \Psi, \psi; \Omega, \omega$ (čitajte: alfa, beta, gama, delta, epsilon, zeta, eta, theta, iota, kapa, lambda, mi, ni, ksi, omikron, pi, ro, sigma, tau, ipsilon, fi, hi, psi, omega)

[6] International Standard Organisation.



Ilustracija 3.11: Uz određivanje brojčane vrijednosti duljine skoka udalj.

promatrana duljina skoka ima tih mjernih jedinica duljine. Tako se dobije brojčana vrijednost fizikalne veličine koja se mjeri. Nije dovoljno poznavati samo brojčanu vrijednost, već treba znati i njezinu mjernu jedinicu. Stoga zaključujemo kako se fizikalne veličine izražavaju pomoću brojčanih vrijednosti i mjernih jedinica. Na primjer, ako je duljina spomenutog skoka 8.1 metara, tada je brojčana vrijednost 8.1, a mjerna jedinica jedan metar. Nije dovoljno reći kako je duljina skoka 8.1, već 8.1 metara. Ako izaberemo drugu mjernu jedinicu, npr. jedan centimetar, tada se i brojčana vrijednost promijeni, u spomenutom primjeru na 810, dakle duljina bi bila 810 centimetara.

Svaka fizikalna veličina ima svoju mjernu jedinicu, no, zbog međusobne povezanosti mnogih fizikalnih veličina kroz fizikalne zakone i definicije, i mjerne jedinice tih fizikalnih veličina međusobno su povezane. Stoga se može govoriti o osnovnim i izvedenim fizikalnim veličinama (te njihovim mjernim jedinicima). Skup mjernih jedinica pomoću kojih možemo izražavati ostale nazivamo **osnovnim mjernim jedinicama**, a sve druge **izvedenim mjernim jedinicama**.

Fizikalne su veličine većinom skalarne ili vektorske veličine, no postoje još i različite vrste tenzorskih veličina. **Skalarna** je veličina potpuno određena svojom brojčanom vrijednošću i mjernom jedinicom. **Vektorska** veličina je određena ako su joj poznate brojčana vrijednost, mjerna jedinica i **orijentacija** [7]. Skalarne veličine su npr. vrijeme, put, masa, temperatura, rad, a vektorske veličine npr. položaj, pomak, sila. Tako npr. nije dovoljno reći kako je pomak nekog tijela 10 m, već treba odrediti i orijentaciju. Vektorske su veličine često označavaju malom strelicom iznad alfabetske oznake (npr. brzina sa $\vec{v}$, ili sila sa $\vec{F}$). Iznos vektora označavat ćemo ispuštajući znak strelice iznad alfabetske oznake (npr. iznos sile sa F) ili postavljajući oznaku vektora u dvije okomite crtice (npr. iznos sile sa $|\vec{F}|$). Brojčanu

[7] U mnogim literaturama umjesto pojma orijentacije uzimaju se dva pojma: pravac i smjer. Pod pojmom orijentacije ovdje ćemo podrazumijevati istovremeno i pravac i smjer.

vrijednost i mjernu jedinicu nekog vektora zajedničkim imenom nazivamo **iznosom** toga vektora. **Tenzorske** veličine su poopćenje skalarnih i vektorskih veličina. Njihovo je uvođenje izvan okvira ovog udžbenika.

Primjeri

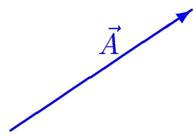
1. Broj igrača na sportskom terenu je skalarna veličina.

2. Položaj lopte na sportskom terenu je vektorska veličina.

3.1.4 Svojstva vektorskih veličina

Matematičke operacije između skalarnih veličina su operacije obične algebre i ovdje ih nećemo posebno uvoditi, pretpostavljajući kako su čitatelju poznate. U takve operacije ubrajamo operacije zbrajanja skalara, oduzimanja, množenja i drugih. Primjeri skalarnih veličina, koje ćemo koristiti dalje u tekstu, su vrijeme, masa tijela, temperatura, i mnoge druge.

Primjeri vektorskih veličina koje ćemo uvesti kasnije u tekstu, su sila koja djeluje na tijelo, brzina tijela, količina gibanja i mnoge druge. Pokazat ćemo kako za te fizikalne veličine nije dovoljno poznavati samo njihove iznose, tj. brojčane vrijednosti i odgovarajuće mjerne jedinice, već i orijentacije tih veličina. Geometrijski, vektore prikazujemo kao usmjerene pravocrtne



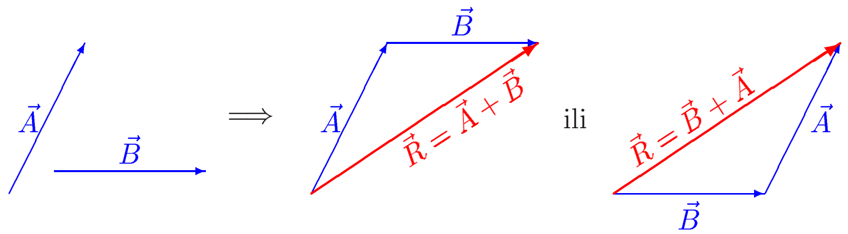
Ilustracija 3.12: Geometrijski prikaz vektorske veličine kao usmjerenog odsječka. Duljina odsječka označava iznos vektorske veličine.

odsječke (strelice), kao što je prikazano na ilustraciji 3.12. U dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prostoru postoji beskonačno mnogo orijentacija koje vektori mogu imati. Međutim, u jednodimenzionalnom prostoru (primjer pravocrtnog gibanja) mogu postojati samo dvije moguće orijentacije.

U ovom odjeljku upoznat ćemo matematička svojstva vektora koja vrijede za sve vektorske veličine.

Jednakost dvaju vektora. Kažemo kako su bilo koje dvije vektorske veličine (ili vektori, kako ih kraće nazivamo) jednake samo onda ako imaju jednake iznose i jednake orijentacije. Za dva vektora koji imaju jednake ili suprotne orijentacije, kažemo da leže na paralelnim pravcima. Takve vektore nazivamo **kolinearnim vektorima**, a vektore koji leže u paralelnim ravninama nazivamo **komplanarnim vektorima**.

Zbrajanje vektora. Zbrajanje vektora ima smisla samo ako pripadaju istovrsnim fizikalnim veličinama (npr. ako označavaju silu). Postupak zbrajanja dviju vektorskih veličina $\vec{A}$ i $\vec{B}$ može se lako prikazati geometrijskim pristupom, što je prikazano na ilustraciji 3.13. Prvo se jedan vektor, npr.

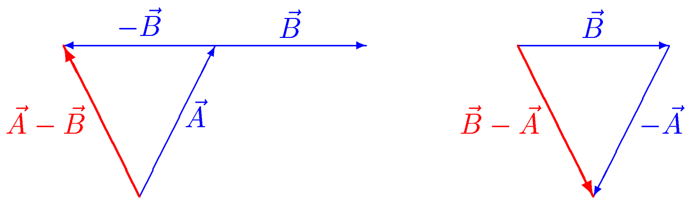


Ilustracija 3.13: Zbrajanje dvaju vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$, za koje vrijedi zakon komutativnosti.

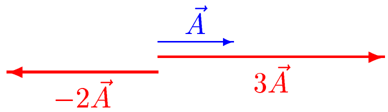
vektor $\vec{A}$, postavi sa svojim iznosom i orijentacijom relativno na uvedeni koordinatni sustav. Nakon toga se drugi vektor $\vec{B}$ paralelno dovede tako da mu početak bude u vrhu vektora $\vec{A}$. Zbroj vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ je novi vektor $\vec{R}$ čiji je početak u početku prvog vektora, a vrh u vrhu drugog vektora. Iz ilustracije vidimo kako nije važan poredak kod zbrajanja vektora, tj. kažemo kako vrijedi svojstvo komutativnosti zbrajanja dvaju vektora, $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$. Slično se pravilo primjenjuje i za slučaj zbrajanja više vektora. Kod zbrajanja se početak sljedećeg vektora uvijek postavlja na vrh prethodnog, a poredak vektora nije važan.

Oduzimanje vektora. Vektor $\vec{B}$ oduzimamo od vektora $\vec{A}$ tako što zbrajamo vektor $\vec{A}$ s vektorom suprotne orijentacije vektoru $\vec{B}$, što je prikazano na ilustraciji 3.14. Jasno je kako za oduzimanje dvaju vektora vrijedi svojstvo antikomutativnosti, tj. $\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$.

Množenje vektora skalarom. Vektor $\vec{A}$ pomnožen skalarom λ daje novi vektor $\lambda\vec{A}$ koji ima jednaku ili suprotnu orijentaciju vektoru $\vec{A}$. Ako je skalar λ negativan, tada je orijentacija novog vektora suprotna orijentaciji vektora $\vec{A}$, a inače jednake orijentacije. Na primjer, kao što je prikazano na ilustraciji 3.15, ako vektor $\vec{A}$ pomnožimo sa skalarom 3, to pišemo kao $3\vec{A}$. Iznos vektora $3\vec{A}$ je tri puta veći od iznosa vektora $\vec{A}$, a orijentacija mu je



Ilustracija 3.14: Oduzimanje dvaju vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Za oduzimanje dvaju vektora vrijedi zakon antikomutativnosti.

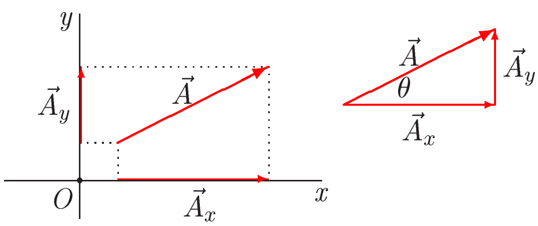


Ilustracija 3.15: Množenje vektora $\vec{A}$ skalarom. Prikazani su vektori $\vec{A}$, $3\vec{A}$ i $-2\vec{A}$.

jednaka orijentaciji vektora $\vec{A}$. Vektor $-2\vec{A}$ ima iznos 2 puta veći od iznosa vektora $\vec{A}$, a orijentacija mu je suprotna orijentaciji vektora $\vec{A}$.

Dijeljenje vektora skalarom. Dijeljenje nekog vektora $\vec{A}$ skalarom λ svodi se na množenje s recipročnom vrijednosti tog skalara, $1/\lambda$, s tim da dijeljenje s nulom nije definirano ($\lambda \neq 0$).

Komponente vektora. Zbrajanje, oduzimanje, kao i druge operacije vektora često je jednostavnije izvršavati ako se vektori promatraju u nekom koordinatnom sustavu, npr. pravokutnom koordinatnom sustavu. U tom se slučaju definira **vektorska komponenta** danog vektora kao vektor dobiven njegovom projekcijom na određenu koordinatnu os (ilustracija 3.16). U



Ilustracija 3.16: Vektorske komponente $\vec{A}_x$ i $\vec{A}_y$ vektora $\vec{A}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu.

dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu možemo odrediti dvije vektorske komponente danog vektora, a njihov zbroj je jednak danom vektoru

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y. \tag{3.1}$$

Iznosi vektorskih komponenti vektora $\vec{A}$ su skalari koje nazivamo **skalarnim komponentama** (ili jednostavno komponentama):

$$A_x = A\cos(\theta), \qquad A_y = A\sin(\theta), \tag{3.2}$$

gdje θ označava kut između danog vektora i koordinatne osi x, a A iznos tog vektora. Obratno, iznos vektora i kut koji određuje njegovu orijentaciju u odabranom koordinatnom sustavu možemo izraziti preko njegovih komponenti

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right). \tag{3.3}$$

Jedinični vektori. Jedinični vektori su vektori čiji su iznosi jednaki 1. Oni nemaju mjernu jedinicu i ne predstavljaju niti jednu fizikalnu veličinu, već se koriste za opisivanje orijentacija svih vektorskih veličina. Jedinični vektori čije orijentacije prikazuju orijentacije koordinatnih osiju x, y i z označavaju se sa $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ i $\hat{k}$. Oznaka 'šešira' iznad slovne oznake je uzeta umjesto strelice kako bi se jedinični vektori razlikovali od ostalih vektora. Jedinični vektori orijentacija koordinatnih osiju su vrlo korisni u opisivanju drugih vektora jer se bilo koji vektor može izraziti preko linearne kombinacije jediničnih vektora

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}. \tag{3.4}$$

Veličine $A_x\hat{\imath}$, $A_y\hat{\jmath}$ i $A_z\hat{k}$ su vektorske komponente vektora $\vec{A}$, a skalari A_x, A_y i A_z njegove skalarne komponente. Nadalje vrijedi, zbroj dvaju vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ je vektor čije su komponente jednake zbroju odgovarajućih komponenti tih vektora

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + b_z)\hat{k}. \tag{3.5}$$

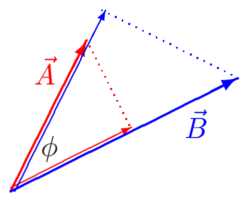
Slično vrijedi i za oduzimanje dvaju vektora, a množenjem nekog vektora $\vec{A}$ sa skalarom λ dobije se vektor čije su komponente dobivene množenjem komponenti danog vektora istim skalarom

$$\lambda\vec{A} = \lambda A_x\hat{\imath} + \lambda A_y\hat{\jmath} + \lambda A_z\hat{k}. \tag{3.6}$$

Skalarno množenje vektora. U čestoj su uporabi dvije vrste množenja dvaju vektora: jedno množenje proizvodi skalar (i takvo množenje nazivamo skalarnim množenjem), a drugo proizvodi novi vektor (i takvo množenje je nazvano vektorskim množenjem). Skalarno množenje vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ definirano je na sljedeći način

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\phi), \tag{3.7}$$

gdje je ϕ kut između danih vektora. Skalarno množenje možemo shvatiti i kao množenje iznosa jednog vektora sa skalarnom komponentom drugog vektora duž orijentacije prvoga vektora (ilustracija 3.17). Ako je kut ϕ između



Ilustracija 3.17: Dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ te njihove komponente duž drugog vektora.

dvaju vektora jednak 0^0, tada je komponenta jednog vektora duž drugog maksimalna, te je time i skalarni produkt tih dvaju vektora maksimalan. Međutim, ako je kut između njih 90^0, tada je komponenta jednog vektora duž drugog jednaka nuli, pa je time i skalarni produkt tih dvaju vektora jednak nuli. Nadalje vrijedi, ako su vektori dani preko svojih komponenti, tada se skalarni produkt tih dvaju vektora može napisati kao zbroj umnožaka njihovih komponenti

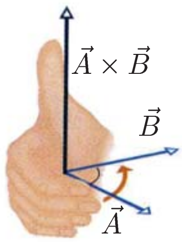
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{3.8}$$

Za skalarno množenje vrijedi zakon komutativnosti, tj. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

Vektorsko množenje vektora. Vektorsko množenje dvaju vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ stvara novi vektor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ čiji je iznos

$$C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin(\phi), \tag{3.9}$$

gdje ϕ predstavlja manji kut između danih vektora u produktu. Pravac na kojem leži novi vektor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ je okomit na ravninu koju razapinju vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$, a njegova se orijentacija određuje tzv. pravilom desne ruke kao što je prikazano na ilustraciji 3.18. Ako su vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ dani preko svojih



Ilustracija 3.18: Pravilo desne ruke kod određivanja orijentacije vektorskog produkta dvaju vektora.

komponenti, tada se vektorski produkt tih dvaju vektora može prikazati preko njihovih komponenti

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}. \quad (3.10)$$

Iz gornjeg se izraza zaključuje kako za vektorsko množenje ne vrijedi zakon komutativnosti, već vrijedi zakon antikomutativnosti, $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

Primjeri

1. Odredite kut između vektora $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ i $\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$.

   Koristimo izraz za skalarni produkt dvaju vektora

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\phi).$$

   Iznosi vektora su

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \\ B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3.6, \end{aligned}$$

   a skalarni produkt $\vec{A}\cdot\vec{B}$ moguće je odrediti izravno preko komponenti dvaju vektora

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j})\cdot(-2\hat{i} + 3\hat{k}) = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot 0 + 0\cdot 3 = -6.$$

   Koristeći izraz za skalarni produkt, dobijemo vrijednost kuta

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right) = \arccos\left(\frac{-6}{5\cdot 3.61}\right) = 109.4^0.$$

2. Uvjerite se kako je $\vec{B} \cdot \vec{A} = -6$, gdje su vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ vektori iz gornjeg primjera.

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = (-2\hat{\imath} + 3\hat{k}) \cdot (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 = -6.$$

3. Odredite zbroj $\vec{A} + \vec{B}$ i razliku $\vec{A} - \vec{B}$ vektora iz gornjih primjera.

   Zbroj danih vektora je

$$\vec{A}+\vec{B} = (3\hat{\imath}-4\hat{\jmath})+(-2\hat{\imath}+3\hat{k}) = (3-2)\hat{\imath}+(-4+0)\hat{\jmath}+(0+3)\hat{k} = \hat{\imath}-4\hat{\jmath}+3\hat{k},$$

   a razlika

$$\vec{A}-\vec{B} = (3\hat{\imath}-4\hat{\jmath})-(-2\hat{\imath}+3\hat{k}) = (3+2)\hat{\imath}+(-4-0)\hat{\jmath}+(0-3)\hat{k} = 5\hat{\imath}-4\hat{\jmath}-3\hat{k}.$$

4. Odredite vektorski produkt vektora $\vec{A} \times \vec{B}$ za vektore iz gornjih primjera.

   Koristimo izraz za vektorski produkt

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) \times (-2\hat{\imath} + 3\hat{k}) \\ &= [(-4) \cdot 3 - 0 \cdot 0]\hat{\imath} + [0 \cdot (-2) - 3 \cdot 3]\hat{\jmath} + [3 \cdot 0 - (-4) \cdot (-2)]\hat{k} \\ &= -12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 8\hat{k}. \end{aligned}$$

5. Za dane vektore iz gornjih primjera odredite vektorski produkt $\vec{B} \times \vec{A}$ i uvjerite se kako vrijedi $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$.

   Na sličan način kao u prethodnom primjeru dobijemo

$$\begin{aligned} \vec{B} \times \vec{A} &= (-2\hat{\imath} + 3\hat{k}) \times (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) \\ &= [0 \cdot 0 - 3 \cdot (-4)]\hat{\imath} + [3 \cdot 3 - (-2) \cdot 0]\hat{\jmath} + [(-2) \cdot (-4) - 0 \cdot 3]\hat{k} \\ &= 12\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 8\hat{k}. \end{aligned}$$

   Jasno vidimo kako vrijedi antikomutativnost

$$\vec{B} \times \vec{A} = 12\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 8\hat{k} = -(-12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 8\hat{k}) = -\vec{B} \times \vec{A}.$$

6. Pokažite kako je vektorski produkt $\vec{A} \times \vec{B}$ vektora iz gornjih primjera okomit na oba vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

   Znamo kako su dva vektora međusobno okomita ako je njihov skalarni produkt jednak nuli. Stoga odredimo skalarni produkt vektora $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ s oba vektora

$$\begin{aligned}\vec{C} \cdot \vec{A} &= (-12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 8\hat{k}) \cdot (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) \\ &= -12 \cdot 3 + (-9) \cdot (-4) + (-8) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Jednako tako vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}\vec{C} \cdot \vec{B} &= (-12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 8\hat{k}) \cdot (-2\hat{\imath} + 3\hat{k}) \\ &= -12 \cdot (-2) + (-9) \cdot 0 + (-8) \cdot 3 = 0.\end{aligned}$$

7. Odredite komponente vektora $\vec{A}$ koji označava položaj točke (7, 0.5236 rad) u polarnom koordinatnom sustavu, te odredite iznos toga vektora.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \\ A_x &= r\cos(\theta) = 7 \cdot 0.866 = 6.062 \\ A_y &= r\sin(\theta) = 7 \cdot 0.5 = 3.5 \\ A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{6.062^2 + 3.5^2} = 7.\end{aligned}$$

8. Dva vektora imaju različite iznose. Može li njihova suma biti nula?

   Ne može.

9. Može li nekad skalarna komponenta vektora biti veća od njegovog iznosa?

   Ne može. Skalarne komponente su uvijek manje ili jednake iznosu danog vektora.

3.1.5 Međunarodni sustav mjernih jedinica

Postoji više načina odabira osnovnih mjernih jedinica. Međutim, mnoge su zemlje u listopadu 1960. godine prihvatile tzv. **Međunarodni sustav mjernih jedinica** (ili kraće **SI-sustav**, Système International d'Unités). Dogovorom je odabrano sedam osnovnih mjernih jedinica Međunarodnog sustava preko kojih se mogu izraziti mjerne jedinice svih drugih fizikalnih veličina (tablica 3.1).

Izvedene mjerne jedinice izražavaju se preko osnovnih jedinica koristeći algebarske izraze zakona i definicija odgovarajućih fizikalnih veličina.

Osnovne fizikalne veličine SI-sustava	Mjerne jedinice	Oznake
Duljina	metar	m
Vrijeme	sekunda	s
Masa	kilogram	kg
Temperatura	kelvin	K
Jakost el. struje	amper	A
Jakost svjetlosti	candela	cd
Količina tvari	mol	mol

Tablica 3.1: Osnovne fizikalne veličine i mjerne jedinice SI-sustava. Ovom skupu osnovnih mjernih jedinica pridruženi su 1 rad (radijan) kao mjerna jedinica kuta, te 1 srad (steradijan) kao mjerna jedinica prostornog kuta.

Na primjer, mjerna jedinica SI-sustava za brzinu nekog tijela je metar po sekundi, m/s, a određuje se iz definicije brzine. Pojedine mjerne jedinice koje nisu u popisu jedinica SI-sustava (npr. morska milja, čvor, hektar, litra, minuta, sat, Celsiusov stupanj, ...) toliko su udomaćene u pojedinim područjima ljudskog djelovanja da se mogu i dalje upotrebljavati.

Valja napomenuti kako se skupu osnovnih mjernih jedinica pridružuju 1 rad (radijan) kao mjerna jedinica kuta, te 1 srad (steradijan) kao mjerna jedinica prostornog kuta. Među osnovnim mjernim jedinicima unutar problema kojima se bavi biomehanika koristit ćemo, uglavnom, mjerne jedinice za duljinu, vrijeme i masu.

Duljina je vrlo važna veličina u mnogim sportskim disciplinama, kao na primjer kod različitih utrka, skokova i mnogih drugih disciplina. Duljina je važna veličina i kod razmatranja antropometrijskih osobina sportaša. Naime, visina sportaša može biti odlučujuća kod sportova kao što je košarka. U nekim sportovima, duljina je mjera uspjeha, kao na primjer, kod skokova i bacanja. Uz to, duljina je veličina kojom se definiraju pravila kod nekih sportova, npr. visina mrežice kod tenisa i dimenzija polja za igranje.

Vrijeme je, također, jedna od osnovnih veličina u sportu. U sportovima koji uključuju utrke, vrijeme je mjera uspjeha. Atletičar koji postigne najkraće vrijeme za prevaljivanje određene duljine je pobjednik utrke. No, i kod mnogih klupskih igara (kao što su nogomet, košarka) vrijeme reakcije u velikoj mjeri određuje mogućnost postizanja dobrih rezultata. Kao i duljina, i vrijeme je veličina kojom se definiraju pravila kod nekih sportskih disciplina. Na primjer, vrijeme trajanja većine klupskih igara.

Masa je, također, važna veličina u mnogim sportovima. U nekim sportovima masa je mjera uspjeha (dizanje utega). Kod nekih sportova, masa određuje pravila određene discipline (na primjer, masa sportaša kod borilačkih sportova). Kod sportova u kojima masa nije unutar pravila, masa sportaša je jedan od odlučujućih veličina u postizanju dobrih rezultata. U nekim sportovima važno je imati manju masu, dok u drugim veću (npr. sumo-borba).

Važeće definicije osnovnih mjernih jedinica za duljinu, vrijeme i masu su sljedeće:

- **sekunda** je trajanje 9192631770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju određenih hiperfinih energijskih razina atoma cezija 133.
- **Metar** je duljina puta kojeg svjetlost prevali u vakuumu u vremenskom intervalu od 299792458-og dijela sekunde.
- **Kilogram** je jednak masi međunarodnog prototipa načinjenog od smjese platine i iridija, oblika cilindra. Visina i promjer baze cilindra je 3.9 cm.

Prefiksi mjernih jedinica

Ponekad su brojčane vrijednosti izrazito manje (ili veće) od brojčanih vrijednosti osnovnih mjernih jedinica, pa se u tom slučaju uvode određeni **prefiksi mjernih jedinica**. Pomoću prefiksa dobivamo decimalne višekratnike fizikalnih mjernih jedinica. U tablicama 3.2 i 3.3 prikazani su međunaro-

Oznaka	Naziv	Engleski naziv	Vrijednost
da	deka	deka	10^1
h	hekto	hecto	10^2
k	kilo	kilo	10^3
M	mega	mega	10^6
G	giga	giga	10^9
T	tera	tera	10^{12}
P	peta	peta	10^{15}
E	eksa	exa	10^{18}
Z	zeta	zetta	10^{21}
Y	jota	yotta	10^{24}

Tablica 3.2: Prefiksi za tvorbu uvećanih decimalnih jedinica.

dno prihvaćeni prefiksi fizikalnih mjernih jedinica. U tablici 3.2 prikazani su

Oznaka	Naziv	Engleski naziv	Vrijednost
d	deci	deci	10^{-1}
c	centi	centi	10^{-2}
m	mili	milli	10^{-3}
μ	mikro	micro	10^{-6}
n	nano	nano	10^{-9}
p	piko	pico	10^{-12}
f	femto	femto	10^{-15}
a	ato	atto	10^{-18}
z	zepto	zepto	10^{-21}
y	jokto	yocto	10^{-24}

Tablica 3.3: Prefiksi za tvorbu umanjenih decimalnih jedinica.

prefiksi za tvorbu uvećanih decimalnih jedinica, a u tablici 3.3 prefiksi za tvorbu umanjenih decimalnih jedinica. Na primjer, neka je ukupna duljina puta koju prevale biciklisti u jednoj dionici 100000 m. Ovu se udaljenost lakše zapisuje koristeći prefiks za 1000, tj. kilo (oznaka k). Tada se ta udaljenost piše sa 100 km.

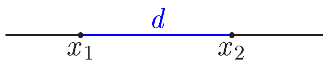
Pojmovi duljine, površine i volumena

Iako nam pojmovi duljine, površine i volumena izgledaju sasvim poznati, ovdje ćemo ih definirati zbog njihove važnosti i učestalosti korištenja u biomehanici sporta. Već smo rekli kako je duljina veličina kojom se mjeri uspjeh, definiraju pravila, a znamo kako je to jedno od važnijih svojstava koje izravno ima utjecaj na uspjeh u mnogim sportskim aktivnostima. Slično vrijedi i za površinu i za volumen. Na primjer, površina koju razapinje skijaš kod skijaških letova je jedan od važnijih čimbenika u postizanju uspjeha.

Duljina. Bilo koje dvije točke dane krivulje omeđuju neki odsječak (ili segment). Veličinu toga odsječka nazivamo duljina. Duljina odsječka nekog pravca definira se kao apsolutna vrijednost razlike koordinata točaka koje omeđuju taj odsječak

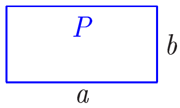
$$d = |x_2 - x_1|, \tag{3.11}$$

što je prikazano na ilustraciji 3.19. Duljine odsječaka na ostalim krivuljama mogu se odrediti preko duljina odsječka na pravcu. Naime, duljinu bilo kojeg dijela krivulje moguće je podijeliti na manje ili veće odsječke pravaca. Na primjer, duljina opsega kružnice radijusa r je $o = 2\pi r$, gdje je $\pi = 3.14159...$.



Ilustracija 3.19: Duljina odsječka na pravcu.

Površina. Svaki lik obuhvaća neku plohu. Veličinu te plohe nazivamo površinom. Površina pravokutnika (ilustracija 3.20) definira se kao produkt



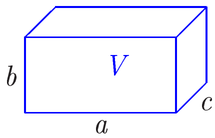
Ilustracija 3.20: Površina pravokutnika.

duljina njegovih stranica

$$P = ab. \tag{3.12}$$

Površine svih drugih likova mogu se odrediti preko površina pravokutnika. Naime, svaku površinu možemo podijeliti u manje ili veće pravokutnike. Na primjer, površina trokuta je $P = ah/2$, gdje je a duljina jedne stranice, a h duljina visine visine na tu stranicu. Površina kruga radijusa r je $P = r^2\pi$.

Volumen. Svako tijelo obuhvaća određeni prostor. Veličinu tog prostora nazivamo volumenom toga tijela. Volumen kvadra stranica a, b i c definira se kao produkt duljina tih stranica (ilustracija 3.21)



Ilustracija 3.21: Volumen kvadra.

$$V = abc. \tag{3.13}$$

Volumeni svih drugih tijela mogu se odrediti preko volumena različitih kvadara. Naime, svako tijelo može se aproksimirati skupom manjih ili većih kvadara. Na primjer, volumen valjka visine h i osnovice radijusa r je $V = r^2\pi h$, a volumen kugle radijusa r, $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Pretvorbe mjernih jedinica

Pored SI-sustava, postoje i drugi sustavi mjernih jedinica, kao što su Gaussov sustav (mjerne jedinice za duljinu, masu i vrijeme su centimetar, gram i sekunda) ili britanski tehnički sustav (mjerne jedinice za duljinu, masu i vrijeme su stopa, slug i sekunda). Ponekad je važno pretvarati mjerne jedinice iz jednog sustava u drugi. Na primjer, omjeri pojedinih mjernih jedinica su: 1 mi = 1609 m, 1 in = 2.54 cm, 1 slug = 14.59 kg, 1 h = 3600 s (mi je oznaka za milju, in za inch, a h za sat). Ako bismo, na primjer, 15 in željeli pretvoriti u centimetre, tada bismo to napravili na sljedeći način

$$15 \text{ in} = 15 \text{ in}\frac{2.54 \text{ cm}}{\text{in}} = 38.1 \text{ cm}.$$

Nešto je složeniji postupak kad se mjerne jedinice izvedenih fizikalnih veličina pretvaraju jadna u drugu. Na primjer, iznos brzine od 60 mi/h (milja po satu) pretvorili bismo u m/s na sljedeći način

$$60 \text{ mi/h} = 60\ \frac{1609 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 26.82 \text{ m/s}.$$

Primjeri

1. Atletičar je skočio udalj 8.25 m. Koliko je atletičar skočio izraženo u milimetrima?

$$8.25 \text{ m} = 8.25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8.25 \cdot 10^3 \text{ mm} = 8250 \text{ mm}.$$

2. Izrazite u radijanima sljedeće kuteve: 240^0, 40'.

   Kako vrijedi $1^0 = \pi/180$ rad, to je

$$\begin{aligned} 240^0 &= 240\frac{\pi}{180} \text{ rad} = 4.19 \text{ rad} \\ 40' &= 40\frac{1}{60}\frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.016 \text{ rad}. \end{aligned}$$

3. Ako se neka fizikalna veličina A mjeri jedinicama duljine, a druga B u jedinicama vremena, koje od ponuđenih matematičkih operacija imaju smisla: $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, A/B?

   Zbrajanje i oduzimanje, $A + B$, $A - B$, fizikalnih veličina različitih dimenzija nema smisla. Na primjer, nema smisla zbrojiti 2 metra i 3 sekunde, ali ima smisla množenje i dijeljenje takvih veličina. Na primjer, dijeljenjem fizikalne veličine koja ima dimenziju duljine s onom dimenzije vremena možemo dobiti fizikalnu veličinu koja označava brzinu gibanja nekog tijela.

4. Ako je brzina teniske loptice 60 m/s, kolika je ta brzina izražena u km/h i km/s?

   Kako je 1 m = 1/1000 km, a 1 s = 1/3600 h, to je

$$\begin{aligned} v &= 60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 60\frac{\frac{1}{1000}\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 0.06\ \mathrm{km/s} \\ v &= 60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 60\frac{\frac{1}{1000}\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\mathrm{h}} = 216\ \mathrm{km/h}. \end{aligned}$$

5. Odredite vrijeme trajanja nogometne utakmice u sekundama.

$$t = 90\ \mathrm{min} = 90 \cdot 60\ \mathrm{s} = 5400\ \mathrm{s}.$$

6. Procijenite svoju starost u sekundama.

$$t = 20\ \mathrm{y} = 20 \cdot 365\ \mathrm{d} = 20 \cdot 365 \cdot 24\ \mathrm{h} = 20 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s} = 6.3 \cdot 10^8\ \mathrm{s}.$$

7. Odredite udaljenost dijagonalnih kornera nogometnog igrališta i površinu igrališta ako je njegova duljina 100 m, a širina 50 m.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{100^2 + 50^2}\ \mathrm{m} = 111.8\ \mathrm{m} \\ P &= a \cdot b = 100\ \mathrm{m} \cdot 50\ \mathrm{m} = 5000\ \mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

8. Koliko ljudi može stati na teren nogometnog igrališta (100 m × 50 m) ako u prosjeku jedan čovjek zauzima površinu određenu s 50 cm × 40 cm?

$$\begin{aligned} P &= 100\ \mathrm{m} \cdot 50\ \mathrm{m} = 5000\ \mathrm{m}^2 \\ P_1 &= 0.5\ \mathrm{m} \cdot 0.4\ \mathrm{m} = 0.2\ \mathrm{m}^2 \\ n &= \frac{P}{P_1} = \frac{5000\ \mathrm{m}^2}{0.2\ \mathrm{m}^2} = 25000. \end{aligned}$$

9. Volumen loptice za stolni tenis je oko 28 cm^3. Koliki je volumen loptice koja ima dva puta veći radijus?

$$V = \frac{4}{3}\pi(2r_1)^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 = 8V_1 = 8 \cdot 28\ \mathrm{cm}^3 = 224\ \mathrm{cm}^3.$$

10. Koliki je ukupni nagradni fond tenisača na nekom teniskom turniru s 32 ($32 = 2^5$) igrača ako je glavna nagrada 64000 \$ te ako se nagrade dijele po pravilu: dva puta veći iznosi za svaki daljnji uspijeh?

$$x = (5 \cdot \frac{1}{2} + 1)64000\ \$ = 224000\ \$.$$

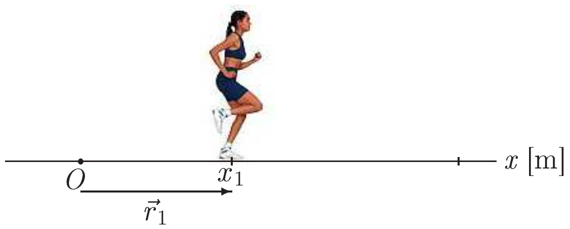
3.1.6 Translacijska gibanja

Ljudi se stalno zanimaju za određena gibanja i brzine njihovih izvršenja. Često se razgovara o brzinama automobila i drugih vozila. U sportu je još i više izražena potreba postizanja što je moguće većih iznosa brzina kao i optimalno postavljenih orijentacija tih brzina. Na primjer, kod skoka udalj nije samo dovoljno imati što je moguće veći iznos brzine pri odskoku već i optimalnu orijentaciju te brzine. U ovom dijelu teksta izučavat ćemo translacijska gibanja u jednoj dimenziji, tj. gibanja duž nekog pravca. U tom smislu definirat ćemo fizikalne veličine položaja, pomaka, puta, brzine i akceleracije nekog odabranog tijela.

3.1.7 Položaj

Prva kinematička veličina kojom možemo opisati neko svojstvo danog točkastog tijela je njegov **položaj**. Na prvi nam se pogled možda čini nevažnim položaj tijela u nekim trenucima. Međutim, razmislite o važnosti položaja igrača na terenu u sportovima kao što su nogomet, tenis, košarka, ragbi, i mnogim drugim sportovima. Izbor strategije često ovisi o rasporedu, odnosno o položajima igrača na terenu.

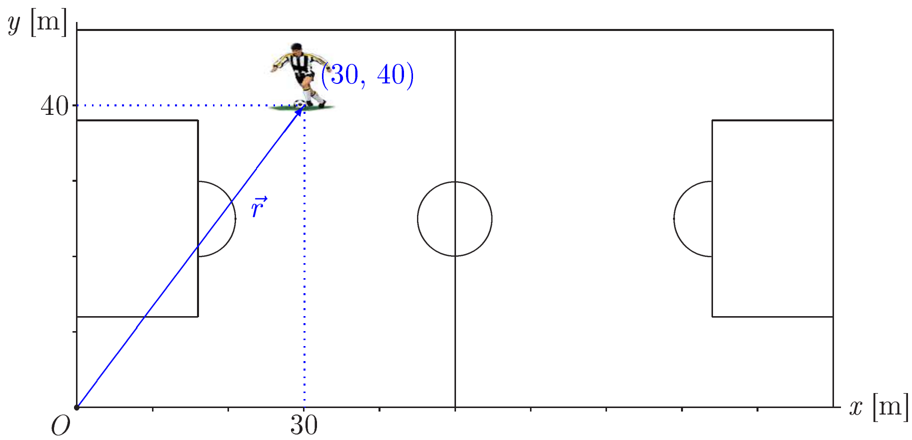
Uočimo, na primjer, atletičarku koja trči na 100 metara, što je prikazano na ilustraciji 3.22. Njen položaj možemo opisati u odnosu na startnu liniju te



Ilustracija 3.22: Atletičarka u jednodimenzionalnom gibanju duž x. U nekom trenutku njen položaj je određen koordinatom x_1.

reći kako se u nekom trenutku nalazi na udaljenosti 40 m od startne linije, ili s obzirom na ciljnu liniju te kazati kako se u tom trenutku nalazi na 60 m od cilja. U oba bismo slučaja koristili nekakav referentni položaj, a podrazumijevali bismo i orijentaciju, iako nije eksplicitno izrečena. Naime, kad kažemo da se atletičarka nalazi na 40 m od startne linije, onda nije eksplicitno jasno nalazi li se atletičarka unutar staze ili izvan nje. Ispravno bismo trebali reći kako se atletičarka nalazi na +40 m u odnosu na koordinatni sustav koji smo izabrali tako da mu se ishodište nalazi na startu, a orijentacija x-osi duž staze od starta prema cilju. U takvom koordinatnom sustavu položaj od –40 m nekog drugog atletičara značio bi kako se on nalazi izvan staze.

Primjer utrke na 100 metara je jednodimenzionalni primjer, kod kojega postoje samo dvije orijentacije položaja koje označavamo sa '+' i '–' predznacima (ponekad se '+' predznak ispušta, ali se u tom slučaju podrazumijeva). Kažemo kako je za označavanje položaja u jednodimenzionalnim slučajevima potrebna samo jedna koordinata, što smo već upoznali kod uvođenja koordinatnih sustava. Kod dvodimenzionalnih situacija znamo kako su nam potrebne dvije koordinate. Na primjer, za potpuni opis položaja igrača na nogometnom terenu (kao na ilustraciji 3.23) nije dovoljno reći kako se nalazi



Ilustracija 3.23: Položaj nogometaša u dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu.

na 30 m od gol-linije, već je potrebno dati i njegov položaj u odnosu na jednu od bočnih strana igrališta. Ako se izabere pravokutni koordinatni sustav tako da mu je ishodište u jednom od kornera, a koordinatne osi duž rubova igrališta, kao na ilustraciji 3.23, tada je položaj nogometaša dan s uređenim parom koordinata (30, 40), gdje su obje koordinate mjerene u metrima. Za potpuno opisivanje položaja u primjerima kod kojih je moguća i promjena visine potreban nam je trodimenzionalni koordinatni sustav, kao na primjer, za opisivanje položaja lopte tijekom igre.

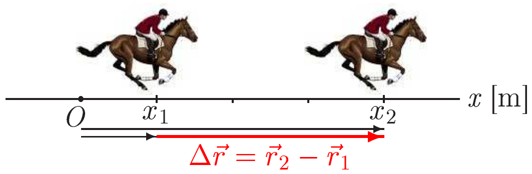
Položaj u nekom koordinatnom sustavu obično se označava oznakom $\vec{r}$, koji je u jednodimenzionalnom koordinatnom sustavu određen jednom koordinatom x (ponekad se kod jednodimenzionalnih gibanja položaj i koordinata tog položaja označavaju istom oznakom, na primjer s x). Mjerna jedinica položaja u SI-sustavu je mjerna jedinica duljine, 1 m.

3.1.8 Pomak

Gibajući se tijelo u nekom vremenskom intervalu učini **pomak** kojega definiramo kao njegovu promjenu položaja, tj. kao razliku krajnjeg i početnog položaja, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Za označavanje promjene odabrane fizikalne veličine uvijek ćemo koristiti grčko slovo Δ. Dakle, za pomak $\Delta\vec{r}$, pišemo

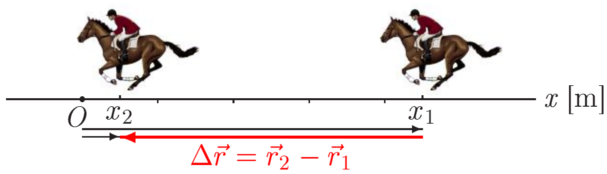
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{3.14}$$

Na primjer, ako se jahač na konju, kao na ilustraciji 3.24 giba po



Ilustracija 3.24: Jahač na konju giba se duž osi x od položaja koordinate $x_1 = 10$ m do položaja $x_2 = 40$ m.

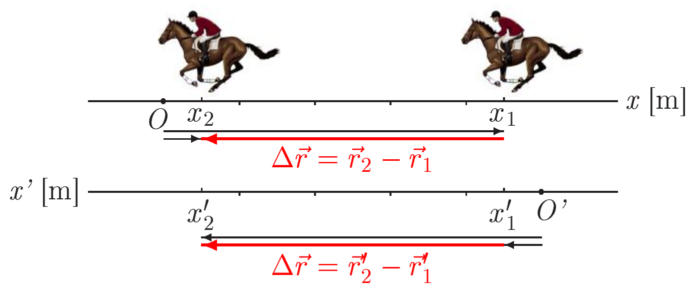
pravcu iz početnog položaja određenim koordinatom $x_1 = 10$ m do krajnjeg položaja koordinate $x_2 = 40$ m, njegov pomak je $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 40$ m – 10 m = +30 m. U ovom slučaju iznos pomaka je 30 m, a orijentacija se poklapa s orijentacijom x-osi odabranog koordinatnog sustava. Ako se, na primjer, isti jahač u nekom drugom trenutku počinje gibati iz početnog položaja koordinate $x_1 = 45$ m do krajnjeg položaja koordinate $x_2 = 5$ m, kao na ilustraciji 3.25, tada bi njegov pomak bio $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 5$ m –



Ilustracija 3.25: Jahač na konju giba se duž osi x od položaja koordinate $x_1 = 45$ m do položaja $x_2 = 5$ m.

45 m = –40 m. Minus predznak u rezultatu označava kako taj pomak ima orijentaciju suprotnu orijentaciji x-osi odabranog koordinatnog sustava.

Jedno te isto gibanje može biti opisano i u nekom drugom koordinatnom sustavu. U jednom koordinatnom sustavu pomak može biti iste orijentacije kao i x-os tog sustava, dok u drugom sustavu suprotne orijentacije. Na ilustraciji 3.26 prikazano je gibanje jahača u dva koordinatna sustava.



Ilustracija 3.26: Gibanje jahača na konju opisano u dva koordinatna sustava. Pomak jahača ima orijentaciju suprotnu orijentaciji x-osi, ali jednaku orijentaciji x'-osi.

U jednom sustavu orijentacija pomaka je suprotna orijentaciji pripadajuće x-osi, a u drugom je jednake orijentacije kao i odgovarajuća x'-os.

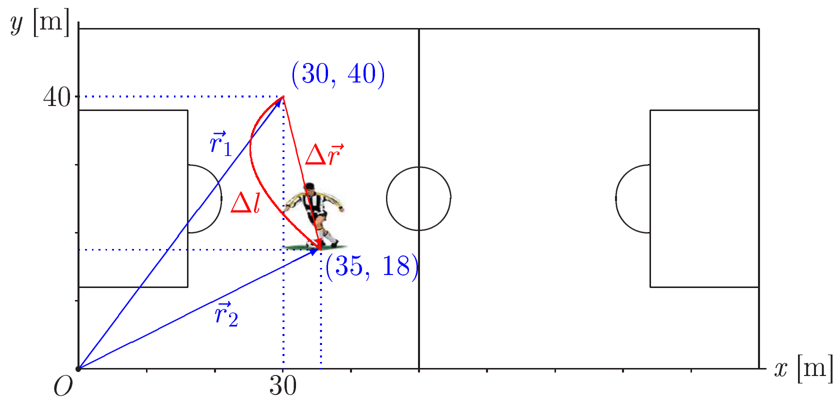
Pomak je vektorska veličina, a njena mjerna jedinica u SI-sustavu je, također, 1 m.

3.1.9 Put

Greškom se vrlo često pomak poistovjećuje s prevaljenim putem. Međutim, **prevaljeni put** (ili jednostavno **put**) definira se kao ukupna duljina segmenta krivulje koju napravi tijelo tijekom svog gibanja. Put nije vektorska veličina, već skalarna, a njena mjerna jedinica je jedinica duljine, u SI-sustavu, 1 m.

Na primjer, razmotrimo gibanje nogometaša (ilustracija 3.27) koji je u jednom trenutku bio u položaju s koordinatama (30, 40), a u nekom kasnijem trenutku u položaju (35, 18). Nogometaš je od prvog do drugog položaja trčao po nekoj krivocrtnoj liniji i za to vrijeme pretrčao oko 30 metara, što predstavlja njegov put, Δl. Pomak je, s druge strane, vektorska veličina i u dvodimenzionalnom sustavu potrebno je odrediti njegove dvije komponente Δx i Δy, za koje vrijedi

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r} &= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \\
\Delta x &= x_2 - x_1 = 35 \text{ m} - 30 \text{ m} = +5 \text{ m} \\
\Delta y &= y_2 - y_1 = 18 \text{ m} - 40 \text{ m} = -22 \text{ m}.
\end{aligned}$$



Ilustracija 3.27: Gibanje nogometaša u dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu.

Dakle, nogometaš je napravio pomak duž x-osi $+5$ m, a duž y-osi -22 m. Strelica na ilustraciji je geometrijski prikaz pomaka, koji ima početak u početnom položaju, a vrh u krajnjem položaju. Iznos pomaka možemo odrediti koristeći Pitagorin poučak

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5\ \mathrm{m})^2 + (-22\ \mathrm{m})^2} = 22.6\ \mathrm{m}. \tag{3.15}$$

Nije se teško uvjeriti kako je iznos pomaka uvijek manji od prevaljenog puta, a isto tako kako tijelo koje napravi neki pomak i opet se vrati u istu točku ima ukupni pomak jednak nuli, dok mu je put različit od nule, npr. kod svih utrka koje imaju start i cilj na istom mjestu.

Primjeri

1. Atletičar trči pravocrtno do položaja koji je udaljen 100 m od početnog položaja i opet se vrati u početni položaj. Koliki pomak, a koliki put je napravio atletičar za to vrijeme?

   Ukupni pomak je nula jer su mu početni i konačni položaj jednaki:

   $$\Delta\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = 0.$$

   Prevaljeni put je duljina segmenta opisane putanje koja se sastoji od dva dijela:

   $$l = l_1 + l_2 = 100\ \mathrm{m} + 100\ \mathrm{m} = 200\ \mathrm{m}.$$

2. Biciklist napravi dva puna kruga po kružnoj stazi radijusa 50 m. Koliki pomak, a koliki put je napravio biciklist?

   Pomak bicikliste je nula jer su početni i krajnji položaj jednaki:

   $$\Delta\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = 0.$$

   Ukupni prevaljeni put je jednak dvostrukom opsegu kružnice:

   $$l = 2o = 2 \cdot 2r\pi = 2 \cdot 2(50\ \mathrm{m})3.14 = 628\ \mathrm{m}.$$

3. Neka osoba na površini Zemlje napravi sljedeće gibanje: i) 100 m prema jugu, ii) zatim 100 m prema istoku, te iii) 100 m prema sjeveru. Koliki je pomak napravila ta osoba?

   Zadatak je neprecizan jer nije poznato mjesto odakle je osoba krenula. Ako je krenula s uobičajenih mjesta na površini Zemlje, ukupni pomak će biti 100 m prema istoku. No, ako je krenula iz položaja koji predstavlja Sjeverni pol Zemlje, tada je ukupni pomak jednak nuli. Naime, polaskom sa Sjevernog pola, na ovaj način, ta će se osoba vratiti u isti položaj.

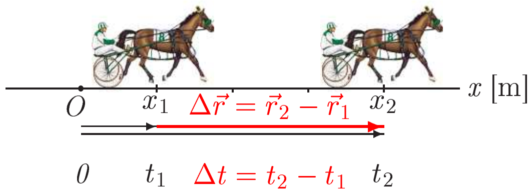
3.1.10 Srednja brzina

Gibanje nekog tijela u potpunosti je poznato ako su poznati njegovi položaji u svim trenucima. Iz takvih se podataka mogu odrediti pomak tijela kao i prevaljeni put u nekom odabranom vremenskom intervalu. Iz iskustva znamo kako će za jednake duljine vremenskih intervala, ponekad, tijela praviti različite pomake i različite puteve. Omjer pomaka i odgovarajućeg vremenskog intervala (kao i puta i vremenskog intervala) su fizikalne veličine koje ćemo ovdje definirati, a opisuju to novo svojstvo tijela.

Na ilustraciji 3.28 prikazan je jednopreg koji se giba duž osi x. Neka mu je položaj $\vec{r}_1$ bio u nekom trenutku t_1, a položaj $\vec{r}_2$ neka se dogodio u trenutku t_2. U vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$, njegov pomak je $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Srednju brzinu $\langle\vec{v}\rangle$ definiramo kao omjer pomaka i vremenskog intervala za koji se dogodio taj pomak

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.16}$$

Srednja brzina nekog tijela je vektorska veličina i ima orijentaciju jednaku orijentaciji pomaka tog tijela koji se dogodio u odgovarajućem vremenskom intervalu.



Ilustracija 3.28: Jednopreg koji se giba duž osi x od položaja s koordinatom x_1 do x_2. U trenutku t_1 bio je na mjestu koji je određen položajem $\vec{r}_1$, a u trenutku t_2 u položaju $\vec{r}_2$.

Na primjer, ako je jahač pomak od –40 m učinio u vremenskom intervalu od 8 s, tada je njegova srednja brzina u tom vremenskom intervalu

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-40\ \mathrm{m}}{8\ \mathrm{s}} = -5\ \mathrm{m/s}.$$

U ovom slučaju predznak minus označava kako se gibanje jahača odvija suprotno orijentaciji x-osi danog koordinatnog sustava.

Kako je brzina vektorska veličina, to se u dvodimenzionalnom (i trodimenzionalnom) prostoru trebaju odrediti dvije komponente brzine (odnosno tri). Kao primjer uzmimo već spomenutog nogometaša. Pretpostavimo kako je nogometaš pomak od početnog položaja (30 m, 40 m) do konačnog položaja (35 m, 18 m) ostvario za 6 sekundi. Srednja brzina nogometaša je definirana kao omjer pomaka i vremenskog intervala, što znači kako su i komponente brzine definirane kao omjeri odgovarajućih komponenti pomaka i danog vremenskog intervala

$$\langle v_x\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad \langle v_y\rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{3.17}$$

U konkretnom primjeru vrijednosti tih komponenti su

$$\langle v_x\rangle = \frac{5\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{s}} = 0.83\ \mathrm{m/s}, \qquad \langle v_y\rangle = \frac{-22\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{s}} = -3.67\ \mathrm{m/s}. \tag{3.18}$$

Orijentacija srednje brzine je jednaka orijentaciji pomaka nogometaša, a iznos se može dobiti koristeći Pitagorin poučak

$$\langle v\rangle = \sqrt{\langle v_x\rangle^2 + \langle v_y\rangle^2} = \sqrt{(0.83\ \mathrm{m/s})^2 + (-3.67\ \mathrm{m})^2} = 3.76\ \mathrm{m}. \tag{3.19}$$

Iznos srednje vrijednosti možemo odrediti i iz omjera iznosa pomaka i danog vremenskog intervala

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{22.6\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{s}} = 3.76\ \mathrm{m}. \tag{3.20}$$

Termin srednja brzina, u hrvatskome jeziku, koristi se i za jednu drugu fizikalnu veličinu što ponekad može dovesti do zabune. Međutim, zbog ukorijenjenosti u svakodnevnom životu taj se termin i nadalje koristi. Naime, pod pojmom srednje brzine shvaćat ćemo i omjer prevaljenog puta Δl i odgovarajućeg vremenskog intervala Δt i označavati sa $\langle s \rangle$ (što dolazi od engleske riječi 'speed')

$$\langle s \rangle = \frac{\Delta l}{\Delta t}. \tag{3.21}$$

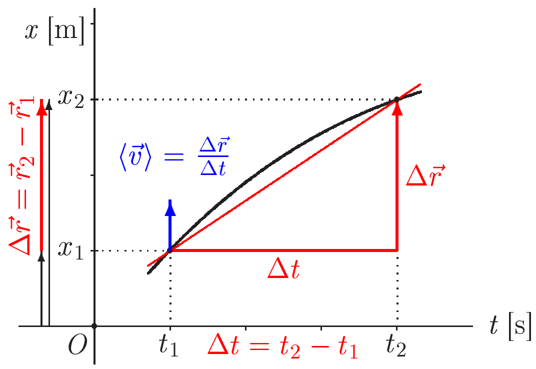
Srednja brzina $\langle s \rangle$ je skalarna veličina, dok je $\langle \vec{v} \rangle$ vektorska veličina (u literaturi na engleskom jeziku pojam srednja brzina $\langle v \rangle$ naziva se 'average velocity', a srednja brzina $\langle s \rangle$ 'average speed').

Ako je, u gornjem primjeru, nogometaš kroz danih 6 sekundi pretrčao ukupni put od 30 m, to znači kako mu je srednja brzina

$$\langle s \rangle = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{30\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{s}} = 5\ \mathrm{m/s}. \tag{3.22}$$

Iz definicija za srednju brzinu $\langle \vec{v} \rangle$ i srednu brzinu $\langle s \rangle$ vidljivo je kako su im mjerne jedinice jednake jedinicama za duljinu podijeljeno s jedinicama za vrijeme. U SI-sustavu to je metar po sekundi, 1 m/s, što se ponekad piše kao 1 ms^{-1}. Druge mjerne jedinice koje se koriste su npr. kilometar po satu (km/h), milja po satu (mi/h) ili bilo koji drugi omjeri mjernih jedinica duljine i vremena.

Položaj materijalne točke u ovisnosti o vremenu često se prikazuje dvodimenzionalnim grafom, tzv. x-t grafom (ilustracija 3.29). Tim je grafom



Ilustracija 3.29: Graf položaja materijalne točke u ovisnosti o vremenu. Točke na grafu predstavljaju položaje u odgovarajućim trenucima. Graf se odnosi na jednodimenzionalno gibanje.

moguće u potpunosti opisati gibanje neke materijalne točke. Točka na grafu predstavlja položaj u odgovarajućem trenutku. Na primjer položaj $\vec{r}_2$ s koordinatom x_2 u trenutku t_2. Srednja brzina $\langle \vec{v} \rangle$ u nekom vremenskom intervalu na jednostavan se način određuje iz takvog grafa kao omjer pomaka $\Delta\vec{r}$ i pripadajućeg vremenskog intervala Δt. Vidljivo je kako srednja brzina gibanja tijela u jednoj dimenziji geometrijski predstavlja nagib pravca koji prolazi kroz točke položaja na tom grafu, tj. tangens kuta između odgovarajućeg pravca i apscise.

Srednja brzina je vrlo važna veličina u opisivanju događaja u sportskim aktivnostima. U nekim je aktivnostima mjera uspjeha. Kod svih utrka (plivanja, trčanja, biciklizma i drugih) kod kojih sportaši prevaljuju jednaku udaljenost, pobjednik je onaj koji ostvari najmanje vrijeme, što znači da je postigao najveću srednju brzinu tijekom utrke. Kod drugih sportova, sportaš koji ostvaruje veću brzinu u nekom vremenskom intervalu ima veću šansu za ostvarenje uspjeha.

Primjeri

1. Ako je srednja brzina $\langle \vec{v} \rangle$ nogometaša za vrijeme nekog odabranog intervala tijekom utakmice jednaka nuli, što možete reći o njegovom pomaku koji je napravio u tom intervalu?

   Kako su srednja brzina i pomak povezani izrazom

   $$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

   slijedi da, ako je srednja brzina jednaka nuli, tada i pomak u danom vremenskom intervalu mora biti jednak nuli.

2. Kolika je srednja brzina teniske loptice za vrijeme u kojem udari u zid i vrati se na početno mjesto?

   Pomak loptice je nula, pa je i srednja brzina za taj interval jednaka nuli.

3. Atletičarka trči po pravcu do točke koja je udaljena 100 metara od starta i natrag. Nakon vremenskog intervala od 12 sekundi stigne do maksimalne udaljenosti, te za sljedećih 12.5 sekundi stigne u početni položaj. Kolika joj je srednja brzina $\langle \vec{v}_1 \rangle$ u prvom dijelu trčanja, a koliko u povratku? Kolika je srednja brzina $\langle \vec{v}_1 \rangle$ ukupnog gibanja?

Kolike su vrijednosti srednjih iznosa brzina $\langle s \rangle$ (speed)?

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_1 \rangle &= \frac{+100\ \mathrm{m}}{12\ \mathrm{s}} = +8.33\ \mathrm{m/s} \\
\langle \vec{v}_2 \rangle &= \frac{-100\ \mathrm{m}}{12.5\ \mathrm{s}} = -8.0\ \mathrm{m/s} \\
\langle \vec{v}_{uk} \rangle &= \frac{0\ \mathrm{m}}{24.5\ \mathrm{s}} = 0\ \mathrm{m/s} \\
\langle s_1 \rangle &= \frac{100\ \mathrm{m}}{12\ \mathrm{s}} = 8.33\ \mathrm{m/s} \\
\langle s_2 \rangle &= \frac{100\ \mathrm{m}}{12.5\ \mathrm{s}} = 8.0\ \mathrm{m/s} \\
\langle s_{uk} \rangle &= \frac{200\ \mathrm{m}}{24.5\ \mathrm{s}} = 8.16\ \mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

4. Nogometaš u jednom trenutku ima brzinu od 8 m/s prema protivničkim vratima. Lopta u tom trenutku ima brzinu od 12 m/s u istoj orijentaciji. Kolika je brzina lopte u odnosu na danog nogometaša?

$$\vec{v} = +12\ \mathrm{m/s} - 8\ \mathrm{m/s} = +4\ \mathrm{m/s}.$$

5. Može li neko tijelo imati stalnu vrijednost iznosa brzine, a da mu se mijenja brzina kao vektor?

   Može. To se događa kad tijelo jednoliko kruži. Tada mu iznos brzine ostaje stalan, dok se orijentacija brzine neprekidno mijenja.

3.1.11 Trenutna brzina

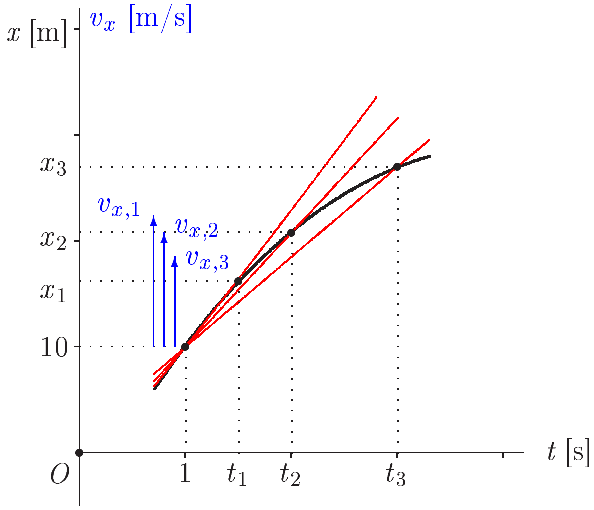
Prilično je jednostavno odrediti srednju brzinu $\langle \vec{v} \rangle$ nekog tijela, npr. nekog sprintera na 100 m. Iznos srednje brzine je kvocijent iznosa pomaka (tj. 100 m) i odgovarajućeg vremenskog intervala, a orijentacija je jednaka orijentaciji ukupnog pomaka. Slično tako, i srednju brzinu $\langle s \rangle$ (koju možemo nazvati srednjom vrijednosti iznosa brzine (kad god bi, inače, moglo doći do zabune) možemo odrediti iz ukupno prevaljenog puta i proteklog vremena. Na primjer, ako je danom sprinteru trebalo točno 10 sekundi na 100 m, tada je iznos njegove srednje brzine (100 m)/(10 s) = 10 m/s. Isto toliku vrijednost ima i srednja vrijednost iznosa brzine, tj. vrijedi $\langle v \rangle = \langle s \rangle$. Općenito, kod svih jednodimenzionalnih gibanja sa stalnom orijentacijom, tj. kod onih gibanja kad tijelo ne mijenja svoju orijentaciju, iznos srednje brzine je uvijek jednak srednjoj vrijednosti iznosa brzine.

Iako je srednja brzina važna veličina u sportskim aktivnostima, ona nam ne daje informaciju o tome kakva je bila utrka kroz to vrijeme. Ne govori nam kakva je bila srednja brzina u nekom izdvojenom dijelu utrke. Ne znamo kad je sportaš usporio, a u kojem dijelu utrke je ubrzao. Ako želimo imati takve podatke trebamo mjeriti srednje brzine za kraće vremenske intervale. U tom slučaju definiramo trenutnu brzinu (ili, jednostavno, brzinu) kao srednju brzinu $\langle\vec{v}\rangle$ za izuzetno kratki vremenski interval

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{3.23}$$

Simbol $\lim_{\Delta t \to 0}$ (čitajte: "limes kada delta t teži u nulu") znači kako se veličina koja slijedi ($\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$) određuje za vrlo kratki vremenski interval Δt, tj. onaj interval koji se približava nuli, ali nikad ne postiže vrijednost nula. Takav omjer se naziva derivacijom pomaka po vremenu i piše kao $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Za bolje razumijevanje pojma trenutne brzine razmotrimo gibanje nekog trkača kako je prikazano na x-t grafu (ilustracija 3.30), gdje je prikazan njegov



Ilustracija 3.30: Položaji materijalne točke u različitim trenucima. Srednja brzina u nekom intervalu je predstavljena nagibom pravca koji prolazi točkama položaja na krajevima intervala. Trenutna brzina predstavlja nagib tangente u danoj točki položaja.

položaj u različitim trenucima. U tom slučaju moguće je odrediti srednju brzinu u različitim vremenskim intervalima. Strelice predstavljaju srednje brzine tijela u različitim vremenskim intervalima. Iz ilustracije je vidljivo kako srednja brzina ima različite vrijednosti u različitim vremenskim intervalima. Trenutna brzina bi se dobila iz omjera pomaka i vremenskog intervala kad se uzme izuzetno kratki vremenski interval. Brzina je vektorska veličina, a iznos brzine je skalarna veličina. Ponekad se iznos brzine također naziva brzina, no važno je njihovo razlikovanje. Jedna predstavlja vektorsku veličinu, a druga samo njen iznos, dakle skalarnu veličinu.

Iz ilustracije se vidi kako brzina u nekom trenutku geometrijski predstavlja nagib tangente na x-t graf, tj. tangens [8] kuta omeđenog tangentom i pravcem koji je paralelan vremenskoj osi t.

U nekim je sportovima odlučujuća samo jedna od komponenti brzine. Na primjer, kod ragbija je odlučujuća komponenta brzine duž terena. Slično tome, za ostvarenje boljih rezultata kod skijaškog spusta odlučujuća je komponenta brzine niz padinu.

Već smo istakli važnost srednje brzine kod svih utrka. Međutim, brzina je važna veličina i kod svih igara s loptama, u nogometu, košarci, rukometu, tenisu, odbojci i mnogim drugim sportovima. Što je veći iznos brzine lopte, na primjer kod servisa u tenisu, to je protivniku manje vremena na raspolaganju za ispravnu reakciju. Slično je tako i kod izvođenja jedanaesteraca gdje golmanu ne ostaje dovoljno vremena za ispravno reagiranje ako je lopta ispucana velikim iznosom brzine. Brzina je važna i kod skakačkih sportova, kao što su skok udalj, skok s motkom, troskok, skijaški skokovi i mnogih drugih. Ukratko, vrlo malo je sportova gdje brzina nema važnu ulogu.

Primjeri

1. Može li iznos trenutne brzine u bilo kojem trenutku unutar danog vremenskog intervala biti veći od iznosa srednje brzine tog intervala? Može li biti manji?

   Trenutna brzina i srednja brzina u nekom intervalu su jednake samo kod gibanja stalne brzine. U svim ostalim slučajevima trenutna brzina u pojedinim trenucima ima različitu vrijednost od srednje brzine. U takvim slučajevima postoje trenuci za koje je iznos trenutne brzine veći (odnosno manji) od iznosa srednje brzine. Ako postoji trenutak

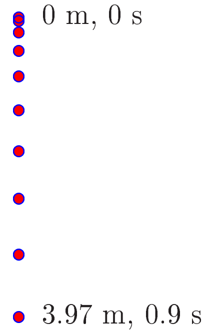
[8] Trigonometrijske funkcije sinus (sin), kosinus (cos) i tangens (tan) nekog kuta θ pravokutnog trokuta definiraju se kao omjeri duljina stranica tog pravokutnog trokuta na sljedeći način:

$$\sin(\theta) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\theta) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\theta) = \frac{a}{b}.$$

gdje su a i b nasuprotna i priležeća kateta kutu θ, a c hipotenuza pravokutnog trokuta.

u kojima je iznos trenutne brzine veći od iznosa srednje brzine, onda postoji trenutak u kojem je iznos trenutne brzine manji od iznosa dane srednje brzine cijelog intervala.

2. Na ilustraciji su prikazani položaji loptice tijekom padanja. Položaji



loptice nizali su se za jednake vremenske intervale od 0.1 sekundi. Ako je udaljenost položaja središta loptice u početnom i krajnjem trenutku (0.9 sekundi) jednak 3.97 metara, odredite srednje brzine za različite vremenske intervale.

Položaji loptice mogu se odrediti tako da se izmjeri udaljenost između položaja loptice u početku i na kraju. Uz precizna mjerenja ti položaji bi imali sljedeće vrijednosti: 0 m, 0.05 m, 0.20 m, 0.44 m, 0.78 m, 1.23 m, 1.77 m, 2.40 m, 3.14 m, 3.97 m. Primjer izračuna srednjih brzina u nekim intervalima

$$\begin{aligned}
v_{0-1} &= \frac{0.05\ \text{m}}{0.1\ \text{s}} = +0.50\ \text{m/s} \\
v_{0-9} &= \frac{3.97\ \text{m}}{0.9\ \text{s}} = +4.41\ \text{m/s} \\
v_{5-6} &= \frac{1.77\ \text{m} - 1.23\ \text{m}}{0.1\ \text{s}} = +5.40\ \text{m/s} \\
v_{5-9} &= \frac{3.97\ \text{m} - 1.23\ \text{m}}{0.4\ \text{s}} = +6.85\ \text{m/s} \\
v_{8-9} &= \frac{3.97\ \text{m} - 3.14\ \text{m}}{0.1\ \text{s}} = +8.30\ \text{m/s}.
\end{aligned}$$

3. Na Olimpijskim igrama u Seulu, Ben Johnson iz Kanade pobijedio je na 100-metarskoj utrci sa svjetskim rekordom od 9.79 s. Zlatna mu je medalja naknadno oduzeta, a postignuti svjetski rekord odbačen, nakon što se otkrilo kako je konzumirao nedozvoljena sredstva. Tada je za pobjednika utrke izabran Carl Lewis, a njegov je rezultat od 9.92 s

postao svjetskim rekordom. U tablici su prikazana postignuta vremena za svakih 10 metara za oba atletičara, koji su dobiveni tehnikom snimanja brzim kamera. Za oba atletičara odredite srednje brzine za svaki

Položaj (m)	Proteklo vrijeme (s)	
	Ben Johnson	Carl Lewis
0	0	0
10	1.83	1.89
20	2.87	2.96
30	3.80	3.90
40	4.66	4.79
50	5.50	5.65
60	6.33	6.48
70	7.17	7.33
80	8.02	8.18
90	8.89	9.04
100	9.79	9.92

interval i usporedite tako dobivene srednje vrijednosti brzina. Nacrtajte grafove položaja i grafove srednjih brzina u ovisnosti o vremenu. Odredite i srednje brzine obaju atletičara koje su ostvarili tijekom cijele utrke.

Za svaki interval, srednje brzine određujemo iz omjera pomaka i odgovarajućeg vremenskog intervala. Na primjer, srednja brzina Ben Johnsona tijekom pomaka od 20 m do 30 m je

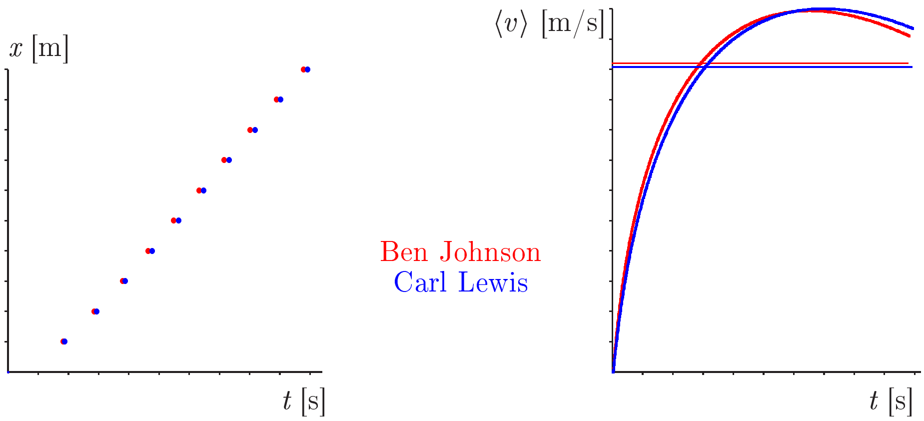
$$\langle v_{20-30,J} \rangle = \frac{30 \text{ m} - 20 \text{ m}}{3.80 \text{ s} - 2.87 \text{ s}} = 10.75 \text{ m/s}.$$

Nakon izračuna srednjih brzina za oba atletičara, u svim intervalima, dobijemo vrijednosti prikazane u tablici iz kojih možemo nacrtati graf srednjih brzina u ovisnosti o vremenu. Srednje brzine tijekom cijele utrke za oba atletičara dobijemo iz poznavanja ukupnog vremena

$$\langle v_J \rangle = \frac{100 \text{ m}}{9.79 \text{ s}} = 10.21 \text{ m/s}, \qquad \langle v_L \rangle = \frac{100 \text{ m}}{9.92 \text{ s}} = 10.08 \text{ m/s}.$$

Iz grafa srednje brzine uočavamo kako je Ben Johnson imao veći iznos brzine u prvoj polovici, a Carl Lewis u drugoj. Oba atletičara su postigla jednake maksimalne brzine (12.05 m/s) po sredini utrke, nakon čega su im se iznosi brzina počeli smanjivati, nešto izražajnije kod Bena

Pomak (m)	Srednja brzina (m/s)	
	Ben Johnson	Carl Lewis
0-10	5.46	5.29
10-20	9.62	9.35
20-30	10.75	10.64
30-40	11.63	11.24
40-50	11.90	11.63
50-60	12.05	12.05
60-70	11.90	11.76
70-80	11.76	11.76
80-90	11.49	11.63
90-100	11.11	11.36



Johnsona. Imamo pravo zaključiti kako bi Carl Lewis postigao bolja vremena na utrkama na nešto dužim stazama.

Iz analize ove utrke vidjeli smo kako imamo bolji uvid u utrku ako poznajemo vrijednosti srednjih brzina za kraće vremenske intervale. Skraćujući vremenske intervale približavamo se pojmu trenutne brzine.

3.1.12 Akceleracija

Do sada smo upoznali nekoliko fizikalnih veličina kojima je moguće opisivati određena svojstva točkastog tijela dok je to tijelo u gibanju. To su njegov položaj, prevaljeni put, pomak, brzina i iznos brzine. Nadalje, kako su položaj, pomak i brzina vektorske veličine, to ih je moguće razložiti na komponente duž osiju koordinatnog sustava kojeg slobodno biramo, te tako gibanje odvojeno promatrati za svaku komponentu. Možemo se upitati postoje li još neke fizikalne veličine kojima možemo opisivati neka nova svojstva tijela u gibanju. Na primjer, ako bacimo loptu vertikalno uvis, uočit ćemo kako se lopta usporava na putu prema najvišoj točki, a ubrzava dok je u povratnom gibanju prema dolje. Pojave ubrzavanja i usporavanja koje uočavamo kod mnogih tijela, možemo opisati fizikalnom veličinom koju nazivamo **akceleracijom**. Kad god se neko tijelo počinje gibati, kad se zaustavlja, **ubrzava** (povećava iznos brzine), **usporava** (smanjuje iznos brzine), ili mijenja orijentaciju gibanja reći ćemo kako akcelerira, tj. kako mu je akceleracija različita od nule.

Srednju akceleraciju u nekom vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ definiramo kao omjer promjene trenutne brzine $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ i tog vremenskog intervala

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.24}$$

Brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ su brzine u odgovarajućim trenucima t_1 i t_2. Na primjer, ako je neko tijelo u nekom trenutku imalo brzinu 8 m/s, a 10 sekundi poslije toga brzinu od 10 m/s, tada je promjena brzine u tom vremenskom intervalu

$$\Delta\vec{v} = 10\ \mathrm{m/s} - 8\ \mathrm{m/s} = +2\ \mathrm{m/s},$$

a srednja akceleracija

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{+2\ \mathrm{m/s}}{10\ \mathrm{s}} = +0.2\ \mathrm{ms}^{-2}.$$

Trenutna akceleracija $\vec{a}$ (ili jednostavno akceleracija) definira se kao granična vrijednost srednje akceleracije kad odgovarajući vremenski interval teži u nulu, tj.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3.25}$$

Iz definicija akceleracije vidljivo je kako je akceleracija vektorska veličina, a njena mjerna jedinica u SI-sustavu je metar po sekundi na kvadrat, ms^{-2}. Orijentacija se akceleracije, općenito, ne poklapa s orijentacijom gibanja tijela. Ponekad je orijentacija akceleracije suprotna brzini tijela ili okomita na brzinu, a može biti i pod bilo kojim drugim kutem u odnosu na nju. Akceleracija će imati orijentaciju jednaku orijentaciji brzine samo u slučajevima kad ne dolazi do promjene orijentacije brzine tijela i kad dolazi do povećanja iznosa brzine, a ako dolazi do smanjenja iznosa brzine tada je orijentacija akceleracije, u tom trenutku, suprotna gibanju tijela.

Akceleraciju je moguće rastaviti na komponente, kao i sve druge vektorske veličine. Promatrajmo, na primjer, loptu koju bacimo vertikalno uvis. Ona napravi gibanje do neke maksimalne visine, trenutno se zaustavi i vrati natrag. Horizontalna komponenta brzine lopte je cijelo vrijeme nepromijenjena i, štoviše, jednaka nuli. U tom je slučaju i horizontalna komponenta akceleracije jednaka nuli, jer nema promjene horizontalne komponente brzine. Budući da se događa samo promjena vertikalne komponente brzine, postojat će samo vertikalna komponenta akceleracije koja je različita od nule. Njena orijentacije je prema tlu jer se i promjena brzine odvija s tom orijentacijom.

Akceleraciju je moguće dobiti izravno i iz podataka o položaju tijela, kao drugu derivaciju položaja u vremenu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{3.26}$$

Akceleracija u sportskim aktivnostima je jedna od najvažnijih fizikalnih veličina. Sportaši gotovo u svim aktivnostima mijenjaju svoje brzine. Onaj sportaš koji je u stanju ostvariti veće iznose akceleracija, u pravilu, postiže bolje rezultate. Jedna od najvećih vrijednosti akceleracija koju sportaši mogu ostvariti svojim mišićima događa se u trenucima starta utrka na kratkim stazama. U trenucima odraza iznos akceleracije premašuje vrijednosti od 10 ms^{-2}.

Primjeri

1. Može li se tijelo koje ima stalnu akceleraciju različitu od nule ikad zaustaviti?

   Ako akceleracija i brzina tijela imaju suprotne orijentacije tada će se tijelo u nekom kasnijem trenutku zaustaviti i nakon toga gibati u suprotnoj orijentaciji.

2. Ako se tijelo giba u orijentaciji istoka, može li mu akceleracija biti u orijentaciji zapada?

   Može. Tijelo će se nakon nekog vremena početi gibati sa suprotnom orijentacijom ako akceleracija ne promijeni svoju vrijednost.

3. Može li orijentacija akceleracije uvijek biti okomita na orijentaciju brzine?

   Može. U takvim slučajevima tijelo bi se gibalo po kružnici.

4. Kolika je srednja akceleracija sportskog automobila koji u vremenskom intervalu od 4 sekunde promjeni brzinu sa +20 m/s na +45 m/s?

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{45 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} = +6.25 \text{ ms}^{-2}.$$

5. Kolika je srednja akceleracija motocikla koji u vremenskom intervalu od 5 sekundi promjeni brzinu sa +50 m/s na +20 m/s?

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{20 \text{ m/s} - 50 \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = -6.0 \text{ ms}^{-2}.$$

   Motociklu se smanjio iznos brzine te je, stoga, akceleracija suprotne orijentacije od orijentacije gibanja.

6. Kolika je srednja akceleracija teniske loptice kojoj se prilikom udara o zid, u vremenskom intervalo od 0.1 sekundi brzina promijeni s +40 m/s na –40 m/s?

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{-40 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s}}{0.1 \text{ s}} = -800 \text{ ms}^{-2}.$$

   Akceleracija ima suprotnu orijentaciju u odnosu na orijentaciju brzine gibanja loptice prije udara u zid.

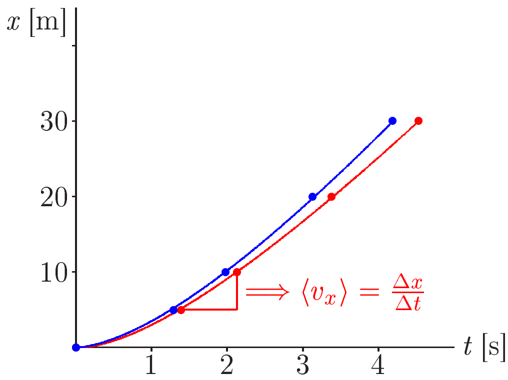
7. Odredite horizontalnu komponentu akceleracije atletičara tijekom prve faze starta ako mu je horizontalna komponenta brzine 3.2 m/s nakon 0.25 s.

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3.2 \text{ m/s}}{0.25 \text{ s}} = 12.8 \text{ ms}^{-2}.$$

8. Mjera startne akceleracije kod kratkih utrka je promjena brzine od trenutka starta do trenutka kad se atletičar nađe na udaljenosti 30 m od startne linije. Iz podataka u tablici odredite srednje brzine unutar

Položaj (m)	Vrijeme (s)	
	Atletičari	Atletičarke
5	1.29	1.39
10	1.98	2.13
20	3.13	3.38
30	4.19	4.53

   danih vremenskih intervala. Odredite i akceleracije pretpostavljajući

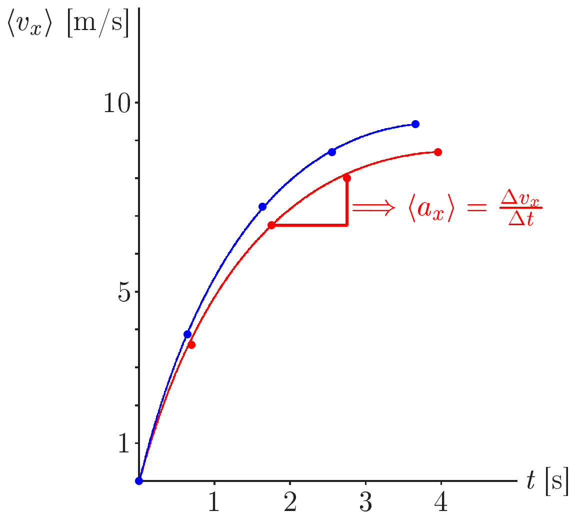


kako su njihove vrijednosti bile konstantne na pojedinim intervalima. Prikažite podatke i rezultate grafički.

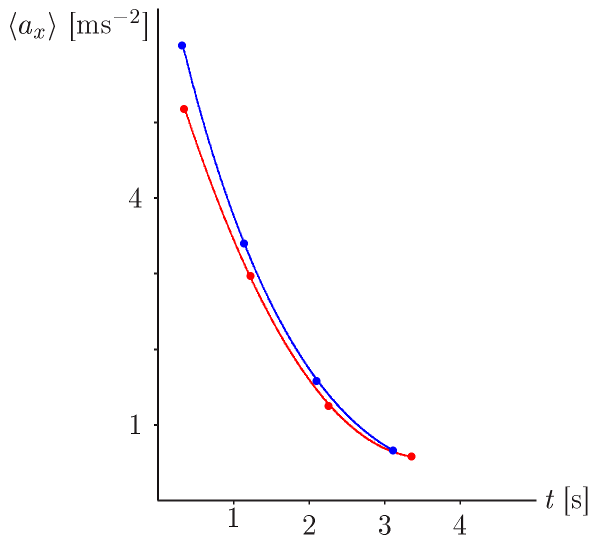
Srednje se brzine za pojedine intervale odrede iz danih podataka na sljedeći način

$$\langle v_{x,1} \rangle = \frac{(5-0)\ \text{m}}{1.29\ \text{s}} = 3.88\ \text{m/s}, \ \ \langle v_{x,2} \rangle = \frac{(10-5)\ \text{m}}{(1.98-1.29)\ \text{s}} = 7.25\ \text{m/s}, \ldots,$$

a srednja akceleracija iz dobivenih podataka srednje brzine. Iznos sred-



nje akceleracije vrlo brzo opada, te bi u trenutku od oko 5 sekundi



nakon starta počinjala poprimati čak i negativne vrijednosti (to se na danom grafu ne vidi). Početni su iznosi akceleracije izrazito visokih vrijednosti.

3.1.13 Gibanja sa stalnom akceleracijom

Gibanja mnogih tijela u prirodi su gibanja sa stalnom ili približno stalnom akceleracijom. Brzina takvih tijela mijenja se jednoliko. Primjer su tijela koja slobodno padaju u blizini površine Zemlje.

Ako je akceleracija nekog tijela stalna, tada su trenutna akceleracija $\vec{a}$ i prosječna akceleracija $\langle \vec{a} \rangle$ jednake, tj. vrijedi

$$\vec{a} = \langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - 0} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}, \tag{3.27}$$

gdje $\vec{v}_0$ označava brzinu u trenutku $t = 0$ s, a brzina $\vec{v}$ se odnosi na bilo koji kasniji trenutak t. Iz te jednadžbe lako se dobije izraz koji opisuje brzinu $\vec{v}$ u bilo kojem trenutku t

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{3.28}$$

Na sličan se način iz izraza za srednju brzinu 3.16, dobije

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - 0} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t}, \tag{3.29}$$

gdje $\vec{r}_0$ označava položaj u trenutku $t = 0$ s, a položaj $\vec{r}$ se odnosi na neki kasniji trenutak t. Iz gornjeg izraza dobije se izraz za položaj u trenutku t kao funkcija početnog položaja, srednje brzine i vremena

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \langle \vec{v} \rangle t. \tag{3.30}$$

U slučaju kad se brzina mijenja linearno s vremenom, kao u izrazu 3.28, tada je srednja brzina $\langle \vec{v} \rangle$ u nekom vremenskom intervalu jednaka srednjoj vrijednosti brzina na početku, $\vec{v}_0$, i kraju tog intervala, $\vec{v}$, tj.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}. \tag{3.31}$$

Kombinirajući izraze 3.28, 3.30 i 3.31 dobije se položaj $\vec{r}$ kao funkcija vremena

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \tag{3.32}$$

Matematički izrazi 3.28 i 3.32 za položaj $\vec{r}$ i brzinu $\vec{v}$ kod jednolikog gibanja su osnovne kinematičke jednadžbe kod jednolikog ubrzanog gibanja točkastih tijela.

Primjer gibanja sa stalnom akceleracijom je slobodni pad tijela u blizini površine Zemlje, gdje sva tijela, ako se zanemari otpor zraka, padaju jednakom akceleracijom iznosa od oko $g = 9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$. Iznos akceleracije slobodnog pada tijela u blizini površine Zemlje, u manjoj mjeri ovisi o geografskoj širini i nadmorskoj visini. Na većim geografskim širinama i manjim nadmorskim visinama iznos akceleracije slobodnog padanja tijela ima veću vrijednost. Na većim nadmorskim visinama i u blizini ekvatora njen iznos je manji. Iznosi akceleracije slobodnog pada tijela imaju vrijednosti od oko $9.79\ \mathrm{ms}^{-2}$ do $9.83\ \mathrm{ms}^{-2}$.

Primjeri

1. Sportaš izbaci loptu vertikalno uvis. Kolika je akceleracija lopte u trenutku kada lopta dosegne maksimalnu visinu?

   Ako zanemarimo sva međudjelovanja osim gravitacijskog djelovanja Zemlje tada sva tijela u svim trenucima imaju akceleraciju u iznosu od oko $9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$ s orijentacijom prema središtu Zemlje. Dakle, i lopta u trenutku kad je dosegla maksimalnu visinu ima toliku akceleraciju.

2. Odredite osobno vrijeme reakcije sljedećim eksperimentom. Neka kolega drži ravnalo za jedan njen kraj postavljenu okomito između prstiju vaše ruke. U jednom trenutku neka kolega ispusti redalicu koju nastojite

hvatati što je moguće brže. Mjereći udaljenost d koju prevali redalica možete odrediti vrijeme reakcije koristeći činjenicu da sva tijela padaju jednakom akceleracijom. Veza intervala proteklog vremena i udaljenosti je $t = \sqrt{2d/g}$, gdje je g oznaka za iznos akceleracije slobodnog pada.

Vrijeme reakcije kod većine sportaša je oko 0.2 s, a samo kod rijetkih sportaša ima manju vrijednost.

3. Ako ispustite lopticu stolnog tenisa s visine od 1 m ona će odskočiti na visinu od 0.6 m. Koliku je srednju akceleraciju imala loptica tijekom trajanja udara o pod, ako je bila u kontaktu s podom 12 ms?

   Kombinirajući kinematičke izraze, dobiju se sljedeći izrazi za lopticu neposredno prije udara u tlo i neposredno nakon udara

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{g}t = \vec{g}\sqrt{2h_1/g} = +\sqrt{2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 9.8 \text{ ms}^{-2}} = +4.43 \text{ m/s} \\
\vec{v}_2 &= -\vec{g}t = -\vec{g}\sqrt{2h_2/g} = -\sqrt{2 \cdot 0.6 \text{ m} \cdot 9.8 \text{ ms}^{-2}} = -3.43 \text{ m/s} \\
\vec{a} &= \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{-3.43 \text{ m/s} - 4.43 \text{ m/s}}{12 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -655 \text{ ms}^{-2}.
\end{aligned}$$

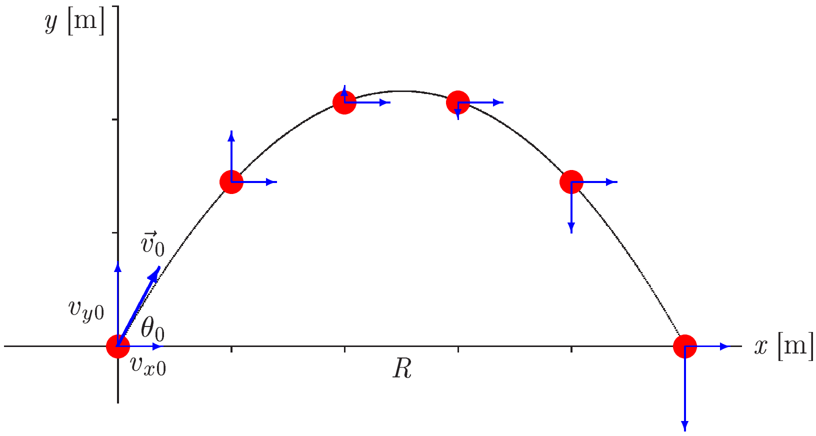
4. Košarkaš skoči uvis 60 cm. Koliko vremena košarkaš provede u gornoj polovici visine, a koliko u donjoj?

$$\begin{aligned}
t_1 &= 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{2 \cdot 0.3 \text{ m}}{9.8 \text{ ms}^{-2}}} = 0.49 \text{ s} \\
t_2 &= 2\sqrt{\frac{2h}{g}} - t_1 = 2\sqrt{\frac{2 \cdot 0.6 \text{ m}}{9.8 \text{ ms}^{-2}}} - t_1 = 0.21 \text{ s}.
\end{aligned}$$

   Košarkaš više vremena boravi u gornjoj polovici visine u odnosu na donju polovicu.

3.1.14 Gibanje projektila

Razmotrit ćemo gibanje nekog tijela pod utjecajem Zemljine sile teže koje ima početnu brzinu $\vec{v}_0$, zanemarujući utjecaj otpora zraka. Takvo se tijelo naziva projektil i ima stalnu akceleraciju $\vec{g}$ s orijentacijom prema središtu Zemlje. U nekim uvjetima uz manje zanemarivanje otpora zraka, takvo tijelo može biti nogometna lopta, teniska loptica, kugla, ali ne npr. avion ili ptica, zbog većeg utjecaja zraka.



Ilustracija 3.31: Putanja nekog projektila s početnom brzinom $\vec{v}_0$. Prikazane su horizontalne i vertikane komponente brzine u različitim trenucima.

Na ilustraciji 3.31 prikazana je putanja nekog tijela u blizini površine Zemlje. Tijelo u početku gibanja ima početnu brzinu $\vec{v}_0$ koju je moguće prikazati preko komponenti u odabranom koordinatnom sustavu

$$\vec{v}_0 = v_{x0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j}, \tag{3.33}$$

gdje se komponente v_{x0} i v_{y0} mogu odrediti iz poznavanje kuta θ_0 između vektora brzine $\vec{v}_0$ i osi x, tj.

$$v_{x0} = v_0\cos(\theta_0), \quad v_{y0} = v_0\sin(\theta_0) \tag{3.34}$$

Budući da je akceleracija tijela orijentirana vertikalno prema središtu Zemlje, horizontalna komponenta brzine ostaje nepromijenjena. Svaka komponenta gibanja je neovisna jedna o drugoj, što znači kako se problemi višedimenzionalnih gibanja mogu pojednostavniti promatrajući više jednodimenzionalnih gibanja. U danom primjeru, dvodimenzionalno gibanje razložili smo na dva jednodimenzionalna gibanja, horizontalno i vertikalno.

Horizontalna komponenta gibanja. S obzirom da je dano horizontalno gibanje primjer jednolikog gibanja po pravcu, horizontalna koordinata položaja tijela može se odrediti u svakom trenutku ako su poznate koordinata x_0 i komponenta početne brzina v_{x0}, tj. vrijedi

$$x = x_0 + v_{x0}t = x_0 + v_0\cos(\theta_0)t. \tag{3.35}$$

Horizontalna komponenta brzine je nepromjenjiva tijekom cijelog gibanja i iznosi $v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\theta_0)$ (uz uvijet zanemarivanja otpora zraka).

Vertikalna komponenta gibanja. Vertikalno je gibanje tijela jedan primjer tijela u slobodnom padu s akceleracijom $-g$ (ako odaberemo koordinatni sustav tako da mu je y koordinatna os orijentirana prema gore). Ako tu komponentu gibanja označimo s y, položaj tijela u bilo kojem trenutku možemo napisati na sljedeći način

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_0 \sin(\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.36}$$

Slično vrijedi i za vertikalnu komponentu brzine kao funkciju vremena t

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin(\theta_0) - gt. \tag{3.37}$$

Jednadžba gibanja. Eliminirajući vrijeme t u jednadžbama 3.35 i 3.36 dobije se jednadžba koja predstavlja putanju gibanja tijela

$$y = \tan(\theta_0)x - \frac{g}{2[v_0 \cos(\theta_0)]^2}x^2. \tag{3.38}$$

Ovakva se krivulja naziva parabola. U izvodu ove jednadžbe, zbog jednostavnosti, pretpostavili smo kako je tijelo u početnom trenutku bilo u ishodištu odabranog koordinatnog sustava, tj. $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Horizontalni domet. Horizontalni se domet R definira kao horizontalna udaljenost koju tijelo prevali u povratnom prolazu kroz položaj koji je na istoj visini kao i polazna točka (vidjeti ilustraciju 3.31). Iz jednadžbe 3.38 dobije se izraz za horizontalni domet R

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0). \tag{3.39}$$

Kako sinusna funkcija ima maksimalnu vrijednost za 90^0 (i iznosi 1) slijedi kako horizontalni domet R ima maksimalnu vrijednost za $2\theta_0 = 90^0$, odnosno za $\theta_0 = 45^0$. Dakle, tijelo će napraviti maksimalni domet ako je izbačeno pod kutem od 45^0 u odnosu na horizontalu. Naravno, ovo vrijedi samo uz zanemarivanje utjecaja zraka na gibanje tijela, koje ćemo kasnije posebno razmatrati [9].

[9] Vidjeti animaciju gibanja projektila na www.pmfst.hr/˜mile/biomehanika.

U sportu postoji mnogo primjera gibanja tijela koja se mogu predstaviti kao gibanje projektila. Prisjetimo se kako je projektil definiran kao točkasto tijelo koje ima neku početnu brzinu i akceleraciju slobodnog pada vertikalno prema dolje. Tijela za koja se uzima utjecaj zraka ne spadaju u skupinu projektila. Kod nekih sportova, u određenim situacijama, može se zanemariti utjecaj zraka. Na primjer, gibanje košarkaške lopte, gibanje kladiva, odbojkaške lopte su dobri primjeri gibanja projektila, uz manja zanemarivanja utjecaj zraka. Kad se udari loptu i kad dobije neku početnu brzinu, lopta se giba tako da joj horizontalna komponenta brzine ostaje nepromijenjena, a vertikalna se komponenta mijenja u skladu s akceleracijom slobodnog pada. Slično gibanjima različitih lopti u sportskim igrama i ljudsko tijelo se, u nekim sportovima, ponaša kao projektil, kao na primjer kod sportova kao što su skok udalj, skok uvis, trčanje, skokovi u vodu, košarka, nogomet, odbojka i drugi. U svim tim sportovima mnogo je situacija u kojima se gibanje sportaša može prikazati kao gibanje projektila. Kad god se sportaš nalazi odvojen od drugih tijela (ako zanemarimo utjecaj zraka) njegova se horizontalna komponenta brzine ne mijenja. Nakon što se skakač udalj odvoji od tla njegova se horizontalna komponenta brzine više neće mijenjati.

Još jednom napomenimo kako je u svim ovim primjerima zanemaren utjecaj zraka. Međutim, kod nekih sportova utjecaj zraka je izrazito važan i ne može se zanemariti. Na primjer, kod skijaških skokova, bacanja diska i koplja. Te ćemo primjere promatrati nešto kasnije.

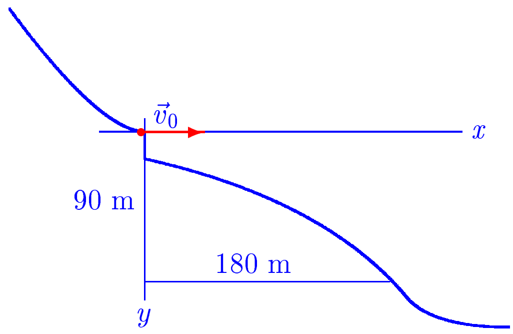
Primjeri

1. Tijelo je izbačeno pod kutem θ u odnosu na horizontalu nekom brzinom iznosa v_0. Ako zenemarimo otpor zraka, ponaša li se dano tijelo kao tijelo u slobodnom padu. Kolika mu je vertikalna komponenta akceleracije, a kolika horizontalna?

   Da. Tijelo se ponaša kao tijelo u slobodnom padu. Vertikalna mu je komponenta akceleracije 9.8 ms^{-2}, a horizontalna nula.

2. Godine 1989. ostvaren je skijaški let od 180 m. Pretpostavljajući kako je skijaš padao 90 m prije nego je dodirnuo tlo, koliki bi mu iznos brzine odskoka trebao biti ako bi se zanemario otpor zraka?

   Biramo koordinatni sustav tako da mu je y-os okrenuta prema dolje.

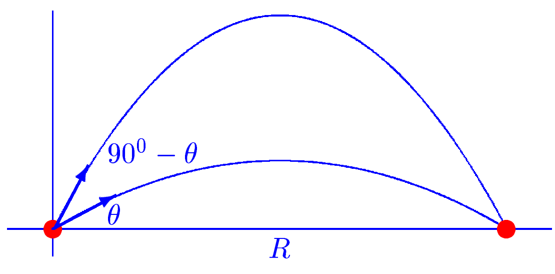


$$
\begin{aligned}
y &= \tan(\theta_0)x + \frac{g}{2[v_0\cos(\theta_0)]^2}x^2\\
90\ \mathrm{m} &= \tan(0^0)(180\ \mathrm{m}) + \frac{9.8\ \mathrm{ms}^{-2}}{2[v_0\cos(0^0)]^2}(180\ \mathrm{m})^2\\
90\ \mathrm{m} &= \frac{9.8\ \mathrm{ms}^{-2}}{2(v_0)^2}(180\ \mathrm{m})^2\\
v_0 &= \sqrt{\frac{(9.8\ \mathrm{ms}^{-2})(180\ \mathrm{m})^2}{2(90\ \mathrm{m})}} = 42\ \mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

Dobiveni je iznos brzine odskoka puno veće vrijednosti od vrijednosti koje se ostvaruju kod skijaških letova, što znači kako je utjecaj zraka u ovom sportu od velike važnosti. Iz navedenog se razloga skijaški letovi razlikuju od skijaških skokova.

3. Izbacite dvije loptice jednakim iznosom brzine, jednu pod kutem $\theta < 45^0$ u odnosu na horizontalu, a drugu pod kutem $90^0 - \theta$. Zanemarujući otpor zraka, obje loptice će pasti na istu udaljenost R od položaja odakle su izbačene. Hoće li obje loptice u zraku boraviti jednake vremenske intervale?

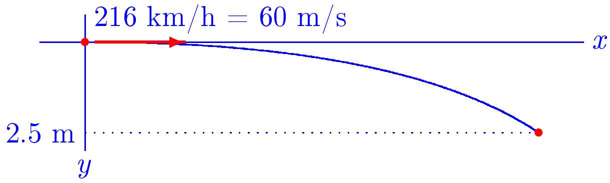
   Neće.



Lopta koja je izbačena pod kutem $\theta < 45^0$ ima manju vertikalnu komponentu brzine od druge lopte. Ona stoga dosegne manju visinu i kraće boravi u zraku.

4. Tenisač udari loptu reketom tako da joj dade horizontalno početnu brzinu u isnosu od 216 km/h. Ako je u trenutku udara lopta bila na visini od 2.5 m od tla, na koju će udaljenost od mjesta izbačaja udariti o tlo?

   Biramo koordinatni sustav čija je y-os orijentirana prema središtu Zemlje. U tom se slučaju mijenja g u $-g$ u jednadžbi koja označava putanju lopte. Naravno, zadatak je moguće rješavati i u drugim sustavima slobodno odabranima.

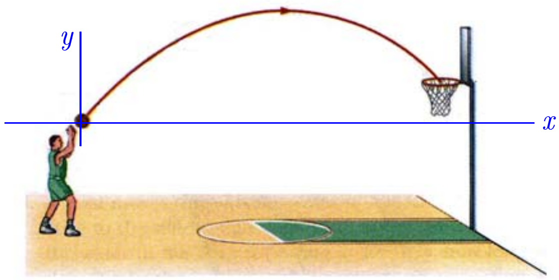


$$\begin{aligned} y &= \tan(\theta_0)x + \frac{g}{2[v_0\cos(\theta_0)]^2}x^2 \\ 2.5\ \mathrm{m} &= \tan(0^0)x + \frac{9.8\ \mathrm{ms}^{-2}}{2[(60\ \mathrm{m/s})\cos(0^0)]^2}x^2 \\ 2.5\ \mathrm{m} &= \frac{9.8\ \mathrm{ms}^{-2}}{2(60\ \mathrm{m/s})^2}x^2 \\ x &= \sqrt{\frac{2(2.5\ \mathrm{m})(60\ \mathrm{m/s})^2}{9.8\ \mathrm{ms}^{-2}}} = 42.9\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

5. Mike Powell je u Tokiju 1991. godine skočio udalj 8.95 m. Pretpostavite kako je iznos brzine odskoka bio 9.5 m/s. Ako zanemarite otpor zraka, pod kojim je kutem odskočio Mike? Koliki je maksimalno ostvarivi skok uz isti iznos brzine odskoka?

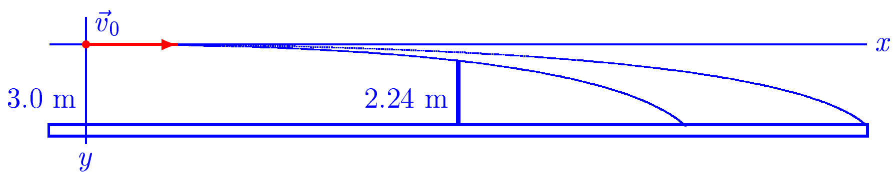
$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0) \\ \sin(2\theta_0) &= \frac{Rg}{v_0^2} \\ \theta_0 &= \frac{1}{2}\arcsin(\frac{Rg}{v_0^2}) = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{(8.95\ \mathrm{m})(9.8\ \mathrm{ms}^{-2})}{(9.5\ \mathrm{m/s})^2}) = 38.2^0 \\ R_m &= \frac{v_0^2}{g}\sin(2\cdot 45^0) = \frac{(9.5\ \mathrm{m/s})^2}{9.8\ \mathrm{ms}^{-2}}\sin(90^0) = 9.2\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

6. Dva metra visoki košarkaš želi izravno s deset metara udaljenosti pogoditi koš koji se nalazi na visini od 3.05 m. Ako izbaci loptu pod kutem od 45^0, koliki mora biti iznos brzine izbacivanja lopte [10]?



$$
\begin{aligned}
y &= \tan(\theta_0)x - \frac{g}{2[v_0\cos(\theta_0)]^2}x^2\\
\tan(\theta_0)x - y &= \frac{g}{2[v_0\cos(\theta_0)]^2}x^2\\
\frac{2v_0^2\cos^2(\theta_0)}{gx^2} &= \frac{1}{\tan(\theta_0)x - y}\\
v_0 &= \sqrt{\frac{gx^2}{(\tan(\theta_0)x-y)(2\cos^2(\theta_0))}}\\
&= \sqrt{\frac{(9.8\ \mathrm{ms}^{-2})(10\ \mathrm{m})^2}{[10\ \mathrm{m} - (3.05\ \mathrm{m} - 2.0\ \mathrm{m})][2\cos^2(45^0)]}} = 10.5\ \mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

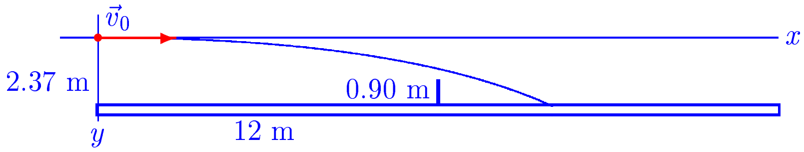
7. Vrh mrežice odbojke za žene je na visini od 2.24 m, a duljina terena je ukupno 18 m. Igračica koja servira odskoči i udari loptu na visini od 3 m i udaljenosti 8 m od mrežice. Ako je lopta dobila horizontalnu brzinu, koliki je maksimalni i minimalni iznos te brzine ako se želi ostvariti ispravan udarac?



[10]Vidjeti animaciju na www.pmfst.hr/~mile/biomehanika.

$$\begin{aligned} y &= \tan(\theta_0)x + \frac{g}{2[v_0\cos(\theta_0)]^2}x^2 = \frac{gx^2}{2v_0^2} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} \\ v_{0,max} &= \sqrt{\frac{(9.8 \text{ ms}^{-2})(17 \text{ m})^2}{2(3 \text{ m})}} = 21.7 \text{ m/s} \\ v_{0,min} &= \sqrt{\frac{(9.8 \text{ ms}^{-2})(8 \text{ m})^2}{2(3 \text{ m} - 2.24 \text{ m})}} = 20.3 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

8. Tijekom meča tenisač je servirajući udario lopticu reketom na visini od 2.37 m tako da joj je dao brzinu od 23.6 m/s u horizontalnom smjeru. Mrežica je udaljena 12 m i visoka je 90 cm. Je li loptica udarila mrežicu te, ako nije, na kojoj je visini iznad mrežice prošla?



$$\begin{aligned} y &= \tan(\theta_0)x + \frac{g}{2[v_0\cos(\theta_0)]^2}x^2 = \frac{gx^2}{2v_0^2} \\ &= \frac{(9.8 \text{ ms}^{-2})(12 \text{ m})^2}{2(23.6 \text{ m/s})^2} = 1.27 \text{ m} \\ d &= 2.37 \text{ m} - 1.27 \text{ m} - 0.90 \text{ m} = 0.20 \text{ m.} \end{aligned}$$

Loptica će proletjeti 0.20 m iznad vrha mrežice.

9. Djevojčica može izbaciti lopticu na maksimalnu udaljenost od 10 m. Na koju bi maksimalnu visinu djevojčica mogla izbaciti istu lopticu? Pretpostavite kako njeni mišići mogu izbaciti lopticu jednakim iznosom brzine u oba slučaja. (Je li ta pretpostavka valjana?)

$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0) \\ h_{max} &= \frac{v_0^2}{2g} = \frac{R}{2} = 5 \text{ m.} \end{aligned}$$

10. Jedna od taktika u borbi grudanjem na snijegu je izbacivanje jedne grude pod velikim kutem u odnosu na horizontalu. Dok protivnik gleda

izbačenu grudu, izbaci se druga gruda pod manjim kutem kako bi stigla na cilj prije prve grude. Pretpostavite kako je iznos brzine izbacivanja obiju gruda 25 m/s. Neka je prva gruda izbačena pod kutem od 70^0. Odredite kut i vrijeme izbacivanja druge grude ako obje pogađaju isto mjesto u isto vrijeme.

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= 90^0 - \theta_1 = 90^0 - 70^0 = 20^0 \\
R &= \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{(25\ \mathrm{m/s})^2 \sin(2\cdot 70^0)}{(9.8\ \mathrm{ms}^{-2})} = 41.0\ \mathrm{m} \\
v_{1,x} &= v_0 \cos(70^0) = (25\ \mathrm{m/s})\cos(70^0) = 8.6\ \mathrm{m/s} \\
v_{2,x} &= v_0 \cos(20^0) = (25\ \mathrm{m/s})\cos(20^0) = 23.5\ \mathrm{m/s} \\
t_1 &= \frac{R}{v_{1,x}} = \frac{41.0\ \mathrm{m}}{8.6\ \mathrm{m/s}} = 4.77\ \mathrm{s} \\
t_2 &= \frac{R}{v_{1,x}} = \frac{41.0\ \mathrm{m}}{23.5\ \mathrm{m/s}} = 1.74\ \mathrm{s} \\
\Delta t &= t_1 - t_2 = 4.77\ \mathrm{s} - 1.74\ \mathrm{s} = 3.03\ \mathrm{s.}
\end{aligned}$$

11. Skakač uvis, u pokušaju preskakanja visine od 2.40 m, u trenutku odskoka (kada više nije u dodiru sa tlom) ima vertikalnu komponentu brzine od 5 m/s. Kolika mu je vertikalna akceleracija u tom trenutku?

    Vertikalna komponenta akceleracije je 9.8 m/s^2 s orijentacijom prema središtu Zemlje.

12. Skakačica udalj napušta odskočnu dasku brzinom koja ima vertikalnu komponentu od 4 m/s i horizontalnu od 9 m/s. Kolika joj je horizontalna komponenta neposredno prije doskoka? Koliku je horizontalnu komponentu pomaka sportašica napravila u vremenu od pola sekunde mjereno od trenutka odskoka? Kolika joj je vertikalna komponenta brzine pola sekunde nakon odskoka? (Zanemarite utjecaj otpora zraka.)

    Ako zanemarimo utjecaj otpora zraka, sportašica će tijekom leta imati jednaku vrijednost horizontalne komponente brzine u iznosu od $v_x = 9$ m/s s orijentacijom prema naprijed.
    Horizontalna komponenta pomaka je

    $$d_x = v_x t = (9\ \mathrm{m/s})(0.5\ \mathrm{s}) = 4.5\ \mathrm{m},$$

    a vertikalna se komponenta brzine, pola sekunde nakon odskoka, dobije iz sljedećeg izraza

    $$v_y = v_{y0} - gt = 4\ \mathrm{m/s} - (9.8\ \mathrm{ms}^{-2})(0.5\ \mathrm{s}) = -0.9\ \mathrm{m/s}$$

što daje iznos od 0.9 m/s s orijentacijom prema dolje.

3.1.15 Rotacijska gibanja

U biomehanici se mišićno-koštani sustav idealizira kao sustav sačinjen od više povezanih krutih tijela. Gibanje svakog krutog tijela može se razložiti na dvije osnovne vrste gibanja: translacijsko gibanje (ili translaciju) i rotacijsko gibanje (ili rotaciju) oko određene osi. Kod translacijskih gibanja sve se točke krutog tijela kreću po paralelnim putanjama pa su brzine i ubrzanja svih točaka toga tijela jednake. Odatle slijedi kako je za opisivanje translacije krutog tijela dovoljno opisati gibanje samo jedne točke toga tijela.

U ovom odjeljku definirat ćemo kinematičke veličine koje su potrebne za opisivanje rotacije jedne točke krutog tijela oko neke čvrste osi. Budući da se položaj određene točke krutog tijela pri rotaciji oko fiksne osi može opisati jednom koordinatom, npr. kutem u odnosu na neku referentnu os, uvest ćemo kinematičke veličine analogne veličinama kod gibanja po pravcu: kutni položaj, kutni pomak, kutna brzina i druge.

Kutni položaj. Kutnim položajem možemo označavati položaj neke linije u odnosu na drugu uzetu kao referentnu liniju. Kutni položaj $\vec{\theta}$ je vektorska veličina i često se mjeri u stupnjevima. Kut od 1^0 predstavlja 1/360 punog kuta, tj. puni kut iznosi 360^0. Međutim, osnovna mjerna jedinica za kut je radijan, 1 rad,

$$1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57.3^0. \tag{3.40}$$

Iznos kuta u radijanima dobije se kao omjer odgovarajuće duljine luka l duž kružnice i radijusa r te kružnice

$$\theta = \frac{l}{r}. \tag{3.41}$$

Kako je kut izmjeren u radijanima definiran kao omjer dviju duljina, tada je radijan bezdimenzionalan broj. Vidimo kako taj broj predstavlja duljinu danog luka mjereno duljinom radijusa kružnice. Dogovorno, pozitivne orijentacije imaju kutni položaji određeni suprotno od pokreta kazaljke na satu. Iznos kutnog položaja se ne postavlja na nulu u slučaju da promatrana točka napravi punu rotaciju. Na primjer, ako tijelo napravi dvije pune rotacije, iznos kutnog položaja je $\theta = 4\pi$ rad.

Kutni pomak. Kutni se pomak $\Delta\vec{\theta}$ definira kao razlika kutnih položaja u nekom konačnom i početnom trenutku

$$\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1. \tag{3.42}$$

Kutni pomak je veličina analogna linearnom pomaku. Kao i linearni pomak, tako je i kutni pomak vektorska veličina. To znači da kutni pomak ima svoj iznos i orijentaciju u prostoru. Iznos kutnog pomaka je kut kojega zatvaraju odabrane linije na rotirajućem tijelu u konačnom i početnom trenutku. Orijentacija kutnog pomaka određuje se takozvanim pravilom desne ruke: "ako prsti desne ruke leže u ravnini rotacije pokazujući odvijanje rotacije, tada će palac desne ruke pokazivati orijentaciju vektora kutnog pomaka".

Ako tijelo vrši rotacije samo oko neke čvrste osi, tada kutne vektorske veličine leže na jednom pravcu, tj. na toj osi rotacije. Stoga su, u tim slučajevima, moguće samo dvije orijentacije vektorskih veličina, koje označavamo '+' i '−' predznacima. Dogovorno se uzima pozitivna orijentacija ako tijelo ostvaruje orijentaciju suprotno gibanju kazaljke na satu (sat gledamo u prednju stranu).

Kod skokova u vodu, gimnastike, umjetničkog klizanja i drugih, ostvareni kutni pomak sportaša jedan je od odlučujućih čimbenika u postizanju boljeg uspjeha. Kod mnogih sportova nije potrebno precizno mjeriti kutne položaje i pomake, već samo broj punih okreta.

Kutna brzina. Ako neko kruto tijelo napravi kutni pomak $\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1$ u vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$, tada definiramo srednju kutnu brzinu $\langle\vec{\omega}\rangle$ u tom vremenskom intervalu kao omjer kutnog pomaka i vremenskog intervala

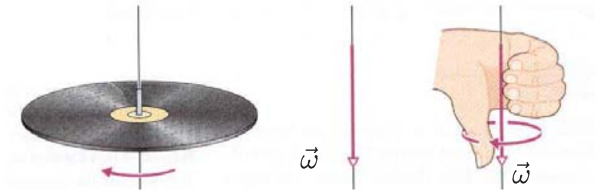
$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} = \frac{\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.43}$$

Trenutna se kutna brzina (ili jednostavno kutna brzina) $\vec{\omega}$ definira kao srednja kutna brzina određena u vrlo kratkom vremenskom intervalu Δt

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}. \tag{3.44}$$

Mjerna jedinica za kutnu brzinu je rad/s, a orijentacija vektora se određuje pravilom desne ruke kao i za kutni pomak, što je prikazano na ilustraciji 3.32.

Važnost kutne brzine posebno je vidljiva kod gimnastičkih sportova, skokova u vodu, umjetničkog klizanja i drugih. Kutne brzine trebaju imati precizno odabrane vrijednosti kako bi se ostvario određeni pokret. Kod



Ilustracija 3.32: Pravilo desne ruke kod određivanja orijentacije vektora kutne brzine. Prsti desne ruke pokazuju rotaciju tijela, a palac orijentaciju vektora kutne brzine $\vec{\omega}$.

bacanja kladiva potrebno je ostvariti velike iznose kutne brzine s ispravno odabranom orijentacijom kako bi se postigao dobar rezultat.

Kutna akceleracija. Ako kutna brzina rotacije nekog krutog tijela nije konstantna, tada kažemo da tijelo ima kutnu akceleraciju. Srednju kutnu akceleraciju u nekom vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ definiramo kao omjer promjene kutne brzine $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$ i toga vremenskoga intervala

$$\langle\vec{\alpha}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}, \tag{3.45}$$

gdje su $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ kutne brzine u odgovarajućim trenucima t_1 i t_2. Trenutna kutna akceleracija (ili jednostavno, kutna akceleracija) $\vec{\alpha}$ definira se kao granična vrijednost srednje kutne akceleracije kad odgovarajući vremenski interval teži u nulu, tj.

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{3.46}$$

Kutna akceleracija je vektorska fizikalna veličina, a njena mjerna jedinica je radijan po sekundi na kvadrat, rad s^{-2}. Orijentacija kutne akceleracije određuje se na sličan način kao za kutni pomak i kutnu brzinu. Tijelo ima kutnu akceleraciju različitu od nule kad god započinje rotaciju, zatim u trenutku zaustavljanja, kada povećava ili smanjuje iznos kutne brzine, te kada mijenja orijentaciju kutne brzine.

Primjeri

1. Liječnik pregledava koljeno ozlijeđenog atletičara. Pri punoj ekstenziji kut između potkoljenice i bedra je 178^0. Kod pune fleksije kut između bedra i potkoljenice je 82^0. Tijekom pregleda bedro je držano čvrsto, a samo je gibana potkoljenica. Koliki je iznos kutnog pomaka od pune

ekstenzije do pune fleksije? Izrazite kuteve u stupnjevima i radijanima.

$$\begin{aligned}\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 &= 178^0 - 82^0 = 96^0 \\ &= 96^0 \frac{\pi}{180^0} = 1.67 \text{ rad.}\end{aligned}$$

2. Gimnastičarka napravi skok s trostrukim okretom. Vrijeme koje je proteklo od trenutka odskoka do doskoka je 0.8 s. Koliki je iznos srednje kutne brzine gimnastičarke tijekom trajanja skoka?

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 2\pi \text{ rad}}{0.8 \text{ s}} = 23.6 \text{ rad/s.}$$

3. Bacač diska započinje svoju rotaciju kutnom brzinom od 5 rad/s. Točno pred trenutak izbacivanja diska njegova kutna brzina iznosi 25 rad/s. Ako je proteklo vrijeme od 1 s od trenutka početka njegove vrtnje do trenutka izbacivanja diska, kolika mu je srednja kutna akceleracija?

$$\langle\alpha\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{25 \text{ rad/s} - 5 \text{ rad/s}}{1 \text{ s}} = 20 \text{ rad s}^{-2}.$$

3.1.16 Rotacije sa stalnom kutnom akceleracijom

Kod translacijskih gibanja nekog tijela sa stalnom akceleracijom izveli smo izraze za brzinu i položaj kao funkcije vremena. Veličine koje određuju položaj i brzinu tijela u bilo kojem trenutku su stalna akceleracija, te početni položaj i početna brzina.

Kako smo kod rotacije definirali analogne fizikalne veličine veličinama kod translacijskih gibanja, to ćemo izraze koji određuju kutni položaj i kutnu brzinu u bilo kojem trenutku navesti bez matematičkih izvoda. U tablici 3.4 dane su usporedne fizikalne veličine i jednadžbe kod gibanja sa stalnom linearnom akceleracijom i stalnom kutnom akceleracijom.

3.1.17 Povezanost translacijskih i rotacijskih veličina

Ako neko kruto tijelo rotira oko fiksne osi, tada svaka točka toga tijela rotira po nekoj kružnici oko te osi. Sve njegove točke imaju jednaku vrijednost kutne brzine. Međutim, točke toga tijela koje su na većim udaljenostima od osi rotacije, opisuju kružnice većeg opsega, čime zaključujemo kako su im veće vrijednosti iznosa translacijskih brzina.

Uočimo povezanosti linearnih veličina pojedine točke nekog krutog tijela s rotacijskim veličinama toga tijela preko položaja $\vec{r}$ te točke u odnosu na os rotacije.

Translacijska gibanja	Rotacijska gibanja
položaj, $\vec{r}$	kutni položaj, $\vec{\theta}$
brzina, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	kutna brzina, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
akceleracija, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	kutna akceleracija, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$
$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$	$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$

Tablica 3.4: Usporedne veličine i jednadžbe kod translacijskih i rotacijskih gibanja.

Položaj, pomak i put. Ako neka točka krutog tijela, koja se nalazi na udaljenosti r od osi rotacije, napravi rotaciju prebrisujući kut θ, tada je iznos prevaljenog puta l, tj. vrijednost odgovarajućeg luka na kružnici, dan izrazom

$$l = \theta r. \tag{3.47}$$

Ako neko kruto tijelo napravi inifinitezimalno mali kutni pomak $d\vec{\theta}$, tada jedna točka tog tijela koja se nalazi na položaju $\vec{r}$ u odnosu na os rotacije učini pomak $d\vec{r}$ za koji vrijedi

$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}. \tag{3.48}$$

Spoznaja kako udaljenije točke rotirajućeg tijela prevaljuju veće puteve je vrlo korisna u sportovima kod kojih se koristi oprema kao što su reket i različite palice.

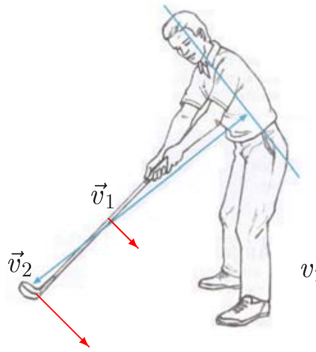
Brzina. Sportovi kao što su tenis, golf, badminton ili hokej na ledu su primjeri sportova kod kojih se dio opreme koristi kao produžetak ruke. Prednosti koje se dobivaju time su postizanje većih iznosa brzina loptica. Brzine loptica ovise o svojstvima materijala opreme kojom se udaraju loptice, ali isto tako i o duljini te opreme. Kod rotirajućih krutih tijela udaljenije točke od osi vrtnje imaju veće iznose tangencijalnih brzina od bližih točaka. Tangencijalna brzina $\vec{v}$ točke koja se nalazi na položaju $\vec{r}$ u odnosu na os rotacije danog krutog tijela kutne brzine $\vec{\omega}$ povezana je s kutnom brzinom na sljedeći način

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{3.49}$$

Iz navedenog zaključujemo kako je iznos tangencijalne brzine v dane točke krutog tijela koje rotira konstantnom kutnom brzinom iznosa ω također konstantan, i iznosi

$$v = \omega r. \tag{3.50}$$

Udaljenije točke krutog tijela imaju veće iznose tangencijalne brzine od onih koje su bliže osi vrtnje (ilustracija 3.33).



Ilustracija 3.33: Udaljenije točke palice imaju veće iznose tangencijalnih brzina od točaka bližih osi vrtnje.

Period kruženja, T, odnosno vrijeme potrebno da kruto tijelo napravi jednu punu rotaciju, može se izraziti preko tangencijalne brzine v i radijusa vrtnje neke točke toga tijela kao

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3.51}$$

Akceleracija. Akceleracija točke nekog krutog tijela koje rotira dolazi, s jedne strane, zbog promjene iznosa tangencijalne brzine v i s druge strane, zbog promjene orijentacije vektora te brzine. To znači kako i točke krutog tijela koje jednoliko rotira oko neke osi imaju akceleraciju različitu od nule. Iako se ne mijenja iznos tangencijalne brzine, mijenja se orijentacija vektora te brzine. Takvu akceleraciju $\vec{a}_{cp}$ materijalne točke koja kruži po kružnici radijusa r nazivamo centripetalna akceleracija, a njen iznos je

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \tag{3.52}$$

gdje su v i ω iznosi tangencijalne brzine, odnosno kutne brzine. Orijentacija centripetalne akceleracije $\vec{a}_{cp}$ postavljena je prema središtu rotacije. Vidimo kako je iznos centripetalne akceleracije veći za točke koje su udaljenije od osi rotacije krutog tijela. No, treba paziti, da točke koje imaju isti iznos tangencijalne brzine, a nalaze se na različitim udaljenostima od osi vrtnje, veći iznos centripetalne akceleracije ima ona točka koja se nalazi na manjoj udaljenosti. Na primjer, dva atletičara koja u zavoju svojih odvojenih trkaćih staza imaju jednake iznose brzina, onaj otletičar koji se nalazi na unutarnjoj stazi imat će veći iznos centripetalne akceleracije.

Ako kruto tijelo mijenja iznos kutne brzine, tada dolazi i do promjene iznosa tangencijalne brzine neke točke toga krutoga tijela. Tada kažemo da promatrana točka toga tijela ima i tangencijalnu akceleraciju $\vec{a}_t$ koja je povezana s kutnom akceleracijom $\vec{\alpha}$ sljedećim izrazom

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}, \tag{3.53}$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja odabrane točke rotirajućeg tijela. Ukupna akceleracija $\vec{a}$ odabrane točke rotirajućeg tijela je vektorski zbroj centripetalne i tangencijalne akceleracije

$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t. \tag{3.54}$$

Primjeri

1. Neka je tetiva mišića spojena za goljeničnu kost na udaljenosti od 3.75 cm od osi vrtnje koljena i neka se stopalo nalazi na udaljenosti od 37.5 cm od te osi. Koliki će luk prevaliti stopalo ako je točka na koju je spojena tetiva prevalila luk od 5 cm?

$$\begin{aligned} l_1 &= \theta r_1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{l_1}{r_1} \\ l_2 &= \theta r_2 = \frac{l_1}{r_1} r_2 = \frac{5 \text{ cm}}{3.75 \text{ cm}} 37.5 \text{ cm} = 50 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2. Bacač kladiva se vrti kutnom brzinom iznosa 1700^0/s. Udaljenost glave kladiva od osi vrtnje je 1.2 m. Odredite tangencijalnu brzinu i centripetalnu akceleraciju glave kladiva.

$$\begin{aligned} v &= \omega r = (1700^0 \frac{\pi}{180^0} \text{ rad/s})(1.2 \text{ m}) = 35.6 \text{ m/s} \\ a_{cp} &= \omega^2 r = (1700^0 \frac{\pi}{180^0} \text{ rad/s})^2 (1.2 \text{ m}) = 1055 \text{ ms}^{-2}. \end{aligned}$$

3.2 Kinetika

Kroz kinematiku smo izučavali gibanja tijela ne ulazeći u uzroke koji su uvjetovali takva gibanja. Vidjeli smo kako bismo, uz poznavanje položaja i brzine tijela u nekom početnom trenutku te njegove akceleracije, bili u stanju predvidjeti položaj i brzinu toga tijela u bilo kojem kasnijem trenutku.

Ovdje ćemo izučavati gibanja tijela tražeći uzroke koji dovode do određene promjene brzine, odnosno akceleracije tijela. Iz iskustva se vrlo brzo možemo uvjeriti kako promjene gibanja nekog tijela dolaze od međudjelovanja s drugim tijelima. Zakoni koji nam daju osnovu za ovakva izučavanja su tri Newtonova zakona gibanja. Iz tih se zakona izgrađuje klasična mehanika koja odlično opisuje makroskopske pojave onih sustava čije su brzine bitno manje od brzine svjetlosti.

3.2.1 Newtonovi zakoni gibanja

Prije nego što je engleski fizičar Isaac Newton 1686. formulirao svoja tri zakona gibanja i objavio ih u djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (ilustracija 1.11), mislilo se kako je za bilo koje gibanje tijela potrebno djelovanje drugih tijela, tj. kako je i za stalnu brzinu tijela potrebna stalna sila koja djeluje na to tijelo. U to su vrijeme takvi stavovi bili prirodni, ako bi se promatrala gibanja uobičajenih tijela po uobičajenim podlogama (na primjer, konjske zaprege po neravnom tlu).

Pojam sile, mase i količine gibanja

Sila. Fizikalne veličine koje su važne u iskazivanju Newtonovih zakona gibanja su: sila, masa i količina gibanja. U fizici silu proučavamo pomoću njezina djelovanja koje može biti dvojako: kroz promjenu stanja gibanja ili promjenu oblika tijela. Ovdje ćemo se ograničiti na promjenu stanja gibanja. U prirodi postoje četiri osnovne (ili fundamentalne) sile: gravitacijska, elektromagnetska, jaka i slaba nuklearna sila. Ostale se poznate sile (npr. sila trenja, sila uzgona, elastična sila, ...) objašnjavajue preko fundamentalnih sila. Sile se često razvrstavaju u dvije klase: dodirne sile i sile polja (sile polja su sile između tijela koja nisu nužno u dodiru). Na primjer, kao što je prikazano na ilustraciji 3.34 ragbi igrač djeluje dodirnom silom na loptu ili djevojčica preko konopa na kolica, dok npr. gravitacijska sila dviju masa pripada klasi sila polja. Sve četiri fundamentalne sile su primjeri sila polja. Sila je vektorska fizikalna veličina, a njena mjerna jedinica je newton, $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$. Sva svojstva vektorskih večina, koja smo već spominjali, vrijede i za sile.

Masa. Iz svakodnevnog iskustva uočavamo kako jednake sile uzrokuju različite akceleracije na različita tijela. Na primjer, jednake će sile dati veći

Primjeri dodirnih sila   Primjeri sila polja

Ilustracija 3.34: Primjeri dodirnih sila (igrač ragbija na loptu i djevojčica preko konopa na kolica), te sile polja (gravitacijska sila tijela mase M na drugo tijelo mase m).

iznos akceleracije teniskoj loptici, nego kugli za bacanje. Možemo zaključiti, kako je ponašanje tijela uvjetovano silom koja djeluje na to tijelo i unutarnjim svojstvom promatranoga tijela. To unutarnje svojstvo tijela, koje određuje njegovo ponašanje pri djelovanju sile, nazivamo masa tijela. Što je masa tijela veća, to mu je teže promijeniti stanje gibanja. Svojstvo tijela da održava svoje stanje gibanja nazivamo **inercija**, tromost ili ustrajnost. Stoga možemo reći kako je masa kvantitativna mjera inercije tijela. Masa je skalarna fizikalna veličina, a njena mjerna jedinica je kilogram, 1 kg.

Količina gibanja. Količinu gibanja $\vec{p}$ definiramo kao produkt mase m, i brzine tijela $\vec{v}$,

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{3.55}$$

Količina gibanja je vektorska veličina, a njena mjerna jedinica je kg m/s.

Prvi Newtonov zakon gibanja

Već je i Galileo uočio kako tijelo na kojeg ne djeluju vanjske sile miruje ili se jednoliko giba po pravcu. Proširivši Galilejeva razmatranja, Newton je postavio svoj prvi zakon gibanja u sljedećem obliku: *Svako će tijelo ostati u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok na njega ne djeluju vanjske sile ili je suma svih sila jednaka nuli.*

Prvi se Newtonov zakon često naziva i principom ustrajnosti. Po njemu je uzrok promjene gibanja danog tijela djelovanje vanjske sile na to tijelo. Ako nema vanjskih sila koje djeluju na tijelo, ili se sile međusobno poništavaju tako da je rezultantna sila na tijelo jednaka nuli, tada će akceleracija tijela biti nula, odnosno brzina tijela ostat će nepromijenjena

$$\vec{F} = 0 \implies \vec{a} = 0 \implies \vec{v} = konst. \tag{3.56}$$

Inercijalni referentni sustavi. Možemo se lako uvjeriti kako Prvi Newtonov zakon ne vrijedi u svim referentnim sustavima. Na primjer, ako zamislimo igru biljara u vlaku koji se zaustavlja, uočit ćemo kako će kuglice promijeniti svoje stanje gibanja u odnosu na vlak, iako je zbroj svih sila koje djeluju na kuglice jednak nuli. Međutim, uočimo kako će gibanje tih kuglica ostati nepromijenjeno u odnosu na sustav koji je vezan, na primjer, za površinu Zemlje. Zaključujemo kako Prvi Newtonov zakon ne vrijedi za sustav koji je vezan za akcelerirani vlak. Referentne sustave u kojima vrijedi Prvi Newtonov zakon nazivamo inercijalnim referentnim sustavima, ili jednostavno inercijalnim sustavima. Referentni sustav vezan za površinu Zemlje nije apsolutni inercijalni sustav zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. Međutim, ovdje ćemo ga smatrati inercijalnim sustavom zbog računske jednostavnosti te malog utjecaja vrtnje Zemlje na gibanja mnogih tijela u različitim sportskim aktivnostima.

Drugi Newtonov zakon

Vidjeli smo kako Prvi Newtonov zakon opisuje ponašanja nekog tijela kad na njega ne djeluju druga tijela ili kad je rezultanta svih sila na to tijelo jednaka nuli.

Drugi zakon opisuje ponašanja tijela kad na njega djeluje neka ukupna vanjska sila $\vec{F}$, a iskazuje se u sljedećem obliku: *Promjena količine gibanja nekog tijela proporcionalna je ukupnoj vanjskoj sili koja djeluje na to tijelo:*

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{3.57}$$

Ako se masa tijela ne mijenja u vremenu, tada se Drugi Newtonov zakon matematički pojednostavnjuje u sljedeći oblik

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \overset{m=konst.}{=} m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \tag{3.58}$$

Ova jednadžba (koja se naziva i jednadžbom gibanja materijalne točke) je vektorska jednadžba koja se može zamijeniti trima komponentnim skalarnim jednadžbama

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z. \tag{3.59}$$

Vidljivo je kako je svaka komponenta akceleracije (a_x, a_y, a_z) uzrokovana samo odgovarajućom komponentom ukupne vanjske sile. Na primjer, komponenta akceleracije a_x uzrokovana je samo odgovarajućom komponentom ukupne sile F_x. Iz skalarnih jednadžbi gibanja vidimo da, ako je jedna komponenta ukupne sile jednaka nuli, tada je i odgovarajuća komponenta akceleracije toga tijela jednaka nuli.

Napomenimo kako se Newtonovi zakoni gibanja odnose na tijelo koja imaju masu različitu od nule, ali zanemarivih prostornih dimenzija, tj. za materijalne točke.

Impuls sile. Iz Drugog Newtonovog zakona može se odrediti promjena količine gibanja $\Delta\vec{p}$ nekog tijela u nekom vremenskom intervalu Δt dok na njega djeluje stalna rezultantna vanjska sila $\vec{F}$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \tag{3.60}$$

Veličina na desnoj strani jednažbe, $\vec{F}\Delta t$, naziva se impuls sile u danom vremenskom intervalu i označava sa $\vec{J}$. Vidimo kako je impuls sile jednak promjeni količine gibanja za taj vremenski interval. Ako sila $\vec{F}$ nije stalna u intervalu Δt, tada se impuls sile računa koristeći integralni račun, ili koristeći pojam srednje sile

$$\vec{J} = \langle\vec{F}\rangle\Delta t. \tag{3.61}$$

Treći Newtonov zakon

Već smo vidjeli kako djelovanja na neko tijelo potječu iz okoline toga tijela, tj. od drugih tijela. Treći Newtonov zakon govori o međudjelovanju danog tijela i njegove okoline, kojeg iskazujemo na sljedeći način: *Sile kojima dva tijela djeluju jedno na drugo uvijek su istog iznosa, a protivne orijentacije:*

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}, \tag{3.62}$$

gdje $\vec{F}_{AB}$ označava silu kojom tijelo B djeluje na tijelo A, a $\vec{F}_{BA}$ silu kojom tijelo A djeluje na tijelo B (ilustracija 3.35). Vidimo kako se, u skladu s ovim zakonom, sile uvijek pojavljuju u paru. Svakoj sili javlja se protivna sila. Učinci se ovih dviju sila, naravno, ne poništavaju jer se njihova hvatišta nalaze u različitim tijelima. Ove se dvije sile često nazivaju silama **akcije** i **reakcije**.

Ilustracija 3.35: Sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ kojima tijela A i B djeluju jedno na drugo, u skladu s Trećim Newtonovim zakonom, imaju jednake iznose, a suprotne orijentacije.

Primjeri

1. Može li se tijelo nalaziti u stanju mirovanja ako na njega djeluje samo jedna sila različita od nule?

   Ne može. Tijelo će mijenjati svoju brzinu, tj. akceleracija tijela je različita od nule.

2. Akceleracija nekog tijela je jednaka nuli. Znači li to da nema vanjskih sila koje djeluju na tijelo?

   Ako neko tijelo ima akceleraciju jednaku nuli, tada se, iz tih podataka ne može zaključiti djeluju li na tijelo vanjske sile ili ne. Sve što se može reći jest da je ukupna sila na tijelo (tj. vektorski zbroj svih sila na tijelo) jednaka nuli.

3. Može li se neko tijelo gibati, a da je rezultantna sila na to tijelo jednaka nuli?

   Po Prvom Newtonovom zakonu, ako je ukupna sila na neko tijelo jednaka nuli, tada će tijelo ostati u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu. Dakle, tijelo se može gibati i kad je ukupna sila na tijelo jednaka nuli.

4. Može li neko tijelo promijeniti orijentaciju svog gibanja ako je ukupna sila na to tijelo jednaka nuli?

   Ne može. Promjena orijentacije gibanja tijela, podrazumijeva promjenu brzine, a postojanje promjene brzine u nekom vremenu označava postojanje akceleracije različite od nule. Po Drugom Newtonovom zakonu, da bi tijelo imalo akceleraciju različitu od nule, na tijelo mora djelovati ukupna sila koja je različita od nule.

5. Ako rukama vučete dugački konop silom od 50 N, kolikom silom djeluje konop na ruke?

Po Trećem Newtonovom zakonu konop će djelovati istim iznosom, tj. silom iznosa 50 N, a orijentacija će te sile biti suprotna orijentaciji sile kojom vučete konop.

6. Nogometaš iz slobodnog udarca daje lopti iznos brzine od 10 m/s. Ako je vrijeme trajanja kontakta lopte i noge nogometaša bilo 0.2 s, koliki je iznos srednje sile kojom je nogometaš djelovao na loptu? Masa nogometne lopte je 0.43 kg.

   U vremenu od 0.2 s, srednja akceleracija lopte je

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{0.2 \text{ s}} = 50 \text{ ms}^{-2}.$$

   Koristeći Drugi Newtonov zakon, za iznos srednje sile dobijemo

$$F = ma = (0.43 \text{ kg})(50 \text{ ms}^{-2}) = 21.5 \text{ N}.$$

7. Loptica stolnog tenisa, $m = 2.7$ g, pusti se s visine od 1 m. Nakon udara u pod loptica odskoči na visinu od 75 cm. Ako je dodir između loptice i poda trajao 2 ms, kolika je sila kojom je pod djelovao na lopticu? Zanemarite otpor zraka.

   Neposredno prije udara o pod loptica ima brzinu iznosa v_1 s orijentacijom prema dolje

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2(9.8 \text{ ms}^{-2})(1 \text{ m})} = 4.43 \text{ m/s}.$$

   Neposredno nakon sudara s podom, loptica ima brzinu iznosa v_2 s orijentacijom prema gore

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2(9.8 \text{ ms}^{-2})(0.75 \text{ m})} = 3.83 \text{ m/s}.$$

   Iznos srednje akceleracije loptice, tijekom trajanja sudara s podom, je

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|(-3.83 \text{ m/s}) - (4.43 \text{ m/s})|}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 4.13 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-2},$$

   a iznos srednje sile poda na lopticu je

$$F = ma = (2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg})(4.13 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-2}) = 11.2 \text{ N}.$$

   Orijentacija sile i akceleracije je prema gore.

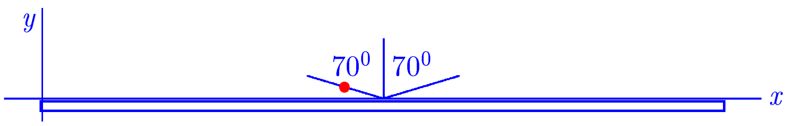
8. U sljedećim primjerima prepoznajte sile akcije i reakcije: a) odskok uvis; b) udarac nogom u loptu; c) hvatanje lopte rukama; d) udar vjetra u jedro.

   a) skok uvis: sila akcije je sila kojom čovjek nogom djeluje na tlo, a sila reakcije je sila kojom tlo djeluje na nogu čovjeka; b) udarac nogom u loptu: sila akcije je sila noge na loptu, a sila reakcije je sila kojom lopta djeluje na nogu; c) hvatanje lopte rukama: sila ruku na loptu je sila akcije, a sila kojom lopta djeluje na ruke je sila reakcije; d) udar vjetra u jedro: sila akcije je sila kojom molekule zraka djeluju na jedro, a sila reakcije je sila jedra na molekule zraka.

9. Odredite iznos količine gibanja teniske loptice čija je masa 0.06 kg. kad joj je iznos brzine vrijednosti od 216 km/h.

   $$p = mv = (0.06 \text{ kg})(216 \text{ km/h}) = (0.06 \text{ kg})(60 \text{ m/s}) = 3.6 \text{ kg m/s}.$$

   Kolika je promjena količine gibanja iste loptice ako navedenom brzinom udari o tlo pod kutem od 70^0 elastično se odbijajući pod jednakim kutem?



$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= p\sin 70^0\hat{\imath} - p\cos 70^0\hat{\jmath} \\
\vec{p}_2 &= p\sin 70^0\hat{\imath} + p\cos 70^0\hat{\jmath} \\
\Delta\vec{p} &= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 2p\cos 70^0\hat{\jmath} \\
\Delta p &= 2p\cos 70^0 = 2(3.6 \text{ kg m/s})(0.342) = 2.46 \text{ kg m/s}.
\end{aligned}$$

3.2.2 Newtonov opći zakon gravitacije

Problem privlačnog djelovanja Zemlje na sva tijela koja se nalaze u njezinoj blizini stoljećima je zaokupljalo pažnju mnogih ljudi. Priča se kako je Newton, dok je boravio na obiteljskoj farmi u Lincolnshireu uspoređujući padanje jabuke i gibanja Mjeseca oko Zemlje, zaključio kako centripetalnu akceleraciju Mjeseca i akceleraciju slobodnog pada jabuke u blizini površine Zemlje uzrokuje ista vrsta sile, tj. gravitacijsko privlačenje dvaju tijela: Zemlje i Mjeseca u prvom primjeru, te Zemlje i jabuke u drugom. Izraz koji je dobio za iznos gravitacijske sile F kojom tijelo mase m_1 djeluje na tijelo mase m_2 (i obratno) ima sljedeći oblik

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.63}$$

gdje je $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2) gravitacijska konstanta, a r označava udaljenost središta danih tijela. Ovakav izraz vrijedi samo za homogena tijela sfernog oblika, a ako tijela nisu homogena i sfernog oblika, tada se gravitacijska sila između tih tijela dobije koristeći integralni račun. Nadalje, izraz vrijedi bez obzira na sredstvo koje dijeli ta dva tijela i bez obzira na stanje gibanja tih tijela. Gravitacijska sila je privlačna sila, tj. orijentacija te sile je prema središtu tijela koje izaziva gravitacijsko djelovanje na dano tijelo.

Prije nego je Newton izveo svoj zakon gravitacijsog privlačenja postojala su dva odvojena zakona ili dva različita međudjelovanja, kako se često nazivaju, koja su opisivala gibanja svemirskih objekata s jedne strane, te gibanje tijela u blizini površine Zemlje, s druge strane (Keplerovi zakoni i Galilejev zakon slobodnog pada). Svojim je zakonom Newton objedinio ta dva međudjelovanja (ta dva zakona) u jedinstven, pa se zato i naziva Općim zakonom gravitacije.

Iznos akceleracije bilo kojeg tijela u blizini površine Zemlje, uzrokovan gravitacijskom silom Zemlje, može se odrediti iz Newtonovog općeg zakona gravitacije dajući približnu vrijednost

$$g = \gamma \frac{m_z}{r_z^2} \approx 9.83 \text{ ms}^{-2}, \tag{3.64}$$

gdje su $m_z = 5.98 \cdot 10^{24}$kg i $r_z = 6.37 \cdot 10^6$m masa i srednji radijus Zemlje. Tijela u slobodnom padu u blizini površine Zemlje, u stvarnosti, neće imati točno ovaj iznos akceleracije zbog toga što: 1) Zemlja nije homogena, 2) Zemlja nije idealnog sfernog oblika, te 3) zbog postojanja rotacije Zemlje. Iznos akceleracije g slobodnog pada nešto je manji za tijela u blizini ekvatora, a raste prema sjevernom i južnom polu.

Newtonov se opći zakon gravitacije, skupa s Newtonovim zakonima gibanja, primjenjuje uglavnom za predviđanja gibanja satelita, planeta i drugih svemirskih tijela. Gravitacijsko privlačenje između mnogih tijela u sportskim aktivnostima toliko je malo da se može zenemariti. Međutim, jedno tijelo koje je dovoljno masivno da stvara velike iznose gravitacijske sile na druga tijela je Zemlja te, stoga, njeno gravitacijsko djelovanje moramo uzimati u obzir i u sportu. Štoviše, sila gravitacijskog privlačenja Zemlje ima odlučujuću ulogu na sva tijela koja promatramo u mnogim sportskim aktivnostima. Njen utjecaj na tijela u blizini površine Zemlje opisat ćemo jednim oblikom te sile koji se zove sila teže.

Primjeri

1. Odredite iznose gravitacijskih sila na atletičara mase 80 kg uzrokovane a) Suncem, d) Mjesecom, c) Jupiterom kad je najbliže Zemlji, d) susjednim atletičarom jednake mase koji se nalazi na udaljenosti 1 m, te e) Zemljom. Mase Sunca, Mjeseca i Jupitera su: $2 \cdot 10^{30}$ kg, $7.4 \cdot 10^{22}$ kg i $1.9 \cdot 10^{27}$ kg. Srednje udaljenosti Sunca i Mjeseca od Zemlje su: $1.5 \cdot 10^{11}$ m, $3.8 \cdot 10^{8}$ m, a Jupitera kad je najbliže Zemlji $6.3 \cdot 10^{11}$ m.

$$\begin{aligned}
F &= \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \\
F_S &= (6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}) \frac{(2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg})(80\ \mathrm{kg})}{(1.5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^2} = 0.47\ \mathrm{N} \\
F_M &= (6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}) \frac{(7.4 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg})(80\ \mathrm{kg})}{(3.8 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m})^2} = 2.7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} \\
F_J &= (6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}) \frac{(1.9 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg})(80\ \mathrm{kg})}{(6.3 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^2} = 2.6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} \\
F_a &= (6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}) \frac{(80\ \mathrm{kg})(80\ \mathrm{kg})}{(1\ \mathrm{m})^2} = 4.3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N} \\
F_Z &= mg = (80\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2}) = 784\ \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Vidimo kako je iznos sile gravitacijskog privlačenja Zemlje F_Z, na danog atletičara najveći. Iznos gravitacijskog privlačenja Sunca F_S, je za više od 1600 puta manji od privlačenja Zemlje, a Mjeseca F_M, manji za još dva reda veličine. Gravitacijska se privlačenja Jupitera F_J, te susjednog atletičara F_a, u usporedbi s privlačenjem Zemlje, mogu potpuno zanemariti.

3.2.3 Klasifikacija i primjeri sila

Unutarnje i vanjske sile

Newtonovi se zakoni gibanja odnose na vanjske sile, čime zaključujemo kako mogu postojati i **unutarnje sile**. Unutarnje sile (npr. mišićne sile) su sile koje djeluju unutar tijela ili nekog sustava tijela čije gibanje izučavamo. Po Trećem Newtonovom zakonu, svakoj unutarnjoj sili stvara se protusila, što znači kako unutarnje sile ne mogu uspostaviti gibanje tijela kao cjeline ukoliko nema vanjskih sila. Jedino vanjske sile mogu mijenjati stanje gibanja nekog tijela kao cjeline.

U sportu, tijela koja najčešće istražujemo su tijela sportaša. Unutarnje sile koje djeluju unutar tijela sportaša mogu se podijeliti na aktivne i pasivne. Jedine aktivne sile su sile mišića, a pasivne sile dolaze od potpornih i vezivnih tkiva. No, ovakva je podjela unutarnjih sila vrlo sporna budući da i sile vezivnih tkiva mogu imati značajni doprinos sili mišića. Na primjer, kod skokova uvis zbog deformacija vezivnih tkiva stvaraju se uvjeti za djelovanje elastičnih sila koje daju značajni doprinos silama mišića. Ipak se općenito može reći kako pasivne sile djeluju tako da smanjuju djelovanje mišića.

Vanjske sile su one sile koje djeluju na tijelo kao rezultat njegovog međudjelovanja s okolinom, te odražavaju povezanost tijela s okolinom. Vidjeli smo kako se vanjske sile mogu podijeliti na dodirne sile i sile polja. Većina sila koje se javljaju u sportskim aktivnostima su dodirne sile, a jedina sila polja koju ćemo uzimati u obzir je gravitacijska sila Zemlje. Gibanje tijela kao cijeline može se ostvariti samo vanjskim silama.

Sila teže

Vidjeli smo kako sva tijela u blizini površine Zemlje imaju približno jednaki iznos akceleracije slobodnog pada, $g = 9.8$ ms^{-2} (ako se zanemari otpor zraka). Ta akceleracija ima različite vrijednosti na različitim geografskim širinama ili nadmorskim visinama na kojima se mjeri. Na većim nadmorskim visinama i bliže ekvatoru iznos akceleracije je manji, a na manjim nadmorskim visinama i bliže polovima Zemlje raste do vrijednosti od oko 9.83 ms^{-2}. Iznos sile koja uzrokuje tu akceleraciju nekog tijela proporcionalna je masi m tog odabranog tijela

$$\vec{F}_g = m\vec{g}. \tag{3.65}$$

Ova se sila naziva **Zemljina sila teže** ili jednostavno sila teže, a njena orijentacija je prema središtu Zemlje. Kako iznos akceleracije slobodnog pada ima manje vrijednosti na mjestima koja su bliže ekvatoru Zemlje ili na većim nadmorskim visinama, to je i vrijednost sile teže manja na tim mjestima. Stoga će sportaši u mnogim sportskim disciplinama na takvim mjestima imati veću vjerojatnost za ostvarenje najboljih rezultata. To se posebno odnosi na atletske discipline.

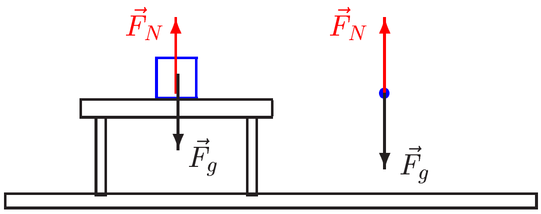
Težina. Gledano kroz različitu literaturu iz fizike, pojam težine nema usaglašenu definiciju. Mi ćemo je ovdje definirati onako kako se definira u modernoj literaturi. Težina W odabranog tijela je iznos ukupne sile koja je potrebna za sprečavanje slobodnog pada tijela, gledano iz sustava vezanog za površinu Zemlje. Ovakva definicija ukazuje kako je težina W jednaka iznosu gravitacijske sile F_g, tj. vrijedi

$$W = mg, \tag{3.66}$$

te ju je moguće definirati i na taj način. Težina nekog odabranog tijela ovisi o geografskom položaju i nadmorskoj visini mjerenja. Težinu treba mjeriti dok tijelo ne akcelerira. Na primjer, ako bismo mjerili težinu u dizalu dok mu se mijenja brzina, takva bi se težina tijela razlikovala od težine izmjerene na čvrstom tlu i treba je nazvati prividnom težinom. Nadalje, nužno je razlikovati pojam mase od pojma težine. Naime, težina se mjeri u newtonima (1 N), a masa u kilogramima (1 kg). Na primjer, neko dano tijelo ima jednaku vrijednost mase na površini Zemlje kao i na površini Mjeseca, a težine mu se razlikuju za oko 6 puta.

Sila pritiska podloge

Ako jedno odabrano tijelo dodiruje neko drugo tijelo, tada to drugo tijelo djeluje na odabrano tijelo silom, zbog deformacije svoje površine, okomito na svoju površinu i naziva se **silom pritiska podloge**, $\vec{F}_N$ (npr. sila kojom površina stola djeluje na neko tijelo koje se nalazi na njemu, ilustracija 3.36). U slučajevima kada nije moguće odrediti pravac koji je okomit na određenu



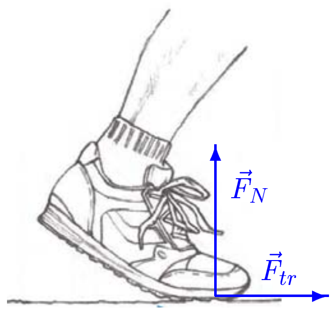
Ilustracija 3.36: Tijelo na površini stola osjeća silu $\vec{F}_N$ koja ima orijentaciju okomito na dodirne površine.

površinu, tada se pravac koji nosi orijentaciju te sile određuje iz Newtonovih zakona gibanja (npr. kod dodira šiljastih tijela).

Sila pritiska podloge neizbježna je sila u sportskim aktivnostima. Na primjer, kod trčanja pri svakom dodiru noge sportaša s tlom djeluje sila pritiska podloge tla na onaj dio noge koji je u izravnom dodiru s tlom. Orijentacija te sile je prema gore, okomito na dodirne površine. Silom jednakog iznosa, a suprotne orijentacije, djeluju i noge sportaša na taj dio tla. Jednako tako, i kad nogometna lopta udara o tlo, na nju djeluje sila pritiska podloge orijentirana prema gore. Ta sila mijenja vertikalnu komponentu gibanja lopte.

Sila trenja

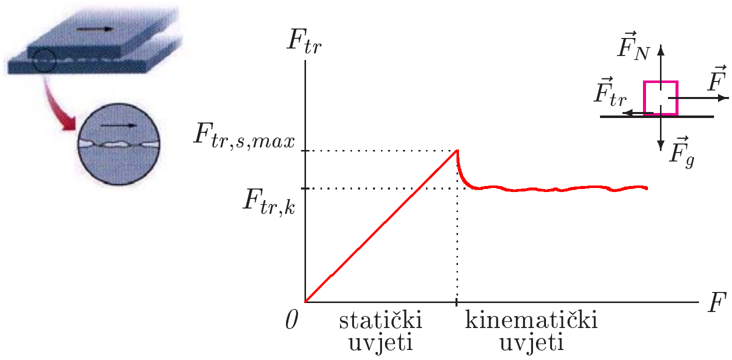
Pored sile pritiska podloge, čija je orijentacija okomita na dodirne površine, dva tijela koja su u dodiru mogu djelovati i **silom trenja** koja ima orijentaciju tangencijalno dodirnim plohama. Trenje je, kao pojava, nezaobilazno u sportskim aktivnostima. S jedne se strane nastoji ostvariti što je moguće manji iznos sila trenja između nekih podloga (npr. između skija i snijega), dok se u nekim drugim slučajevima teži postizanju velikih iznosa sila trenja (npr. kod automobilskih guma ili sportske obuće). Na ilustraciji 3.37 prikazane su sila pritiska podloge i sila trenja na dio sportske obuće koji



Ilustracija 3.37: Sila trenja $\vec{F}_{tr}$ i sila pritiska podloge $\vec{F}_N$ na dio sportske obuće koji je u dodiru s tlom.

je u dodiru s tlom u trenutku neke sportske aktivnosti (npr. trčanja).

Vrlo jednostavnim priručnim pokusima možemo uočiti postojanje sile trenja. Ako neko masivnije tijelo pokušamo pokrenuti iz stanja mirovanja, uočavamo kako tijelo miruje sve dok iznos sile kojom djelujemo na to tijelo ne postane dovoljno velik kako bi se savladala sila trenja. Time zaključujemo kako sila trenja, dok tijelo miruje, mijenja svoju vrijednost u skladu s ukupnom silom na to tijelo. Kad se tijelo pokrene, možemo uočiti kako je, za održavanje jednolikog gibanja toga tijela, potrebna sila nešto manjeg iznosa nego je bila za trenutak pokretanja gibanja. Stoga je potrebno razlikovati silu trenja u statičkim uvjetima od sile trenja u kinematičkim uvjetima. Na ilustraciji 3.38, prikazana je ovisnost iznosa sile trenja F_{tr} o iznosu ukupne sile F koja djeluje na tijelo. Maksimalni iznos $F_{tr,s,max}$ koji može imati sila trenja, dok nema klizanja između dviju podloga, jednak je produktu



Ilustracija 3.38: Iznos sile trenja F_{tr} u ovisnosti o iznosu ukupne sile F na tijelo (bez sile trenja). U statičkim uvjetima iznos sile trenja F_{tr} uvijek je jednak iznosu sile F. Maksimalni iznos sile trenja u statičkim uvjetima $F_{tr,s,max}$ nije manji od iznosa sile trenja u kinematičkim uvjetima $F_{tr,k}$.

statičkog keoficijenta trenja μ_s i iznosa sile pritiska podloge F_N

$$F_{tr,s,max} = \mu_s F_N . \tag{3.67}$$

Za tijela u klizanju, tj. u kinematičkim uvjetima, iznos sile trenja jednak je produktu kinematičkog koeficijenta trenja μ_k i iznosa sile pritiska podloge F_N

$$F_{tr,k} = \mu_k F_N . \tag{3.68}$$

Za tijela u klizanju, orijentacija sile trenja je suprotna orijentaciji klizanja tijela, a za tijela u mirovanju suprotna orijentaciji zbroja svih ostalih sila na to tijelo.

Koeficijenti trenja μ_s i μ_k su bezdimenzionalni i određuju se eksperimentalno, a njihove vrijednosti ovise o svojstvima dodirnih ploha. Općenito, kinematički koeficijent trenja μ_k nije veći od statičkog koeficijenta μ_s

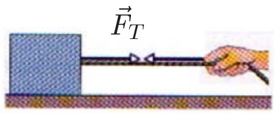
$$\mu_s \geq \mu_k . \tag{3.69}$$

Iako kinematički koeficijent trenja ovisi o iznosu brzine tijela, mi ćemo tu ovisnost ovdje, uglavnom, zanemarivati.

Sila trenja je važna sila kod svih sportskih aktivnosti. Za ostvarivanje pokreta nekog sportaša potrebno je postojanje sile trenja između obuće i podloge po kojoj se nastoji kretati. Za mnoge sportske obuće, koje se koriste u atletici, poželjne su što je moguće veće vrijednosti koeficijenta trenja. I kod sportova s reketom, poželjne su veće vrijednosti sile trenja između ruku i mjesta hvatanja reketa. Kod nekih sportova, kao što su ples ili boćanje, poželjne su veće vrijednosti koeficijenta trenja, a kod skijanja, vožnje boba, sanjkanja i sličnih sportova nastoje se postići što je moguće manje vrijednosti.

Sila napetosti

Ako je, na primjer, neko tijelo pričvršćeno za uže i ako djelujemo nekom silom na to uže, tada ono djeluje **silom napetosti** na tijelo i na ruku kojom vučemo uže, ilustracija 3.39. Tu silu obično označavamo sa $\vec{F}_T$. Ako se



Ilustracija 3.39: Ako je uže zanemarive mase, tada je sila napetosti istog iznosa na oba kraja užeta.

zanemari masa užeta, tada je sila napetosti u užetu istog iznosa na oba njegova kraja, tj. na tijela koja su vezana na krajevima užeta (u ovom slučaju na ruku i dano tijelo).

Sila uzgona

Utjecaj sredstva na tijelo, koje se u njemu giba, od velikog je značaja u biomehanici. Ta sredstva su obično zrak ili voda, tj. tekućine i plinovi koji se zajedničkim imenom nazivaju fluidi. Prva sila koju ćemo upoznati, a djeluje na svako tijelo uronjeno u fluid bez obzira na njegovo stanje gibanja, je **sila uzgona**. Orijentacija sile uzgona je suprotna orijentaciji gravitacijske sile, a njen iznos je određen Arhimedovim principom koji glasi: *Iznos sile uzgona na tijelo koje je uronjeno u fluid jednak je težini tijelom istisnutog fluida.* Kako je težina istisnutog fluida dana izrazom $W = mg = \rho V g$, onda je i iznos sile uzgona dan sljedećim izrazom

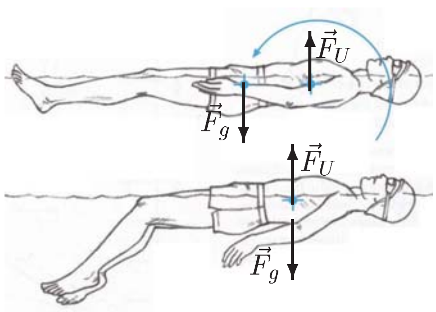
$$F_U = \rho V g, \tag{3.70}$$

gdje je ρ gustoća fluida, a V volumen istisnutog fluida. Vidimo kako na tijela djeluju sile uzgona većeg iznosa ako su uronjena u fluid veće gustoće. Zrak pri normalnim uvjetima ima gustoću oko 1.3 kg/m^3, a voda 1000 kg/m^3, što znači kako je iznos sile uzgona na tijelo koje je uronjeno u vodu znatno veći od iznosa sile uzgona na tijela koja su uronjena u zrak. U većini slučajeva, silu uzgona zraka na neko tijelo možemo zanemariti, no postoje i takva tijela koja, zbog sila uzgona koje djeluju na njih, plutaju u zraku. Na primjer, to su baloni ispunjeni toplim zrakom ili plinom helija (ilustracija 3.40). Plin helija

Ilustracija 3.40: Sila uzgona na balon ispunjen toplim zrakom.

je oko 7 puta manje gustoće od gustoće zraka, a zrak ima manju gustoću što mu je temperatura veća.

Kod normalnog je čovjeka, gustoća mišića i kostiju veća od 1000 kg/m^3, dok je gustoća masnog tkiva nešto manja. Ipak, i osobe koje imaju male količine masnog tkiva na svom tijelu mogu plutati tako što će povećati svoj volumen uzimajući veće količine zraka u pluća. Međutim, takvim će se osobama dok plutaju u vodi tijelo nastojati postaviti u vertikalni položaj (ilustracija 3.41). To je zbog toga što su hvatišta gravitacijske sile i sile uzgona



Ilustracija 3.41: Sila uzgona i sila teže na plivača punih pluća.

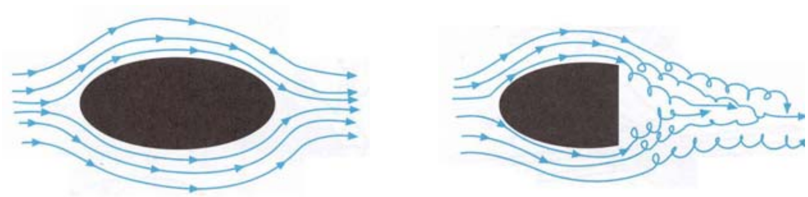
na takvim mjestima, u horizontalno postavljenom tijelu, da stvaraju rotaciju tijela, tj. kažemo kako te dvije sile nisu kolinearne ili ne leže na istom pravcu. Rotacija će prestati kad se te dvije sile postave u stabilni kolinearni položaj.

Gustoća mora nešto je veća od gustoće vode i iznosi 1030 kg/m^3, što znači kako su sile uzgona, na jednako uronjena tijela, veće u moru nego u običnoj vodi.

Sila otpora

Vidjeli smo kako na svako tijelo uronjeno u fluid, bez obzira na njegovo stanje gibanja, djeluje sila uzgona. Međutim, ukoliko se neko tijelo giba kroz fluid (ili fluid protiče pored tijela) javljaju se još neke dodatne sile na to tijelo. Jednake se pojave javljaju bilo da se tijelo giba kroz fluid ili fluid protiče pored tijela.

Fluid može pored nekog tijela proticati stacionarno ili turbulentno (ilustracija 3.42). Kod **stacionarnih gibanja** ne dolazi do miješanja slojeva



Ilustracija 3.42: Stacionarna i turbulentna gibanja fluida.

fluida, a javlja se samo kod malih iznosa brzina gibanja tijela kroz fluid. Na primjer, za većinu tijela u zraku to su brzine iznosa do oko 1 m/s, a u vodi još i desetak puta manje. **Turbulentna gibanja** fluida nastaju kod većih brzina gibanja tijela kroz fluid. U tim se slučajevima susjedni slojevi fluida miješaju stvarajući vrtloge u fluidu. Kod turbulentnih gibanja javlja se **sila otpora** $\vec{F}_D$ na tijelo čiji je iznos proporcionalan kvadratu iznosa relativne brzine v tijela kroz dani fluid

$$F_D = \frac{1}{2} C \rho A v^2, \tag{3.71}$$

gdje je ρ gustoća fluida, A površina poprečnog presjeka tijela okomito na orijentaciju relativne brzine tijela kroz fluid. Konstanta otpora C ovisi o svojstvima tijela i fluida, ali i u manjoj mjeri o brzini tijela relativno na fluid. Kad se promatra gibanje tijela u zraku, ova se konstanta naziva koeficijentom aerodinamičnosti, a u slučaju gibanja kroz vodu koeficijentom hidrodinamičnosti. Konstanta otpora C ima manje vrijednosti za tijela s glatkom površinom, te za tijela koja imaju prikladniji oblik, tj. takav oblik kojim se umanjuju turbulentna gibanja fluida oko tijela. Za većinu sportskih objekata sfernog oblika, konstanta otpora C ima vrijednost približno 0.5 (npr. za većinu lopti).

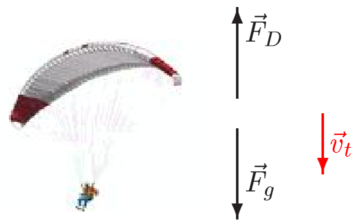
Sila otpora fluida dobro je poznata, npr. biciklistima, plivačima, skijašima, padobrancima, 'nebeskim letačima', te mnogim drugim sportašima. Dobro im je poznata njena ovisnost o površini poprečnog presjeka i brzini u odnosu na taj fluid. Za postizanje većih brzina skijaš (ilustracija 3.43) mora

Ilustracija 3.43: Skijaš u položaju kojim minimizira iznos sile otpora, a 'nebeski letač' u položaju kojim maksimizira.

smanjiti silu otpora što je moguće više (npr. smanjujući površinu poprečnog presjeka postavljajući se u oblik 'jajeta'), dok se 'nebeski letač' postavlja u položaj maksimalne površine nastojeći uzrokovati maksimalnu silu otpora. Mnogi biciklisti, trkači i plivači imaju posebni postupak za smanjenje sile otpora smanjujući relativnu brzinu gibanja kroz fluid (zrak ili vodu). To rade na način da se postave sasvim iza vodećeg sportaša. Relativna brzina fluida veća je za vodećeg sportaša, nego za sportaše koji su iza njega, a time i sila otpora. Na taj način vodeći sportaš je često izmoreniji od sportaša koji su na povoljnijem mjestu iza njega. Nije rijedak slučaj kad se vodeći sportaš tijekom utrke nađe na nezavidnom mjestu na kraju utrke, a pobjednik bude sportaš koji je tijekom cijele utrke bio na prikladnom mjestu iza vodećeg sportaša. Na primjer, kod biciklističkih utrka na taj se način otpor zraka može smanjiti i do 40 %. Važnost relativne brzine gibanja sportaša kroz fluid ukazuje i činjenica nepriznavanja postizanja sportskih rekorda kod skokova udalj ili kratkih utrka ako je brzina vjetra, s orijentacijom gibanja sportaša, veća od 2 m/s.

Pored ovisnosti o relativnoj brzini gibanja i površini poprečnog presjeka tijela, značajna je ovisnost sile otpora i o gustoći fluida. Iako gustoća fluida nije pod izravnom kontrolom sportaša, dobro je znati u kojim se slučajevima pojavljuju manje gustoće zraka i s tim smanjenje iznosa sile otpora. Manje gustoće zraka se javljaju na većim nadmorskim visinama (u Mexico Cityu, 2340 m, gustoća zraka je 25 % manja od gustoće na razini mora). Za toplijeg vremena, te u uvjetima veće vlažnosti, gustoća zraka je, također, manje vrijednosti.

Ako neko tijelo pada kroz zrak iz stanja mirovanja, tada se iznos sile otpora F_D postupno povećava kako raste iznos brzine gibanja. Sila će se otpora suprotstavljati sili teže $\vec{F}_g$. Nakon dovoljno dugo vremena iznos sile otpora izjednačit će se s iznosom sile teže (npr. kod padobranca u jednolikom padu, ilustracija 3.44). U tom se slučaju tijelo više neće ubrzavati i padat



Ilustracija 3.44: Padobranac u uvjetima padanja stalnom brzinom iznosa v_t. Iznosi sile otpora i sile teže imaju jednake vrijednosti.

će sa stalnim iznosom brzine v_t koja se naziva stacionarna brzina. Njene se vrijednosti dobiju izjednačavajući iznose sila F_D i F_g te se, nakon kraćeg matematičkog izvoda, dobije sljedeći izraz

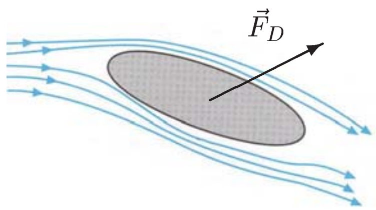
$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}. \tag{3.72}$$

Tijela sličnog oblika, a veće mase imaju veće iznose stacionarne brzine v_t. Stoga nije čudno kako kod skijaškog spusta jednako spretni sportaš veće mase ostvaruje bolje rezultate od sportaša manje mase.

Orijentacija sile otpora za longitudinalno postavljena simetrična tijela (ali ne sferna) je suprotna orijentaciji relativnog gibanja tijela kroz fluid. Za 'koso' postavljena tijela u odnosu na pravac njegovog gibanja sila otpora ima orijentaciju pod nekim kutem u odnosu na pravac gibanja tijela (ilustracija 3.45). To znači kako za takve slučajeve silu otpora ima smisla razložiti na longitudinalnu i transverzalnu komponentu. Sve dok je kut između osi simetrije nekog aerodinamičkog simetričnog tijela i pravca gibanja tijela manji od oko 15^0, longitudinalna se komponenta sile otpora malo mijenja, dok transverzalna komponenta bitno povećava svoju vrijednost. Na taj će način dano tijelo doživjeti skretanje u orijentaciji transverzalne komponente.

Primjeri tijela u gibanju kroz zrak	v_t [m/s]
Tipični 'nebeski letač'	60
Loptica za golf	40
Rukometna lopta	33
Teniska loptica	31
Nogometna lopta	25
Košarkaška lopta	20
Odbojkaška lopta	15
Loptica za stolni tenis	9
Kapljica vode (r=1.5 mm)	7
Padobranac	5

Tablica 3.5: Primjeri nekih vrijednosti iznosa stacionarnih brzina gibanja kroz zrak.



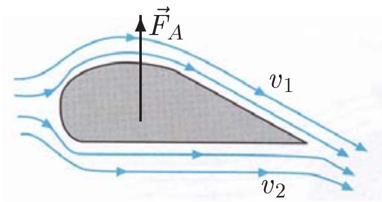
Ilustracija 3.45: Sila otpora za "koso" postavljena tijela.

S povećanjem kuta iznad 15^0, iznos se longitudinalne komponente sile otpora počinje bitno povećavati, a transverzalna smanjivati.

Primjeri u sportu u kojima se stvaraju uvjeti za korištenje transverzalne komponente sile otpora su primjeri kod bacanja diska ili koplja, te kod skijaških letova. Optimalnim postavljanjem diska, koplja ili skijaša u odnosu na pravac gibanja postiže se maksimalni domet.

Aerodinamička sila

U slučaju kada se nesimetrično aerodinamičko tijelo giba kroz fluid (ilustracija 3.46) mogu se izazvati različiti iznosi brzine strujanja fluida na različitim stranama tijela te, tako, izazvati različite vrijednosti dinamičkog tlaka fluida. Zbog te razlike u tlaku na tijelo će djelovati ukupna sila, nazvana **aerodinamičkom silom**. Naime, D. Bernoulli je pronašao kako je tlak manji na mjestima gdje fluid ima veće iznose brzine strujanja. Ako na jednoj strani fluid ima brzinu v_1, a na drugoj strani neku manju brzinu v_2, tada



Ilustracija 3.46: Aerodinamička sila na nesimetrično tijelo u gibanju kroz fluid.

je razlika u tlakovima Δp dana sljedećim izrazom

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2). \tag{3.73}$$

Iznos aerodinamičke sile proporcionalan je razlici tlakova i površini A uzdužnog presjeka danog aerodinamičkog tijela

$$F_A = \Delta p A = \frac{1}{2}\rho A(v_1^2 - v_2^2). \tag{3.74}$$

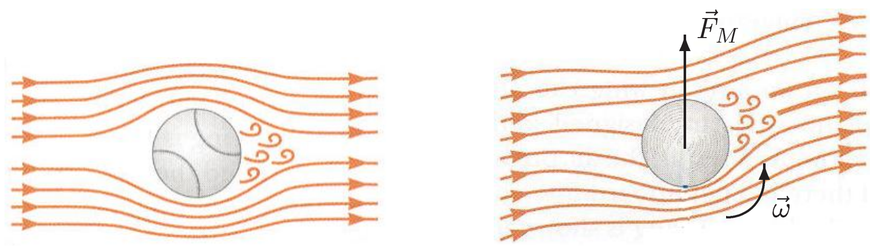
Ovakav je izraz izveden uz zanemarivanje površinskog trenja između tijela i fluida te uz pretpostavku nestlačivosti fluida. Ovisnost sile o stlačivosti fluida (kao na primjer kod zraka) iskazuje se uvođenjem određene konstante u izraz. Orijentacija aerodinamičke sile okomita je na relativno gibanje tijela u odnosu na dani fluid.

Primjeri u kojima postoji značajno djelovanje ove sile su gibanja aviona i brzih sportskih automobila.

Magnusova sila

Sila koju možemo objasniti na istoj osnovi kao i aerodinamičku silu je sila na simetrično tijelo koje, dok se giba kroz fluid, ima vrtnju oko osi simetrije, a naziva se **Magnusova sila**. Ako promatramo nogometnu loptu u gibanju kroz zrak (ilustracija 3.47) koja je dobila vrtnju oko svoje osi, uočit ćemo kako lopta pravi skretanje okomito na pravac gibanja tijela i na os rotacije lopte. To skretanje je uzrokovano Magnusovom silom.

Za razliku od aerodinamičke sile, Magnusova sila na rotirajuće tijelo u gibanju kroz fluid neće postojati ako je trenje između površine tijela i fluida jednako nuli. Tijelo koje se vrti oko svoje osi simetrije i giba kroz fluid, zbog postojanja trenja, povećavat će brzinu fluida na jednoj strani dok će na drugoj smanjivati. U skladu s Bernoullijevom jednadžbom (koja približno vrijedi i za stlačive fluide, kao što je zrak), na onoj strani tijela na kojoj je



Ilustracija 3.47: Magnusova sila na rotirajuću loptu tijekom gibanja kroz zrak.

veća brzina fluida stvara se manji tlak te, tako, i iznos Magnusove sile na dano tijelo. Iznos te sile na tijelo sfernog oblika možemo zapisati sljedećim izrazom

$$F_M = C\rho D^3 f v, \tag{3.75}$$

gdje je ρ gustoća fluida, D promjer sfernog tijela, f učestalost (ili frekvencija) vrtnje, v brzina gibanja tijela, a C konstanta koja se određuje eksperimentalno. Učestalost ili frekvencija vrtnje povezana je s iznosom kutne brzine sljedećim izrazom

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{3.76}$$

U mnogim sportskim aktivnostima s loptom, dobra se predviđanja gibanja lopte dobiju ako se za tu konstantu uzme vrijednost od $C = 1.23$.

Naglasimo kako Magnusova sila postoji samo u slučajevima kada postoji i rotacijsko i translacijsko gibanje simetričnog tijela. Najčešći primjeri u sportu su u nogometu i tenisu. Mnogima su poznati slobodni udarci u nogometu kada lopta skreće 'na lijevo' ili 'na desno'. Pri udarcu nogom lopta može dobiti vrtnju oko vertikalne osi, dok se u tenisu i stolnom tenisu najčešće proizvode rotacije teniske loptice oko horizontalne osi, kada će loptica praviti putanju sa smanjenom (ili povećanom) zakrivljenosti u vertikalnoj ravnini.

Elastična sila

Elastična sila je jedan primjer promjenjive sile (npr. sila elastične opruge). Ako se neko elastično tijelo deformira, ono će u sebi stvarati silu koja će djelovati tako što će nastojati svoj oblik ponovno dovesti u ravnotežni. Tijelo se naziva elastičnim ako se u njemu javlja sila proporcionalna promjeni dimenzije tijela. Iznos elastične sile pišemo u sljedećem obliku

$$F_E = kd, \tag{3.77}$$

što je poznati Hookeov zakon. Konstanta k naziva se konstanta elastičnosti, a ovisi o svojstvima elastičnog tijela. Orijentacija elastične sile ima protivnu orijentacijeu u odnosu na vektor koji označava deformaciju tijela $\vec{d}$. Ako pokušavamo rastegnuti vezivna tkiva u našem tijelu, tada će se u tim vezivnim tkivima javljati elastična sila koja nastoji vratiti tkivo u svoj normalni oblik.

Ovdje valja napomenuti kako neko tijelo ima elastična svojstva (tj. vrijedi Hookeov zakon) samo dok deformacije nisu prevelike. U slučajevima velikih deformacija može doći do nepovratne deformacije, pa čak i do pucanja tog tijela. Često smo svjedoci takvih ozljeda kod skijaša, a i drugih sportaša.

Pojam centripetalne sile

Vidjeli smo kako prema Prvom Newtonovu zakonu, ako je na neko tijelo ukupna vanjska sila jednaka nuli, ono ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu. To znači kako za tijelo u jednolikom gibanju po kružnici djeluje sila koja danom tijelu mijenja orijentaciju brzine. Rezultantnu silu koja drži tijelo u jednolikom kružnom gibanju nazivamo **centripetalnom silom**, a iznos joj je dan sljedećim izrazom

$$F_{cp} = m\frac{v^2}{r}, \tag{3.78}$$

gdje je m masa, v tangencijalna brzina tijela, a r radijus kružnice. Orijentacija centripetalne sile uvijek je prema središtu kružnice. Centripetalna sila može biti bilo koja sila ili suma nekih sila. To nije nikakva posebna sila već samo naziv za rezultantnu silu koja uzrokuje jednoliko gibanje danog tijela po kružnici, tj. ta sila uzrokuje centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_{cp}$ (izraz 3.52). Na primjer, kod klizača na ledu (ilustracija 3.48) dok su u gibanju po kružnici

Ilustracija 3.48: Transverzalna komponenta sile trenja kao centripetalna sila.

centripetalnu silu predstavlja transverzalna komponenta sile trenja između klizaljki i leda. Kod bacanja kladiva centripetalna sila na kladivo prilikom vrtnje je sila napetosti.

Primjeri

1. Sprinter, u trenutku startanja, dok je samo jednom nogom na podu, gura oslonac horizontalno unatrag silom iznosa 500 N, te vertikalno dolje silom iznosa 800 N. Kolika je rezultantna sila kojom sprinter djeluje na oslonac na podu?

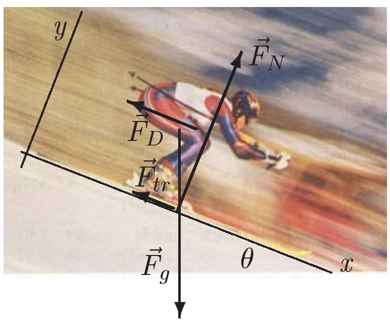
$$\begin{aligned} F_x &= 500 \text{ N} \\ F_y &= 800 \text{ N} \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(500 \text{ N})^2 + (800 \text{ N})^2} = 943.4 \text{ N} \\ \tan\theta &= \frac{F_y}{F_x} = \frac{800 \text{ N}}{500 \text{ N}} = 1.6 \\ \theta &= 58^0. \end{aligned}$$

Rezultantna sila ima iznos od 943.4 N i orijentaciju 58^0 u odnosu na horizontalnu ravninu.

2. Koeficijent trenja između obuće atletičara i poda po kojem trči je 0.5. Ako u trenutku udara o pod atletičar ostvaruje silu pritiska na pod vertikalno prema dolje u iznosu od 2000 N, koliki je maksimalni iznos horizontalne komponente sile koju atletičar može ostvariti djelujući obućom na pod?

$$F_{tr,max} = \mu F_N = (0.5)(2000 \text{ N}) = 1000 \text{ N}.$$

3. Skijaš mase 70 kg spušta se niz padinu nagiba 22^0 u odnosu na horizontalu. Sila otpora zraka na skijaša ima iznos od 10 N, a kinematički koeficijent trenja između skija i snijega je 0.08. Kolika je rezultantna sila na skijaša? Kolika je akceleracija skijaša?



$$\begin{aligned}
F_y &= F_N - F_g\cos\theta = 0\\
F_N &= F_g\cos\theta = mg\cos\theta = (70\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})\cos 22^0 = 636.0\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= F_g\sin\theta - F_D + F_{tr} = mg\sin\theta - F_D + \mu F_N\\
&= (70\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})\sin 22^0 - 10\ \mathrm{N} - (0.08)(509.2\ \mathrm{N}) = 196.1\ \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Rezultantna sila na skijaša ima iznos 196.1 N i orijentaciju niz kosinu. Akceleraciju skijaša, koja ima orijentaciju jednaku orijentaciji rezultantne sile, dobijemo iz Drugog Newtonovog zakona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{196.1\ \mathrm{N}}{70\ \mathrm{kg}} = 2.8\ \mathrm{ms^{-2}}.$$

4. Koeficijent statičkog trenja između ruke tenisačice i njenog reketa je 0.45. Kolikim najmanjim iznosom sile mora stisnuti reket ako želi djelovati na reket longitudinalno silom iznosa 200 N?

$$\begin{aligned}
F_{tr} &= \mu F_N\\
F_N &= \frac{F_{tr}}{\mu} = \frac{200\ \mathrm{N}}{0.45} = 444.4\ \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Stiščući reket tenisačica mora djelovati okomito na površinu reketa silom iznosa 444.4 N, kako bi se stvorila potrebna sila trenja u iznosu od 200 N.

5. Košarkaš mase 100 kg doskače na stopala te odmah pravi odskok s ciljem približavanja košu. Kad mu je stopalo dotaklo pod u doskoku, imao je brzinu od 5 m/s prema dolje, a kad je stopalom napuštao tlo, 0.5 sekundi kasnije, brzina mu je 4 m/s prema gore. Kolika je srednja sila reakcije poda na košarkaša tijekom tih 0.5 sekundi?

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{p} &= m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (100\ \mathrm{kg})(4\ \mathrm{m/s} - (-5\ \mathrm{m/s})) = 900\ \mathrm{kg\ m/s}\\
\langle\vec{F}\rangle &= \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{900\ \mathrm{kg\ m/s}}{0.5\ \mathrm{s}} = 1800\ \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Ukupna srednja sila na košarkaša je 1800 N s orijentacijom prema gore. Međutim, kako na sportaša djeluje sila teže $\vec{F}_g$, a ukupna sila na sportaša je vektorski zbroj sile teže i reakcije poda, $\langle\vec{F}\rangle = \vec{F}_N + \vec{F}_g$, to je sila rekacije poda na sportaša $\vec{F}_N$ dana kao razlika ukupne sile i sile teže

$$\vec{F}_N = \langle\vec{F}\rangle - (-m\vec{g}) = 1800\ \mathrm{N} + (100\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{ms^{-2}}) = +2780\ \mathrm{N}.$$

Orijentacija sile reakcije poda je prema gore.

6. Kod biciklističkih utrka veći dio sile otpora stvara tijelo bicikliste. Koji bi od navedenih položaja bicikliste stvarao najmanji otpor: uspravni položaj, položaj u čučnju ili polegnuti položaj s glavom i rukama prema naprijed?

   Najmanji otpor stvara polegnuti položaj s rukama i glavom prema naprijed.

7. Kako će neravnine na košarkaškoj lopti utjecati na let lopte?

   Tijekom leta stvara se turbulencija oko lopte povećavajući otpor zraka.

8. Kako će vrtnja teniske loptice oko svoje osi utjecati na njen let?

   Tijekom leta teniske loptice koja se vrti oko svoje osi djeluje Magnusova sila koja je okomita na gibanje loptice, pa će dovesti do skretanja loptice od uobičajene putanje.

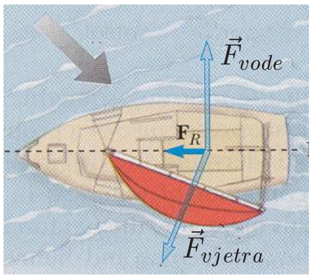
9. U kojim od navedenih sportskih aktivnosti sila otpora zraka ima najveći iznos: trčanje na 100 m, trčanje na 10000 m ili brzinsko klizanje na ledu na 500 m?

   Najveći iznosi sile otpora zraka su na brzinskim klizanjima na ledu zbog velikih brzina gibanja klizača.

10. Zašto je dobro za plivače i bicikliste obrijati tijelo?

    Zbog smanjenja otpora vode i zraka.

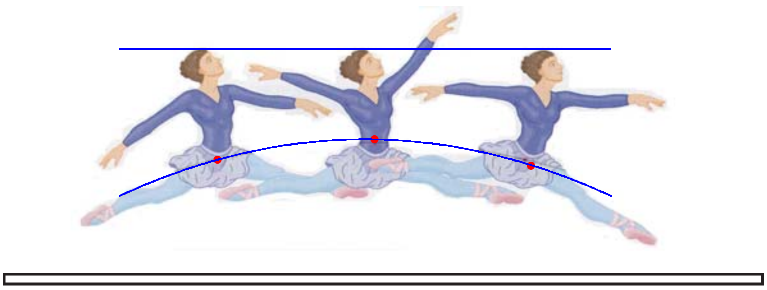
11. Objasnite kako je s brodom na jedra moguće imati komponentu brzine orijentacije suprotno gibanju vjetra?



Vjetar napuhuje jedro stvarajući oblik sličan obliku avionskog krila. Jedro se postavi pod kutem koji je približno na polovici između osi jedrilice i orijentacije vjetra. Sila kojom vjetar djeluje na jedro dolazi jednim dijelom zbog aerodinamičke sile i drugim dijelom zbog promjene gibanja vjetra na unutarnjoj strani jedra. Orijentacija ukupne sile na jedro je približno okomita na jedro. Zbog postojanja kobilice, jedrilica se neće gibati u orijentaciji ukupne sile vjetra na jedro. Naime, sila otpora vode na jedrilicu ima izrazito veću komponentu okomito na kobilicu, nego paralelno kobilici. Rezultantna će sila imati orijentaciju približno prema pramcu jedrilice. Kod uobičajenih jedrilica moguće je uspostaviti njeno gibanje prema vjetru, na osnovi sile vjetra, pod kutevima koji nisu manji od oko 10^0. To znači kako se gibanje 'u vjetar' uspostavlja tzv. cik-cak gibanjem.

3.2.4 Sustav čestica

Kod uvođenja kinematičkih rotacijskih veličina vidjeli smo kako se svako gibanje krutog tijela može razložiti na dvije osnovne vrste gibanja: na translacijsko gibanje jedne njegove odabrane točke i rotacijsko gibanje oko osi koja prolazi tom točkom. Tu točku odabranog krutog tijela, ili sustava tijela, čije je gibanje jednako gibanju zamišljenog točkastog tijela sačinjenog od ukupne mase danog sustava, nazivamo središte mase tijela (ili sustava tijela). Na primjer, putanja središta mase balerine (ilustracija 3.49), tijekom



Ilustracija 3.49: Balerina tijekom jednog dijela svoga leta kojim se doima kao da lebdi. Prikladno gibajući noge i ruke balerina premiješta položaj središta mase u odnosu na svoje tijelo.

izvođenja leta, odgovara putanji neke materijalne točke. Zbog utjecaja sile teže, težište balerine opisuje putanju koja se naziva parabolom, dok vrh glave ide po putanji koju nazivamo pravac. U ovom, kao i mnogim drugim primjerima u sportu, tijelo balerine se ne ponaša kao kruto tijelo jer pojedini segmenti mijenjaju položaj u odnosu na ostatak tijela.

Središte mase

Položaj središta mase $\vec{r}_{cm}$ nekog sustava sačinjenog od više materijalnih točaka raspoređenih u prostoru, definira se preko položaja $\vec{r}_i$ pojedinih masa materijalnih točaka danog sustava

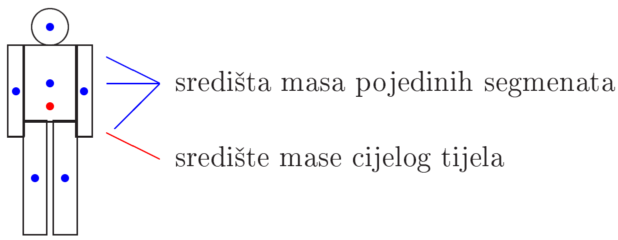
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{3.79}$$

gdje su m_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ mase i-tih materijalnih točaka danog sustava. Koordinate središta mase mogu se odrediti preko koordinata položaja materijalnih točaka (x_i, y_i, z_i)

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{3.80}$$

Bilo koje tijelo čije dimenzije nisu zanemarive možemo zamisliti kao tijelo sastavljeno od mnoštva materijalnih točaka. U slučaju kad umjesto diskretnog sustava materijalnih točaka imamo kruto kontinuirano tijelo, položaj središta mase određuje se koristeći integralni račun. Za pojedina homogena tijela taj je račun vrlo jednostavan. Na primjer, položaj središta mase homogene kugle je u njenom geometrijskom središtu. Isto tako vrijedi i za bilo koje pravokutno trodimenzionalno tijelo. Međutim, za mnoga nepravilna tijela taj račun može biti vrlo kompleksan i izlazi iz okvira naših razmatranja.

Ako neko kontinuirano tijelo možemo predstaviti kao tijelo koje je sastavljeno od dvaju ili više drugih manjih tijela čije su mase i središta masa poznata (ilustracija 3.50), tada se položaj središta mase cijelog tijela određuje

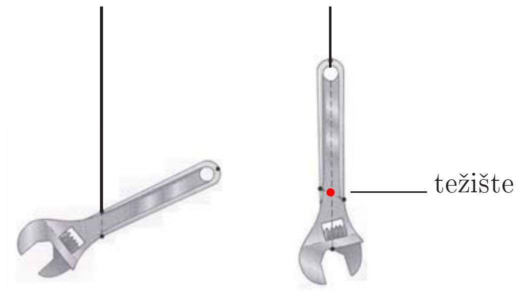


Ilustracija 3.50: Uz određivanje središta mase čovjeka jednostavnim modelom.

koristeći uvedene izraze za središte mase skupa materijalnih točaka. Manja tijela koja sačinjavaju ukupno tijelo predstavljaju se materijalnim točkama.

Težište

Težište nekog tijela (ili sustava sačinjenog od više segmenata) definiramo kao točku za koju će utjecaj sile teže na ukupnu masu tijela, zamišljen u toj točki, biti jednak utjecaju sile teže na cjelokupno tijelo. Položaj težišta određuje se, na primjer, jednostavnim postupkom ovjesa (ilustracija 3.51). Dano se tijelo pričvrsti za jednu točku i pusti u položaj ovjesa, te označi



Ilustracija 3.51: Primjer eksperimentalnog određivanja težišta.

vertikalna linija. Nakon toga se ponovi postupak za još jednu njegovu točku koja nije na označenoj liniji. Sjecište dobivenih dviju linija označava položaj težišta tijela. Napomenimo kako težište tijela ne mora, nužno, biti unutar tijela (npr. kod skakača uvis).

Budući da akceleracija slobodnog pada ima približno jednake vrijednosti u svim točkama danog tijela, može se pokazati kako je položaj težišta $\vec{r}_{cg}$ jednak položaju središta mase $\vec{r}_{cm}$ nekog danog tijela

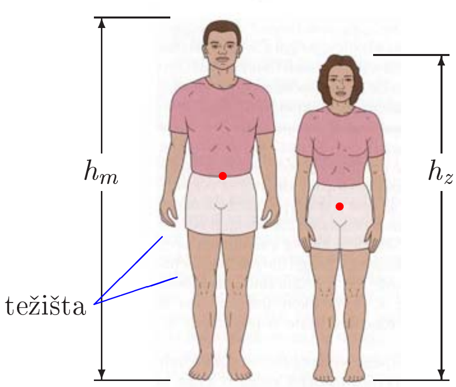
$$\vec{r}_{cg} = \vec{r}_{cm}. \tag{3.81}$$

Položaj središta mase i težišta vrlo malo se razlikuju čak i kod izrazito visokih tijela na Zemlji, kao što su neboderi.

Težište sportaša

U biomehaničkim se istraživanjima ljudsko tijelo promatra kao skup povezanih krutih segmenata. Svaki dio ili segment tijela ima određena fizička svojstva, kao što su masa, volumen, gustoća i mnoga druga svojstva. Između mnogih modela ljudskog tijela koji postoje u biomehaničkim istraživanjima, ovdje ćemo upotrebljavati model kojeg su uveli Zatziorsky i Seluyanov (1983). Tim je modelom, kojega ćemo uvesti u poglavlju 5, tijelo sportaša podijeljeno na 16 segmenata (stopala, potkoljenice, natkoljenice, šake, podlaktice, nadlaktice, glava, te gornji, srednji i donji dio trupa). Mase tih segmenata, položaj njihovih težišta i još neka druga svojstva dana su određenim jednadžbama. Uz poznavanje tih svojstava segmenata lako se odrede potrebna svojstva za cijelo tijelo. Međutim, u nekim slučajevima nije nužno potrebno točno poznavanje tešišta (ili drugih svojstava) sportaša, već samo dobra procjena njihovih vrijednosti.

Ljudsko tijelo nije čvrsto tijelo, tako da mu položaj težišta ovisi o položajima segmenata. Zamislimo sportaša koji je postavljen u normalni stojeći položaj s opuštenim rukama uz tijelo, kao što je prikazano na ilustraciji 3.52. Budući da su lijeva i desna strana tijela međusobno zrcaljeno



Ilustracija 3.52: U normalnom stojećem položaju, položaj težišta normalnog čovjeka je na 55 do 57 % njegove visine.

simetrične, to mu je težište u ravnini koja dijeli tijelo na lijevi i desni dio (središnja ravnina). Ako sportaš podigne lijevu ruku bočno u horizontalni položaj, težište se sportaša pomiče na lijevo i (malo) prema gore. Iako prednja i stražnja strana nisu međusobno simetrične, težište leži i u ravnini koja dijeli tijelo na prednji i stražnji dio (čeona ravnina). Ta ravnina prolazi približno kroz ramena, bokove i nešto ispred gležnja. Ako sportaš podigne ruku u horizontalni položaj ispred sebe, težište će se pomaknuti prema naprijed i (malo) prema gore.

Položaj težišta u ovim dvjema ravninama lako se određuje ako je tijelo u uobičajenom stojećem položaju. Mnogo je teže procijeniti vertikalnu komponentu položaja težišta tijela. Položaj težišta, kod normalnog čovjeka u anatomskom položaju, leži u horizontalnoj ravnini koja je oko 55 do 57 % ukupne visine tijela (za odraslog sportaša od 3 do 5 cm ispod pupka). S objema podignutim rukama težište će se podići za oko 5 do 6 cm. Za osobu koja ima duže noge i mišićave ruke, ramena i prsa, položaj težišta postavljen je na većoj visini nego za osobe kraćih nogu. Kod žena je položaj težišta na nešto manjoj visini nego što je kod muškaraca zbog užih ramena i širih bokova, a nalazi se na 55 % ukupne visine, dok je za muškarce na 57 %. Djeca imaju težište na većoj visini, u odnosu na svoju ukupnu visinu, zbog relativno kraćih nogu i veće glave.

Položaj će se težišta pomicati za svaki pomak segmenata tijela. Za pomak onih segmenata čije su mase veće dogodit će se i veći pomak težišta tijela. Veći će se pomak težišta tijela dogoditi za pomak nogu, nego što bi se dogodio za pomak ruku.

Kod mnogih sportskih aktivnosti, u cilju postizanja boljih rezultata, vrlo je važno uzeti u obzir položaj težišta. Na primjer, kod skokova uvis (ilustracija 3.53), atletičar postiže skok s većom visinom ako se postavi u

Ilustracija 3.53: Atletičarka nastoji imati samo jedan dio svog tijela na maksimalnoj visini, a sve ostale dijelove na minimalnoj visini.

takav položaj koji mu osigurava veću visinu jednog njegovog dijela tijela. Kad je skakač odskočio, na njega djeluje samo sila teže (zanemarimo mali utjecaj zraka). Time je putanja težišta određena te je nakon odskoka više nije moguće mijenjati. Mijenjajući položaj ruku, nogu, glave i trupa, položaj težišta će se mijenjati u odnosu na jednu odabranu točku atletičara. Međutim, u odnosu na površinu tla položaj težišta ostaje na istim mjestima kao da se položaji segmenata nisu mijenjali. To znači da, ako se jedan ili više segmenata pomakne prema dolje, to se drugi segmenti nužno postavljaju prema gore. Kod skoka uvis važno je da se, u odgovarajućim trenucima, samo pojedini segmenti tijela nađu na najvišoj mogućoj visini. Stoga atletičar, da bi točno određeni dio svoga tijela doveo na najveću moguću visinu, sve ostale segmente tijela, u odabranim trenucima, postavlja u najniže položaje.

Slična ponašanja možemo uočiti i kod drugih skokova. Na primjer, ako košarkaš želi spriječiti postizanje koša, podići će samo jednu ruku jer tako vrhom ruke postiže najveću visinu. Iako se podizanjem obiju ruka uvis postiže manja visina vrhovima ruka, odbojkaši to ipak rade jer moraju prekriti veću površinu kroz koju lopta može proći.

Gustoća mase

Srednju gustoću mase nekog tijela definiramo kao omjer njegove mase i volumena

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{3.82}$$

Tijela za koja je srednja gustoća mase jednaka gustoći mase svakog njegovog dijela nazivaju se homogenim tijelima. Preciznije, gustoću mase trebalo bi nazivati volumskom gustoćom mase zato što nije rijedak slučaj korištenja površinske gustoće mase ili linijske gustoće mase. Mi ćemo ovdje pod pojmom gustoće uvijek podrazumijevati volumsku gustoću mase.

Već smo spomenuli kako je, kod normalnog sportaša, gustoća mišićnog tkiva i kostiju nešto veća od gustoće vode (gustoća vode je 1000 kg m^{-3}), dok je za masno tkivo nešto manja od te vrijednosti.

Tijela jednakog volumena koja imaju veću masu imaju i veću gustoću. Suprotno tome, tijela jednake mase koja imaju veći volumena imaju manju gustoću.

Jednadžba gibanja sustava tijela

Upoznali smo Drugi Newtonov zakon gibanja za točkasto tijelo koji nam daje jednadžbu gibanja tog tijela

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \stackrel{m=konst.}{=} m\vec{a}. \tag{3.83}$$

Tom se jednadžbom određuje akceleracija tijela kao funkcija ukupne sile na tijelo i mase tijela (u gornjoj jednadžbi pretpostavljeno je da tijelo ne mijenja svoju masu, $m = konst.$).

Pokazuje se kako za sustav čestica vrijedi jednadžba istog matematičkog oblika, ako akceleraciju sustava zamijenimo akceleracijom središta mase danog sustava, a masu ukupnom masom sustava. Za količinu gibanja cijelog sustava podrazumijevamo vektorski zbroj pojedinih količina gibanja materijalnih točaka koje sačinjavaju taj sustav

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i. \tag{3.84}$$

Nakon kraćeg matematičkog izvoda za jednadžbu gibanja sustava čestica dobije se sljedeći izraz

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \overset{m=konst.}{=} m\vec{a}_{cm}. \tag{3.85}$$

Sila $\vec{F}$ predstavlja vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na sustav.

Zakon očuvanja količine gibanja

Iz jednadžbe gibanja lako se uvjeriti kako za sustave na koje nema djelovanja vanjskih sila ili je vektorski zbroj svih vanjskih sila jednak nuli, ukupna količina gibanja sustava ostaje nepromijenjena

$$\vec{F} = 0 \Longrightarrow \vec{P} = konst., \tag{3.86}$$

tj. ukupna količina gibanja u nekom početnom trenutku jednaka je ukupnoj količini gibanja sustava u bilo kojem kasnijem trenutku. Štoviše, kako je dana jednadžba gibanja vektorska jednažba, to je neka komponenta ukupne količine gibanja konstantna ako je odgovarajuća komponenta ukupne sile na sustav jednaka nuli

$$F_x = 0 \Longrightarrow p_x = konst. \tag{3.87}$$

Jednako vrijedi i za ostale komponente.

Zakon očuvanja količine gibanja vrlo je koristan pri rješavanju mnogih problema u biomehanici. Pomoću njih često možemo, nerješavajući jednadžbe gibanja, matematički jednostavnije odrediti ponašanje nekog sustava. Na primjer, kod svih sportova gdje se događaju sudari između dvaju ili više tijela (biljar, tenis, skokovi i mnogi drugi).

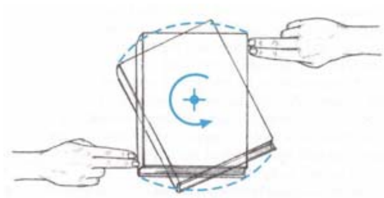
Primjeri

1. U kojem će od sljedećih slučajeva košarkaš, prilikom odskoka uvis, vrhovima prstiju ruke doseći najveću visinu: i) samo jednom rukom u položaju vertikalno prema gore, ii) s obje ruke u vertikalnom položaju prema gore, iii) s obje ruke u vertikalnom položaju prema gore dok su noge skupljene u koljenima? Pretpostavite kako je odskok tijekom dodira sa tlom u svim slučajevima bio jednak.

   Ako je odskok tijekom dodira sa tlom u svim slučajevima bio jednak, tada je i maksimalna visina središta mase košarkaša jednaka za sve slučajeve. No, budući je položaj središta mase na najnižem položaju relativno na tijelo sportaša kao cjelinu kada je samo jednom rukom vertikalno prema gore, to mu je i maksimalna visina dosega prstima ruku u tom slučaju.

3.2.5 Rotacijska gibanja

Uvodeći Newtonove zakone gibanja upoznali smo pojmove sile i mase. Uz poznavanje sila koje djeluju na neko tijelo i svojstava tog tijela, u stanju smo predvidjeti njegovo gibanje. Pri razmatranju utjecaja svake pojedine sile na tijelo uzimali smo u obzir samo iznose i orijentacije sila koja djeluju na tijelo. Nismo razmatrali utjecaj hvatišta sile na gibanje tijela. To je bilo zbog toga što smo tijela u našim primjerima shvaćali točkastima, tj. materijalnim bezdimenzionalnim točkama. Uvodeći pojam sustava čestica, tj. krutog tijela određenog volumena moramo razmišljati i o utjecaju hvatišta sila. Na primjer, ako na neko tijelo u mirovanju djeluju dvije sile istog iznosa, a suprotne orijentacije, koristeći Prvi Newtonov zakon, rekli bismo kako će tijelo ostati u stanju mirovanja. No, to vrijedi samo za točkasta tijela. Za tijela koja zauzimaju određeni volumen može se dogoditi promjena stanja gibanja. Na primjer, ako djelujemo parom sila istog iznosa i suprotne



Ilustracija 3.54: Parom se sila ostvaruje rotacija krutog tijela.

orijentacije (ilustracija 3.54) na knjigu na stolu tako da je hvatište jedne sile na jednom rubu, a druge na drugom rubu knjige, uočit ćemo stvaranje rotacijskog gibanja knjige.

Ovakva je gibanja krutih tijela moguće rješavati primjenom Newtonovih zakona gibanja za materijalne točke, rastavljajući dano kruto tijelo na sastavne dijelove i uvodeći unutarnje sile između tih dijelova danog tijela. Međutim, takav pristup je vrlo kompleksan, te se stoga definiraju nove fizikalne veličine koje su važne u opisu rotacijskih gibanja. Te veličine su moment sile, moment inercije i moment količine gibanja tijela. Koristeći te veličine, iz Newtonovih zakona gibanja za materijalne točke dobije se jednadžba gibanja za rotaciju krutog tijela koja ima matematički oblik jednak obliku jednadžbe gibanja materijalne točke.

Moment sile

Fizikalnu veličinu kojom izražavamo nastojanje sile da promjeni rotacijsko gibanje nekog krutog tijela nazivamo **momentom sile**. Moment sile $\vec{M}$ kojeg uzrokuje sila $\vec{F}$ na neko kruto tijelo definira se kao vektorski produkt vektora $\vec{r}$ koji označava hvatište sile u odnosu na os rotacije i dane sile

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.88}$$

Moment sile je, dakle, vektorska veličina čiji iznos i orijentaciju određujemo pravilom vektorskog produkta (vektorski množenje dvaju vektora već smo uveli). Iznos momenta sile jednak je produktu iznosa sile i udaljenosti hvatišta sile od osi rotacije, te sinusa kuta kojeg zatvaraju vektor sile i vektor položaja hvatišta sile

$$M = Fr \sin\theta, \tag{3.89}$$

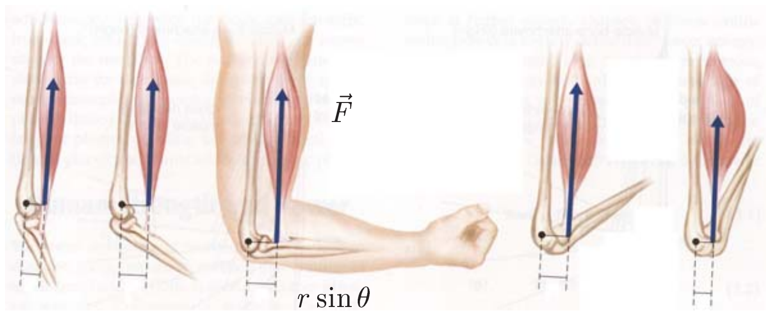
gdje se član $r \sin\theta$ naziva krak sile.

U primjerima kod kojih se rotacija odvija oko jedne određene osi, orijentacija momenta sile može se izraziti uvodeći samo '+' i '−' predznake. Mjerna jedinica za moment sile je jedan newton-metar, 1 Nm.

Iz definicije momenta sile vidimo kako je iznos momenta sile jednak nuli kad god je hvatište sile na osi rotacije, ili kad vektor sile i vektor položaja hvatišta sile leže na istom pravcu.

Primjer iz svakodnevnog života je otvaranje i zatvaranje vrata. Ako jednakim iznosom sile djelujemo na vrata, jednom vrlo blizu osi rotacije, a drugi put na rubu vrata koji je najudaljeniji od rotacijske osi, uočavamo kako se stvara kutna akceleracija bitno manjeg iznosa kad je hvatište sile vrlo blizu osi rotacije.

U sportskim aktivnostima mnoštvo je primjera rotacijskih gibanja. Mišićne sile preko vezivnih tkiva djeluju na kosti (ilustracija 3.55). Kako je položaj hvatišta tih sila na nekoj udaljenosti od osi rotacije, tj. od središta zglobova, a pravac na kojemu leži vektor sile ne poklapa se s vektorom hvatišta sile, to postoji moment mišićnih sila, pa time i ostvarivanje rotacijskih gibanja oko zglobova. Uz ove primjere, mnogi su drugi primjeri u sportskim aktivnostima. Kod borilačkih vještina vrlo je čest slučaj ostvarivanja velikih iznosa momenta sile odabirom prikladnog hvatišta sile kojom želimo ostvariti određeni pokret.



Ilustracija 3.55: Moment sile bicepsa. Krak sile mišića ima najveću vrijednost kad je spojnica osi vrtnje i hvatišta sile okomita na pravac sile, pa time i moment mišićne sile.

Jednadžba rotacije krutog tijela

Kruto tijelo možemo zamisliti kao sustav sačinjen od više točkastih tijela masa m_i. Svaka od tih masa nalazi se na nekoj udaljenosti od osi rotacije r_i. Može se pokazati kako za kruto rotirajuće tijelo vrijedi sljedeća jednadžba koja povezuje moment sile $\vec{M}$ i kutnu akceleraciju krutog tijela $\vec{\alpha}$

$$\vec{M} = (\sum_i m_i r_i^2)\vec{\alpha}, \tag{3.90}$$

gdje indeks i ide preko svih čestica koje sačinjavaju dano tijelo. Veličinu u zagradama nazivamo momentom inercije tijela u odnosu na danu os rotacije

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{3.91}$$

U tom se slučaju gornja jednadžba zapisuje u sljedećem obliku

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}. \tag{3.92}$$

Gornja jednadžba, koja opisuje rotaciju krutog tijela oko neke dane osi, podsjeća na matematički zapis Drugog Newtonovog zakona pa se često i naziva Drugim Newtonovim zakonom rotacije krutog tijela. Naime, umjesto ukupne sile na materijalnu točku u jednadžbi stoji ukupni moment sile, umjesto akceleracije kutna akceleracija, a umjesto mase moment inercije tijela.

Vidimo kako gibanje krutog tijela, koje se općenito sastoji od translacijske i rotacijske komponente, možemo opisati dvjema jednadžbama gibanja: jednadžbom gibanja za translaciju jedne njegove odabrane točke (središta mase) i jednadžbom gibanja za rotaciju oko osi koja prolazi kroz tu odabranu točku

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm}, \qquad \vec{M} = I\vec{\alpha}. \tag{3.93}$$

Iz gornjih jednadžbi gibanja vidimo kako će akceleracija središta mase tijela biti jednaka nuli kad god je zbroj svih vanjskih sila jednak nuli. Na sličan način, ako je zbroj momenata svih vanjskih sila jednak nuli, to će i kutna akceleracija tijela oko odgovarajuće osi biti jednaka nuli.

Moment inercije

Moment inercije

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{3.94}$$

je fizikalna veličina koja opisuje svojstvo tijela kod rotacijskih gibanja. Ona ovisi o raspodjeli mase tijela u odnosu na os rotacije. Ako imamo samo jedno točkasto tijelo mase m koje rotira oko dane osi na udaljenosti r od osi rotacije, tada je moment inercije toga tijela oko te osi dan sljedećim izrazom

$$I = mr^2. \tag{3.95}$$

Za mnoga druga geometrijska tijela moguće je izračunati njihove momente inercije oko točno određne osi rotacije. Tako, na primjer, moment inercije pune kugle mase m i radijusa r oko osi koja prolazi središtem kugle je

$$I = \frac{2}{5}mr^2, \tag{3.96}$$

a za tanki štap duljine l i mase m oko osi koja prolazi središtem mase i okomito na duljinu štapa dobije se sljedeći izraz

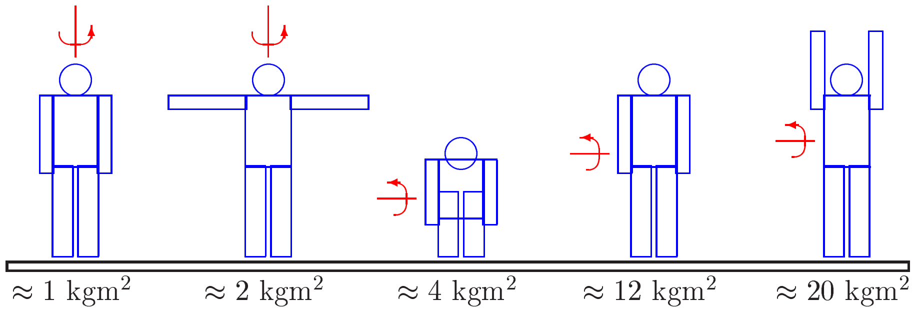
$$I = \frac{1}{12}ml^2. \tag{3.97}$$

Za tijela čiji su momenti inercije poznati za jednu rotacijsku os, lako se odredi moment inercije za bilo koju drugu os rotacije koja je paralelna poznatoj osi. Naime, može se pokazati kako vrijedi tzv. teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem)

$$I = I_{cm} + md^2, \tag{3.98}$$

gdje je I_{cm} moment inercije u odnosu na os koja prolazi kroz središte mase tijela, m njegova masa, a I je moment inercije u odnosu na os rotacije koja je za d udaljena od paralelne osi koja prolazi središtem mase tijela. Moment inercije I_{cm}, u odnosu na neku os rotacije koja prolazi kroz središte mase tijela, naziva se i vlastitim momentom inercije.

Već smo smomenuli kako postoji više modela kojima se određuju mase segmenata tijela (na primjer, Zatsiorsky i Seluyanov). Takvi modeli daju i druga svojstva segmenata, kao što su položaji težišta i njihovi momenti inercije. To ćemo upoznati nešto kasnije u tekstu. Međutim, ponekad su važne samo procjene vrijednosti momenta inercije tijela sportaša u nekim određenim položajima, kao na ilustraciji 3.56. Na primjer, najmanji mo-



Ilustracija 3.56: Vrijednosti momenta inercije ljudskog tijela.

ment inercije sportaša ostvaruju se oko vertikalne osi kada su ruke i noge postavljene uzduž i što bliže osi rotacije. Vrijednosti momenta inercije u tim položajima je oko 1 kgm^2. Moment inercije sportaša u odnosu na istu os rotacije s okomito ispruženim rukama povećava se i do dva puta u odnosu kad su ruke postavljene uz tijelo. Najmanja vrijednost momenta inercije u odnosu na poprečnu os rotacije ostvaruje se s potpuno sklupčanim tijelom, a iznosi oko 4 kgm^2, a s ispruženim tijelom povećava se i do tri puta. Maksimalni moment inercije oko poprečne osi ostvaruje se s ispruženim tijelom i rukama vertikalno prema gore postižući vrijednost i do 20 kgm^2.

Moment količine gibanja

Upravo zbog matematičke sličnosti jednadžbi gibanja za translaciju i rotaciju krutog tijela, uvodi se **moment količine gibanja** $\vec{L}$ kao produkt momenta inercije I i kutne brzine $\vec{\omega}$ krutog tijela (analogno količini gibanja, $\vec{p} = m\vec{v}$)

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \tag{3.99}$$

čime se postiže dodatna potvrda te analogije. Naime, ukupni moment sila i moment količine gibanja tijela mogu se povezati sljedećom jednadžbom

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \overset{I=konst.}{=} I\vec{\alpha}. \tag{3.100}$$

Moment količine gibanja je vektorska veličina, a mjerna jedinica u SI-sustavu je kgm^2/s.

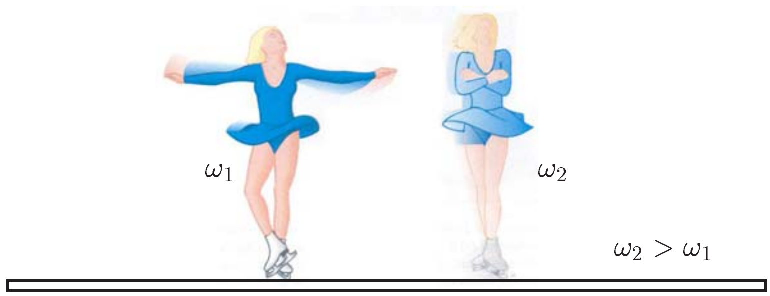
Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Iz gornje jednadžbe 3.100 lako zaključujemo kako moment količine gibanja nekog tijela ostaje nepromijenjen kad god je zbroj momenata vanjskih sila jednak nuli

$$\vec{M} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = konst., \tag{3.101}$$

tj. moment količine gibanja u nekom početnom trenutku je jednak momentu količine gibanja u bilo kojem kasnijem trenutku. Ovaj se iskaz naziva zakonom očuvanja momenta količine gibanja.

Primjeri kod sportskih aktivnosti u kojima se može vidjeti valjanost zakona očuvanja momenta količine gibanja su kod umjetničkih klizanja na ledu (ilustracija 3.57), skokova u vodu, u gimnastici, te mnogim drugima. Kli-



Ilustracija 3.57: Klizačica na ledu u položajima s ispruženim i sklupljenim rukama. Iznos kutne brzine dok je rukama uz tijelo je veći od iznosa s raširenim rukama.

začica koja se postavi u položaj s minimalnim momentom inercije povećava iznos svoje kutne brzine proporcionalno smanjenju momenta inercije

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_1}{I_2}. \tag{3.102}$$

Dodatak uz moment količine gibanja. Za materijalnu točku koja rotira oko neke osi i koja, u nekom trenutku, ima količinu gibanja $\vec{p}$, možemo odrediti i moment količine gibanja $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{3.103}$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja materijalne točke u odnosu na os rotacije. Ovaj izraz je jedan od izraza kojima se povezuju fizikalne veličine rotacije s fizikalnim veličinama translacije. Često se uvodi kao definicija momenta količine gibanja za materijalnu točku, pa se kratkim matematičkim izvodom može dobiti izraz za moment količine gibanja $\vec{L} = I\vec{\omega}$ nekog krutog tijela, koji smo mi već uveli kao definiciju.

Impuls momenta sile

Kod razmatranja uzroka promjene gibanja točkastog tijela uveli smo pojam impulsa sile kao produkt sile i vremenskog intervala, a iz jednadžbe gibanja točkastog tijela vidjeli smo kako je impuls sile jednak promjeni količine gibanja.

Analogno, kod rotacijskih gibanja krutog tijela definiramo **impuls momenta sile** (ili rotacijski impuls) kao produkt momenta sile i vremenskog intervala, $\vec{M}\Delta t$. Iz jednadžbe rotacijskog gibanja krutih tijela slijedi kako je impuls momenta sile jednak promjeni momenta količine gibanja

$$\vec{M}\Delta t = \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1. \tag{3.104}$$

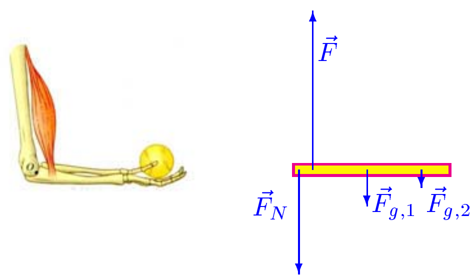
U mnogim sportskim aktivnostima sportaši nastoje stvoriti što je moguće veće promjene momenta količine gibanja tijela, jednog dijela tijela, ili opreme kojima se služe. Gornja jednadžba ukazuje kako će se dogoditi veća promjena momenta količine gibanja za veće iznose momenta sile i duže trajanje tog momenta sile. Povećanje iznosa momenta sile može se izvršiti povećanjem udaljenosti hvatišta sile od osi rotacije, dok produljenje vremenskog intervala, za koji djeluje moment sile, nije jednostavno izvesti.

Razmotrimo kako gimnastičarka na tlu stvara vrtnju oko uzdužne osi koja prolazi vrhom stopala jedne njene noge. Gimnastičarka će stopalom druge noge gurati tlo kako bi postigla uvjete za djelovanje sile trenja koja stvara moment sile oko uzdužne osi. To stopalo mora biti na dovoljno velikoj udaljenosti od drugog stopala kako bi se povećala vrijednost momenta sile trenja. Ako je moment inercije gimnastičarke malen, tada će ona za kratko vrijeme imati veliki iznos kutne brzine zbog čega će vrlo brzo morati prestati odgurivati tlo. Trajanja vremenskog intervala, za koji će postojati moment sile, gimnastičarka može produljiti povećanjem momenta inercije svoga tijela. Na taj način ona neće u počecima imati velike vrijednosti kutne brzine čime joj se produljuje vrijeme trajanja djelovanja momenta sile. Nakon što se prestane odguravati nogom o tlo, ona može ponovno smanjiti moment inercije i povećati svoju kutnu brzinu.

Bacači diska koriste sličan pristup. U početku svoje tijelo postavljaju u takve oblike u kojima imaju veće vrijednosti momenta inercije, a u trenutku izbačaja manje. Općenito, u svim sportskim aktivnostima, kod kojih je cilj stvoriti velike iznose kutne brzine rotacije, sportaši imaju velike vrijednosti momenta inercije tijekom postojanja momenta sile kako bi se produljilo vrijeme trajanja promjene momenta količine gibanja. Nakon toga se sportaši postavljaju u takve položaje u kojima imaju najmanje vrijednosti momenta inercije, a time najveće iznose kutnih brzina.

Primjeri

1. Sportaš drži loptu mase 0.5 kg u šaci dok mu je podlaktica u horizontalnom položaju. Pretpostavite kako je mišić bisepsa vezan za podlakticu na mjestu koje je 3 cm od središta lakatnog zgloba, a da se središte lopte nalazi 35 cm od središta lakta. Pretpostavite kako je masa podlaktice skupa sa šakom 2 kg, a da se težište nalazi na udaljenosti 20 cm od zgloba lakta. Odredite iznos sile u mišiću bicepsa i iznos sile pritiska u zglobu lakta.



   Kako podlaktica ne vrši rotaciju, to iz jednadžbe za rotaciju krutog tijela vidimo kako zbroj svih momenata oko neke zamišljene osi rotacije mora biti jednak nuli. Za os rotacije uzmimo os koja prolazi kroz središte zgloba lakta. U tom slučaju sila mišića bicepsa stvara moment u pozitivnoj orijentaciji, a sila teže podlaktice i lopte stvaraju momente u suprotnoj orijentaciji. Sila pritiska u laktu ne stvara moment jer joj je hvatište točno na osi rotacije. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} M - M_1 - M_2 &= 0 \\ Fd - F_{g,1}d_1 - F_{g,2}d_2 &= 0. \end{aligned}$$

Odavde se lako odredi sila u mišiću bicepsa

$$F = \frac{(2 \text{ kg})(9.8 \text{ ms}^{-2})(0.2 \text{ m}) + (0.5 \text{ kg})(9.8 \text{ ms}^{-2})(0.35 \text{ m})}{0.03 \text{ m}} = 187.8 \text{ N}.$$

Silu pritiska u zglobu možemo odrediti koristeći jednadžbu za translaciju krutih tijela. Naime, zglob lakta oko kojega smo pretpostavili rotaciju, nema akceleraciju. To znači kako je zbroj svih sila na sustav podlaktice, šake i lopte jednak nuli

$$F - F_N - F_{g,1} - F_{g,2} = 0$$

pa odavde dobijemo silu pritiska, $F_N = 163.3$ N.

2. Plesačice se nalaze u sljedećim položajima tijekom vrtnje oko svoje uzdužne osi (sve su u normalnom anatomskom položaju uz dane napomene):
   Ana: stoji na lijevoj nozi, dok je desnom nogom napravila abdukciju za 20^0 u kuku. Lijeva ruka joj je u horizontalnom položaju u čeonoj ravnini.
   Iva: stoji na desnoj nozi. Lijevom nogom je u koljenu napravila fleksiju pod pravim kutem i punu fleksiju podlaktica obiju ruku.
   Mia: stoji na desnoj nozi. Lijevom nogom je napravila abdukciju pod kutem od 60^0 u kuku, a ruke su joj postavljene horizontalno u čeonoj ravnini.
   Tea: stoji na objema nogama, a lijevu ruku je podigla u vertikalni položaj.
   Odredite: a) koja plesačica ima najveći moment inercije oko uzdužne osi; b) poredajte plesačice po vrijednosti momenta inercije oko uzdužne osi počevši od najveće vrijednosti; c) ako sve plesačice imaju jednaku kutnu brzinu, koja od njih ima najveći moment količine gibanja oko iste osi; d) ako sve plesačice imaju jednaku vrijednost momenta količine gibanja, koja od njih ima najveći iznos kutne brzine.

   a) Mia; b) Mia, Ana, Iva, Tea; c) Mia; d) Tea.

3. Kod utrka na kratkim stazama, je li korisnija veća ili manja fleksija u koljenu noge koja pravi rotaciju?

Korisnija je veća fleksija jer se time smanjuje moment inercije noge oko poprečne osi te, tako, povećava kutna brzina te noge.

4. Igračica odbojke skače uzrak kako bi udarila loptu. Tlo napušta bez momenta količine gibanja. Kad je zarotirala svoju ruku unaprijed kako bi udarla loptu, što se događa s nogama ako su joj trup i druga ruka ostale bez rotacije?

   Noge rotiraju sa suprotnom kutnom brzinom.

5. Skijašica je na spustu za trenutak odskočila u zrak. U tom je trenutku dobila određeni moment količine gibanja prema naprijed. Kad bi nastavila rotirati pala bi na prednju stranu svoga tijela u doskoku. U kojoj orijentaciji mora rotirati svoje ruke kako bi zaustavila rotaciju tijela?

   Mora rotirati svoje ruke s jednakom orijentacijom kao što je početna rotacija cijelog tijela.

3.3 Statika

Statika je dio mehanike krutih tijela kojom se istražuju uvjeti ravnoteže tijela.

Kažemo kako je neko tijelo u ravnoteži ako su ukupna količina gibanja i moment količine gibanja konstantni, tj.

$$\vec{P} = konst., \qquad \vec{L} = konst. \tag{3.105}$$

To znači da tijela koja su u ravnoteži ostaju u gibanju u kojemu su se našli, tj. ostaju u mirovanju, jednolikom gibanju po pravcu, ili jednolikoj rotaciji oko neke vlastite osi. Najjednostavniji oblik takvih gibanja je potpuno mirovanje. U tom slučaju nema niti translacijskog niti rotacijskog gibanja tijela, tj. kažemo kako je tijelo u statičkoj ravnoteži.

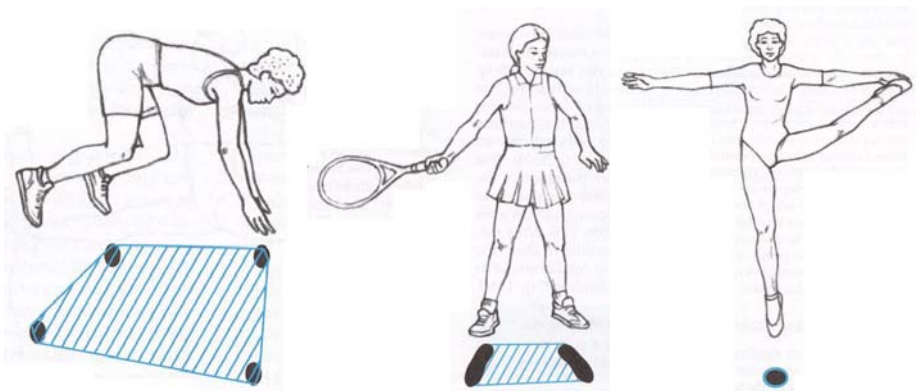
Tijelo je stabilnije ako je potrebno djelovanje sila većeg iznosa kako bi se tijelo izvelo iz stanja ravnoteže. Za tijelo za koje i najmanji iznos neke sile može uzrokovati njegov izlazak iz stanja ravnoteže kažemo kako se nalazi u labilnoj ravnoteži. Možemo uočiti različite stupnjeve stabilnosti. Na primjer, stojeći stav je u usporedbi s visom na vratilu manjeg stupnja stabilnosti jer manji iznosi sile može narušiti njegovo stanje ravnoteže. Stupanj stabilnosti ovisi o položajima hvatišta svih sila koje djeluju na dano tijelo. Pod tim silama podrazumijevamo, u prvom redu, silu teže te sve druge sile uzrokovane okolinom tog tijela.

3.3.1 Uvjeti ravnoteže

Koristeći Drugi Newtonov zakon za translaciju i rotaciju, zaključujemo kako se neko tijelo nalazi u stanju ravnoteže ako su ukupna vanjska sila i ukupni moment sile na dano tijelo jednaki nuli

$$\vec{F} = 0, \qquad \vec{M} = 0. \tag{3.106}$$

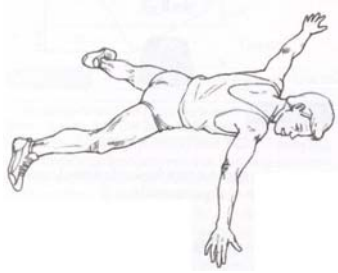
Tijela čija gibanja promatramo u sportskim aktivnostima nalaze se pod utjecajem gravitacijske sile. Stoga je važno istaknuti one čimbenike koji utječu na ravnotežu tijela koje je pod utjecajem sile teže. Na primjer, ako promatramo knjigu na stolu lako uočavamo kako je knjiga najstabilnija ako je postavljena na stol onom plohom koja ima najveću površinu. To je ujedno položaj u kojemu je težište knjige na najmanjoj visini u odnosu na površinu stola. Nadalje, ako je knjiga veće mase to će postati još stabilnijom. Zaključujemo, kako stupanj stabilnost tijela ovisi o visini težišta tijela, površini osnovice oslonca i masi tijela. Površinu osnovice oslonca nazivamo onu horizontalnu površinu koja se dobije spajajući sve vanjske točke oslonca tijela. Na ilustraciji 3.58 se mogu vidjeti različiti položaji kojima se ostvaruju



Ilustracija 3.58: Položaji sportaša s različitim stupnjevima stabilnosti.

različite površine osnovice oslonca.

Sportaši u mnogim svojim aktivnostima nastoje osigurati takav položaj koji im osigurava veći stupanj stabilnosti (na primjer hrvači, ilustracija 3.59). Nasuprot tomu, u drugim sportovima uspjeh može ovisiti o tome koliko je sportaš sposoban brzo mijenjati svoje položaje tijekom određene aktivnosti, pa sportaši nastoje biti u takvim položajima koji predstavljaju stanje manjeg stupnja stabilnosti. To je vidljivo kod sprintera u trenucima starta



Ilustracija 3.59: Hrvač u obrambenom položaju nastoji imati maksimalnu stabilnost.

(ilustracija 3.60), golmana u nogometu tijekom čekanja udarca protivničkog

Ilustracija 3.60: Položaj u trenucima starta na kratkim utrkama. Naglim pokretom ruku gubi se ravnoteža.

igrača, plivača u trenutku starta i mnogih drugih.

Ravnoteža i gibanje sportaša

Mijenjanjem položaja dijelova tijela čovjek mijenja položaj težišta te time kontrolira svoj stupanj stabilnosti, što je vrlo važno u ostvarivanju ukupnih pokreta čovjeka. Na primjer, kod običnog hoda čovjek se najprije nagne prema naprijed sve dok horizontalna komponenta položaja težišta nije ispred vrhova nožnih prstiju. Na taj se način gubi ravnoteža i počinje pad prema naprijed. U tom trenutku, postavljanjem jedne noge prema naprijed, ponovno se vraća stanje ravnoteže. Stoga, hodanje možemo shvatiti kao proces u kojem se stanje ravnoteže neprekidno gubi i vraća.

Kod sportskih aktivnosti sportaš jednom nastoji postići takve položaje kojima ostvaruje maksimalni stupanj stabilnosti točno s određenom orijentacijom, dok kod drugih aktivnosti nastoji smanjiti stupanj stabilnost, odnosno povećati svoju pokretljivost. Na primjer, hrvač u obrambenom položaju nastoji postići što je moguće veću površinu osnovice oslonca, a istovremeno najmanju moguću visinu tijela.

U nekim sportskim aktivnostima oblik osnovice oslonca određena je samo oblikom i položajem stopala, dok se kod drugih aktivnosti taj oblik može promijeniti koristeći različitu sportsku opremu. Na primjer, skijama se postiže povećanje stabilnosti prema naprijed i natrag. Kod starta kratkih utrka i plivanja, stabilnost se minimizira naglim pokretima ruku čime se postiže dobar start sportaša.

3.3.2 Dinamička ravnoteža

Kod sportskih aktivnosti sportaši su neprekidno u takvim gibanjima u kojima mijenjaju i iznos i orijentaciju brzine svog težišta te kutnu brzinu rotacije tijela. Tijekom gibanja sportaši se naginju u prikladne položaje, kako bi ostali u ravnoteži s određenim stupnjem stabilnosti. Takvu ravnotežu nazivamo **dinamičkom ravnotežom**. Naginjući se sportaš stvara prikladne vrijednosti ukupnog momenta svih sila koje djeluju na njega. Te sile su uglavnom sila teže, sila trenja s podlogom, sila otpora fluida, i druge sile kontakta s okolinom.

Budući da su jednadžbe gibanja jednostavnijeg oblika za tijela koja su u statičkoj ravnoteži, možemo postaviti pitanje, je li moguće napisati slične jednadžbe i za tijela koja su u gibanjima s promjenjivom brzinom težišta ili u rotacijskim gibanjima. Svako gibanje je relativno gibanje u odnosu na neki referentni sustav, pa je uvijek moguće naći referentni sustav u kojemu će dano tijelo biti u potpunom mirovanju, tj. u statičkoj ravnoteži. Međutim, ovdje treba paziti na činjenicu kako dane jednadžbe gibanja, i za translaciju i rotaciju krutih tijela, vrijede samo za inercijalne referentne sustave. Za sve ostale sustave koji akceleriraju u odnosu na inercijalne, dane jednadžbe gibanja nisu valjane.

Ipak, pokazuje se kako je i za neinercijalne sustave moguće napisati jednadžbe gibanja koje će imati jednaki matematički oblik kao i jednadžbe u inercijalnim referentnim sustavima. Potrebno je samo ukupnoj rezultantnoj sili na tijelo pridodati članove koji po svojoj dimenziji odgovaraju dimenziji sile, pa se takvi članovi nazivaju prividnim silama. Primjer prividnih sila su inercijalna sila zbog translacijskog ubrzanja referentnog sustava, centrifugalna sila i Corioulisova sila.

Prividne sile

Inercijalna prividna sila. Ako neko tijelo promatramo u odnosu na sustav koji ima akceleraciju $\vec{a}$, tada kažemo da na tijelo mase m djeluje **inercijalna prividna sila** $\vec{F}_i = -m\vec{a}$. Takva prividna sila ima suprotnu orijentaciju od orijentacije akceleracije danog sustava gledano iz nekog inercijalnog sustava.

Centrifugalna prividna sila. Ako želimo opisati gibanje nekog točkastog tijela mase m u odnosu na referentni sustav koji rotira kutnom brzinom ω u odnosu na neki inerecijalni sustav, tada u jednadžbu gibanja toga tijela dodajemo član kojeg nazivamo **centrifugalna prividna sila**. Iznos te prividne sile je

$$F_{cf} = m\omega^2 r, \tag{3.107}$$

gdje je r udaljenost tijela u odnosu na os vrtnje danog neinercijalnog referentnog sustava. Centrifugalna prividna sila je orijentirana radijalno od središta vrtnje, a dodaje se u jednadžbu gibanja za svako tijelo bez obzira na njegovo stanje gibanja u odnosu na odabrani neinercijalni sustav.

Corioulisova prividna sila. Ako promatrano tijelo koje ima neku brzinu u odnosu na neki rotirajući neinercijalni sustav, tada je potrebno u jednadžbu gibanja toga tijela dodati još jedan član kojeg nazivamo **Corioulisova prividna sila**. Iznos te prividne sile na tijelo mase m je dan izrazom

$$F_c = 2m\omega v_r, \tag{3.108}$$

gdje je ω kutna brzina sustava, a v_r komponenta brzine tijela u odnosu na dani sustav duž osi koja je okomita na os rotacije sustava. Ova prividna sila je okomita i na brzinu gibanja tijela u tom sustavu kao i na kutnu brzinu rotacije odabranog neinercijalnog sustava.

Primjeri

1. Skakač s motkom trči držeći motku dugačku 5 m u ruci pod kutem od 30^0 u odnosu na horizontalu. Jednom rukom drži motku za jedan njen rub, a drugom na udaljenosti 1 m od ruba. Kolikim najmanjim silama atletičar djeluje svojim rukama na motku ako je motka mase 2.5 kg i nalazi se u statičkoj ravnoteži?

   Iz uvjeta ravnoteže znamo kako zbroj svih sila te zbroj svih momenata sila na motku moraju biti jednaki nuli. Sile koje djeluju na motku dolaze od jedne i druge ruke atletičara te sile teže, a kut između svih tih sila i motke je $90^0 - 30^0 = 60^0$. Zamišljenu os rotacije slobodno biramo (npr. na rubu motke), te nakon kraćeg računa za iznos sile ruke koja djeluje prema gore dobijemo

$$F_1 = \frac{mg(l/2)}{d} = 61.25 \text{ N},$$

a za silu druge ruke koja djeluje prema dolje dobijemo

$$F_2 = F_1 - mg = 36.75 \text{ N}.$$

2. Navedite primjere u kojima se mogu uvesti prividne sile, te koje od spomenutih.

3.4 Energija

Newtonovi zakoni gibanja dozvoljavaju analiziranje različitih vrsta gibanja. Međutim, te analize ponekad mogu biti matematički vrlo komplicirane. U pojedinim se primjerima jednostavnija analiza dobije koristeći pojam energije, koja se može pojavljivati u različitim oblicima.

Pojam energije se vrlo često pojavljuje u svakodnevnim situacijama. Koristimo pojmove energije vjetra, sunčeve energije, nuklearne energije, kemijske energije, električne energije, energije plime i oseke, te mnogih drugih. Međutim, svi ti oblici energije mogu se svesti na energiju koja se pridružuje stanju gibanja tijela (kinetička energija), i druge oblike energije koji se pridružuju određenim međudjelovanjima tijela i njegove okoline (potencijalne energije).

Energija je skalarna fizikalna veličina koja je mjera određenog stanja u kojem se nalazi sustav. Energija se ne definira, ali se njeni oblici definiraju. Mjerna jedinica u SI-sustavu za sve oblike energije je jedan joule, 1 J.

3.4.1 Kinetička energija

Kinetička energija je oblik energije koji se pridružuje tijelu dok se nalazi u gibanju. Ako se tijelo nalazi u mirovanju, tada je kinetička energija toga tijela jednaka nuli.

Za točkasto tijelo mase m koje ima iznos brzine v definiramo kinetičku energiju sljedećim izrazom

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \tag{3.109}$$

Na primjer, lopta mase 0.5 kg i iznosa brzine od 10 m/s ima kinetičku energiju od 25 J.

Kinetička energija nekog krutog tijela (ili sustava koje se sastoji od više točkastih tijela) je algebarski zbroj kinetičkih energija svih sastavnih dijelova toga krutog tijela.

Već smo upoznali kako se gibanje krutog tijela može predstaviti translacijskim gibanjem njegovog težišta i rotacije oko osi koja prolazi tim težištem. Može se pokazati kako je ukupna kinetička energija krutog tijela ukupne mase m dana kao zbroj dvaju simetričnih članova, od kojih jedan uzima samo translacijske, a drugi samo rotacijske članove

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{3.110}$$

gdje je I moment inercije tijela, a ω kutna brzina rotacije.

3.4.2 Rad

Djelujući nekom silom na tijelo možemo povećati ili smanjiti kinetičku energiju tog tijela. Ako dolazi do tog povećanja ili smanjenja kinetičke energije tijela, kažemo da sila vrši prijenos energije s toga tijela na drugo tijelo. U takvom prijenosu energije kažemo da je sila izvršila **rad** nad danim tijelom. Preciznije, možemo definirati rad na sljedeći način: *rad je količina energija koja se vanjskim silama prenese na ili s tijela. Količina energije koja se prenese na tijelo je pozitivni rad, a u suprotnom negativni.*

Može se pokazati kako je promjena kinetičke energije ΔE_k nekog tijela, koja je uzrokovana nekom stalnom silom dok je tijelo napravilo pomak $\vec{d}$, jednaka produktu komponente sile F_d u smjeru pomaka te iznosa pomaka d

$$\Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = F_d d, \tag{3.111}$$

što je jednako radu te sile. Kako je produkt na desnoj strani gornje jednadžbe jednak skalarnom produktu sile i pomaka, to za rad stalne sile nad odabranim tijelom možemo pisati

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \tag{3.112}$$

Ovaj se izraz smije koristiti samo ako sila ne mijenja svoj iznos niti svoju orijentaciju. Ako dolazi do promjene iznosa ili orijentacije sile u odnosu na pomak, tada se rad određuje integralnim računom. Iz izraza 3.111 vidimo kako je kinetička energija tijela u nekom kasnijem trenutku jednaka početnoj kinetičkoj energiji uvećanoj za rad izvršen nekom silom. Na primjer, ako neko tijelo ima kinetičku energiju od 10 J, te ako se nad njim izvrši rad od 4 J, tada to tijelo ima kinetičku energiju od 14 J.

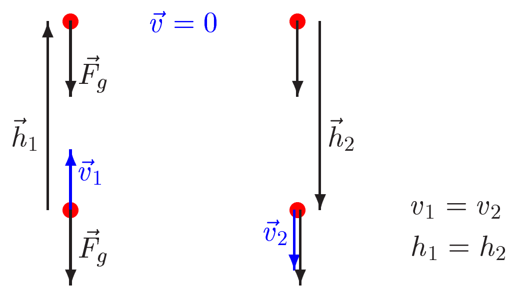
Rad je skalarna fizikalna veličina i ima istu mjernu jedinicu kao i energija, 1 J.

Promatrajmo, na primjer, bacača diska koji djeluje na disk prosječnom silom u iznosu od 1000 N dok disk napravi pomak u iznosu od 0.6 m u orijentaciji koja odgovara orijentaciji dane sile. U tom je slučaju rad bacača nad diskom (1000 N)(0.6 m) = 600 J.

Promotrimo drugi nešto kompleksniji primjer dizača utega koji leži na leđima na podu. Odredimo rad koji izvrši dizač nad utezima tijekom spuštanja utega s visine od 0.75 m i natrag. Neka je dizač upotrijebio silu u iznosu od 1000 N tijekom spuštanja, a jednako tako i tijekom dizanja utega. Budući je ukupni pomak jednak nuli, to iz definicije rada vidimo kako je i ukupni rad na utegu jednak nuli. Možemo se upitati kako je to moguće kad znamo da se dizač umara dižući i spuštajući utege. Ispravno je reći kako dizač vrši određeni rad tijekom dizanja i spuštanja utega. Međutim, tijekom punog ciklusa on nije izvršio rad nad utezima, već samo mikroradove unutar svojih mišića. Rad nad utegom tijekom gibanja prema gore je (1000 N)(0.75 m) = 750 J, a prema dolje (1000 N)(–0.75 N) = –750 J. Tijekom spuštanja utega rad je negativan (jer su sila i pomak suprotne orijentacije), a tijekom dizanja utega pozitivan (sila i pomak imaju suprotne orijentacije).

Rad sile teže

Na ilustraciji 3.61 je prikazano tijelo mase m koje je bačeno uvis nekom počet-



Ilustracija 3.61: Uz određivanje rada sile teže nad tijelom koje je u gibanju uvis i natrag.

nom brzinom $\vec{v}_1$. U trenutku izbačaja, tijelo ima kinetičku energiju $E_{k,1} = mv_1^2/2$. Tijekom gibanja prema gore, sila teže umanjuje iznos kinetičke energije tijela sve dok se tijelo na umiri u najvišoj točki. Za to vrijeme tijelo napravi pomak $\vec{h}_1$. Sila teže i taj pomak su suprotne orijentacije, te za rad te sile dobijemo

$$W_{\uparrow} = \vec{F}_g \cdot \vec{h}_1 = mgh_1 \cos(180^0) = -mgh_1. \qquad (3.113)$$

Nakon što se tijelo zaustavilo u najvišoj točki, pod utjecajem sile teže počet će padati povećavajući iznos svoje bzine. Novi pomak $\vec{h}_2$ imat će orijentaciju jednaku orijentaciji sile teže, a iznos toga pomaka je jednak iznosu pomaka $\vec{h}_1$. Rad sile teže na isto tijelo tijekom njegovog pada je

$$W_\downarrow = \vec{F}_g \cdot \vec{h}_2 = mgh_2 \cos(0^0) = mgh_2. \tag{3.114}$$

Vidimo kako je ukupni rad sile teže na tijelo koje se podigne i opet vrati na isto mjesto jednak nuli

$$W = W_\uparrow + W_\downarrow = 0. \tag{3.115}$$

U slučaju kad bismo željeli podignuti neko tijelo mase m na visinu h, tada bismo morali upotrijebiti silu koja bi bila suprotne orijentacije sili teže te bi takav rad bio pozitivan, a u slučaju spuštanja tijela negativan, dakle suprotno radu sile teže.

Rad elastične sile

Elastična sila je primjer promjenjive sile. Nakon kraćeg integralnog računa za rad te sile nad nekim tijelom, tijekom njegovog pomaka od položaja x_1 do položaja x_2, dobije se

$$W = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2. \tag{3.116}$$

Vidimo kako je rad elastične sile nad nekim tijelom od ravnotežnog položaja do nekog konačnog položaja x dano izrazom

$$W = -\frac{1}{2}kx^2. \tag{3.117}$$

Uočavamo kako je rad elastične sile negativan ako tijelo završava na mjestu koje je udaljenije od mjesta ravnoteže, a inače je pozitivan. Ukupni rad elastične sile bit će nula ako se tijelo vrati u isti položaj.

Rad sile trenja

Sila trenja na tijelo koje nije u gibanju (sila trenja u statičkim uvjetima) ne vrši rad, već samo u kinematičkim uvjetima. Znamo kako sila trenja u kinematičkim uvjetima ima orijentaciju uvijek suprotnu gibanju tijela. To znači kako je rad te sile uvijek negativan

$$W = -\mu_k F_N s, \tag{3.118}$$

gdje je s ukupni prevaljeni put tijela. Ako tijelo napravi određeni pomak i opet se vrati u isti položaj, jasno vidimo kako je tada rad sile trenja nad tim tijelom različit od nule, za razliku od rada sile teže ili elastične sile za koje je rad u tim slučajevima jednak nuli.

3.4.3 Potencijalna energija

Vidjeli smo kako je ukupni rad određenih sila (sile teže i elastične sile) jednak nuli kad god se tijelo vrati u polazni položaj, dok to ne vrijedi, na primjer, za silu trenja.

Konzervativne i nekonzervativne sile

Sile za koje je ukupni rad jednak nuli kad god se tijelo vrati u isti položaj, bez obzira kojim putem to ostvario, nazivamo **konzervativnim** (ili potencijalnim) silama. To su na primjer sila teže i elastična sila. Ostale sile nazivamo **nekonzervativnim silama** (na primjer sila trenja). Sila trenja uvijek odnosi kinetičku energiju tijela pretvarajući je u energiju kaotičnog gibanja molekula tijela i njegove okoline, koju nazivamo unutarnjom energijom tijela i okoline.

Vidjeli smo kako je rad bilo koje sile jednak razlici kinetičke energije koju tijelo ima na kraju i početku gibanja. Kad smo određivali rad sile teže i elastične sile (ili općenito konzervativnih sila), vidjeli smo kako se rad tih sila može napisati i kao razlika jedne druge veličine koja ovisi samo o položaju tijela. Tu veličinu nazivamo potencijalnom energijom dane sile. Na primjer, to su gravitacijska potencijalna energija i elastična potencijalna energija. U stvari, ne definira se potencijalna energija određene sile, već samo njena promjena ΔE_p, i to kao negativna vrijednost rada koji se izvrši danom silom

$$\Delta E_p = -W. \tag{3.119}$$

To znači kako imamo slobodu izbora vrijednosti potencijalne energije u nekom položaju. Obično se bira nula vrijednost potencijalne energije u položaju koji se prirodno nameće.

Gravitacijska potencijalna energija

Za gravitacijsku potencijalnu energiju (ili potencijalnu energiju sile teže, u primjerima koje ćemo izučavati) dobijemo

$$E_{p,g} = mgh, \tag{3.120}$$

gdje h označava visinu u odnosu na neku referentnu razinu, na kojoj je odabrana nulta vrijednost gravitacijske potencijalne energije.

Na primjer, potencijalna energija skakača mase 70 kg na skijaškim skokovima u trenutku odskoka s rampe koja je na visini od 90 m iznad minimalne točke doskočne staze je 61740 J. Za nultu razinu potencijalne energije izabrali smo podnožje staze.

Elastična potencijalna energija

Na sličan način, kao kod određivanja gravitacijske potencijalne energije, možemo odrediti i elastičnu potencijalnu energiju

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}kx^2, \tag{3.121}$$

gdje smo za nultu vrijednost potencijalne energije odabrali ravnotežni položaj elastične sile.

U sportskim aktivnostima energija sportaša i sportske opreme sastoji se od energije koju imaju zbog svog gibanja (kinetička energija), svog položaja u odnosu na odabranu nultu razinu (gravitacijska potencijalna energija) i deformacije elastičnih tijela (elastične potencijalne energije). Kod skokova s motkom (ilustracija 3.62) koristi se elastičnost motke. Atletičar

Ilustracija 3.62: Kod skoka s motkom atletičar koristi elastična svojstva motke.

svoju kinetičku energiju radom pretvara u potencijalnu energiju motke koja kasnije prelazi u potencijalnu gravitacijsku energiju atletičara.

Na primjer, elastična potencijalna energija tetive koja se rastegne za 5 mm, ako joj je koeficijent elastičnosti 10000 N/m, je 0.125 J.

3.4.4 Veza rada i energije

Već iz definicije rada i prvog uvođenja pojma energije uočavamo njihovu vezu. Energiju možemo shvatiti kao sposobnost tijela da izvrši rad, a rad kao količinu energije koja pređe s jednog tijela ili sustava na drugi kad međudjeluju nekom silom. Pokazatelj njihove veze je i zajednička mjerna jedinica, 1 J.

Uočimo sportaša koji na treningu u ležećem položaju podiže utege mase 100 kg na visinu od 70 cm. Rad nad utegom izvršen od strane sportaša je 686 J. Možemo se upitati kolika je energija utega. Kako utezi miruju u trenutku kad su u najvišoj točki, to im je kinetička energija jednaka nuli. Međutim, zbog promjene visine utega povećala im se gravitacijska potencijalna energija za iznos jednak radu koji je izvršen nad njima, 686 J. U nekom drugom primjeru, u kojem nije došlo do promjene visine tijela, već do promjene brzine, možemo se uvjeriti kako je rad izvršen nad tim tijelom jednak promjeni kinetičke energije tijela.

Iz Newtonovih zakona gibanja može se pokazati kako je rad izvršen nekom nekonzervativnom vanjskom silom nad nekim tijelom jednak promjeni ukupne mehaničke energije tijela, tj. algebarskom zbroju kinetičke energije i svih potencijalnih energija.

Nadalje, ako na neko tijelo djeluju samo konzervativne sile, tada je ukupna mehanička energija tijela nepromjenjiva, tj. ukupna mehanička energija u jednom trenutku jednaka je ukupnoj mehaničkoj u drugom trenutku. Ova izjava se često naziva zakonom očuvanja mehaničke energije.

U sportskim je aktivnostima veza rada i energije vrlo važna. Vrlo često je sva aktivnost usmjerena na promjenu brzine tijela, a promjena brzine znači promjenu kinetičke energije. Vidjeli smo kako promjenu kinetičke energije ostvarujemo u procesu rada djelujući nekom silom na tijelo. Veća promjena kinetičke energije zahtijeva isto toliki rad izvršen nad tijelom. Veća vrijednost rada ostvaruje se većim iznosom sile uz veći iznos pomaka tijela. Na primjer, kod bacanja kugle, veći rad se izvrši nad kuglom ako se iskoristi pokretljivost ramena, lakta, ručnog zgloba, pa i cijelog tijela, nego samo ručnog zgloba. S vremenom se tehnika bacanja kugle mijenjala tako što se pokušavao ostvariti maksimalni pomak kugle i maksimalni iznos sile mišića tijekom tog pomaka.

U sportu imamo mnogo primjera izvršenja rada s ciljem smanjenja kinetičke energije tijela, tj. izvršenja negativnog rada nad tijelom. Za oduzimanje energije nekom tijelu koristimo silu čija je orijentacija suprotna pomaku tijela tijekom djelovanja te sile. Za oduzimanje velikih vrijednosti kinetičke energije potrebno je izvršiti isto toliki rad negativne vrijednosti nad tijelom. To se postiže velikim iznosima sile i pomaka. Kod velikih iznosa sile može doći do ozbiljnih ozljeda. Smanjivanje iznosa sila možemo postići tako što ćemo povećati pomak tijela. Na primjer, kod doskoka dozvoljavamo savijanje nogu u koljenu. Kod gimnastičkih sportova dodatno povećanje pomaka tijela u doskoku omogućuje se koristeći odgovarajuću podlogu. Slično se koristi kod skokova uvis, skokova udalj, skokova s motkom, te mnogih drugih sportova.

3.4.5 Očuvanje mehaničke energije

Principi očuvanja (ili principi simetrije, kako se često nazivaju) igraju u fizici vrlo važnu ulogu. Reći ćemo kako je neka fizikalna veličina očuvana ako joj se ne mijenja vrijednost.

Zakon očuvanja mehaničke energije možemo iskazati na sljedeći način: *u izoliranim sustavima unutar kojih djeluju samo konzervativne sile, kinetička i potencijalna energija mogu se mijenjati, ali njihova suma, tj. ukupna mehanička energija tog sustava, ostaje nepromijenjena,*

$$\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \tag{3.122}$$

Definirali smo rad kao količinu energije koja je prenesena u, ili iz, sustava djelujući nekom vanjskom silom na taj sustav. Rad se uzima pozitivnim ako energija prelazi na sustav, a inače negativnim. Vanjska sila općenito mijenja i potencijalnu i kinetičku energiju sustava na koji djeluje, tj. mijenja mu ukupnu mehaničku energiju. To vrijedi u slučajevima kada su sile koje djeluju unutar tijela danog sustava konzervativne. U slučajevima kada unutar sustava vladaju i nekonzervativne sile, tada rad ide dijelom na promjenu mehaničke energije sustava, a ostalim dijelom na neke druge oblike energije (npr. unutarnju energiju)

$$W = \Delta E_m + \Delta E_i, \tag{3.123}$$

gdje ΔE_m predstavlja promjenu mehaničke energije sustava, a ΔE_i promjenu bilo kojeg drugog oblika unutarnje energije sustava. Primjeri nekonzervativnih sila su sila trenja i sila otpora zraka. Rad tih sila ide na promjene unutarnjih energija danih tijela u gibanju i njihovih okolina (npr. zraka, podloge, i drugih).

Veza između rada i energije te zakon očuvanja mehaničke energije vrlo su korisni u izučavanju mnogih problema iz mehanike. Sve probleme u klasičnoj mehanici možemo rješavati kroz Newtonove zakone gibanja. Međutim, kod mnogih problema jednostavnije je odrediti različite vrijednosti energije tijela, nego veličine koje su potrebne za korištenje Newtonovih zakona gibanja.

3.4.6 Snaga

Sposobnost sportaša da poveća iznose pomaka nekog tijela, na kojeg djeluje nekom silom, vrlo često mu omogućava postizanje zavidnih sportskih rezultata. Taj uspjeh zahtijeva od sportaša izvršenje velikih vrijednosti rada nad danim tijelom.

U nekim sportovima nije samo važno izvršenje velikih vrijednosti rada, već izvršenje tog rada u što je moguće kraćim vremenskim intervalima. Fizikalna veličina kojom iskazujemo takvu sposobnost nazivamo **snagom**.

Srednja se snaga definira kao omjer izvršenog rada u nekom vremenskom intervalu pa bismo je mogli shvatiti kao brzinu obavljanja rada, tj. vrijedi

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{3.124}$$

Trenutnu snagu (ili jednostavno snagu) definiramo kao omjer rada i vremenskog intervala za koji se taj rad izvrši kad vremenski interval teži u nulu

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}. \tag{3.125}$$

Koristeći definiciju za rad, izraz za snagu može se napisati i na sljedeći način

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \tag{3.126}$$

gdje je $\vec{v}$ brzina tijela nad kojim djeluje sila $\vec{F}$.

Osnovna jedinica za snagu je watt, 1 W = 1 J/s. Nekad je bila u uporabi i 1 KS $\approx$ 735.5 W (konjska snaga). Čovjek, na primjer, pri trčanju razvija snagu od oko 200 W.

U biomehanici je pojam snage jedan od važnijih pojmova. Možemo se upitati kako biramo odgovarajući stupanj prijenosa tijekom vožnje bicikla. U kojim uvjetima biramo veći stupanj, a u kojim manji stupanj prijenosa? Kod većeg stupnja prijenosa razvijamo veću silu u mišićima, ali manju kutnu brzinu pedala, dok kod manjih stupnjeva manju silu i veću kutnu brzinu pedala. Možemo primijetiti sličnu pojavu i kod trčanja birajući duljinu koraka. Kod jednakih brzina u trčanjima, ostvarenje duljih koraka moguće je uporabom većih sila i njihovom manjom učestalošću, dok kod kraćih koraka razvijamo manje sile u mišićima i veću učestalost. U kojim uvjetima treba upotrijebiti jedan pristup, a u kojim drugi, nije jednostavno odgovoriti.

Snaga koju sportaši proizvode tijekom različitih aktivnosti dolazi od mišića. Maksimalna sila koju mišić može razviti opada s povećanjem učestalosti njegove kontrakcije, a maksimalna snaga mišića događa se kad je učestalost kontrakcije na polovici maksimalne učestalosti koju mišić može razviti. To znači kako je dobro odabrati onaj stupanj prijenosa kod vožnje bicikla koji omogućuje srednju vrijednost učestalosti rada nogu. Slično vrijedi i kod trčanja. Dobro je izabrati takvu duljinu koraka kojim je učestalost rada na polovici svoje maksimalne vrijednosti.

U sportskim aktivnostima postoje i drugi razlozi istraživanja snage. Maksimalnu vrijednost snage sportaš može razviti samo za kraćih vremenskih intervala. Dizač utega (ilustracija 3.63) kod trzaja ostvaruje iznimno

Ilustracija 3.63: Dizač utega ostvaruje ogromnu snagu u kratkim vremenskim intervalima.

velike vrijednosti snage, ali samo za kratkih vremenskih intervala. Snaga koju razvija atletičar na kratkim stazama bitno je veća od snage maratonca. Maksimalna snaga koju jedan sportaš razvija opada eksponencijalno s vremenom trajanja.

Translacijske i rotacijske veličine

Na kraju ovog poglavlja navedimo usporedne definicije veličina nalaze se u tablici koje su važne u opisivanju translacijskih i rotacijskih gibanja krutog tijela. U njoj su prikazane još i jednadžbe koje povezuju te veličine.

Učite kako su sve jednadžbe i definicije za rotacijska gibanja jednakog oblika kao jednadžbe i definicije kod translacijskih gibanja.

Translacijska gibanja	Rotacijska gibanja
položaj, $\vec{r}$	kutni položaj, $\vec{\theta}$
brzina, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	kutna brzina, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
akceleracija, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	kutna akceleracija, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$
$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$	$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$
masa, m	moment inercije, I
sila, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	moment sile, $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$
količina gibanja, $\vec{p} = m\vec{v}$	moment količine gibanja, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
rad, $W = \langle\vec{F}\rangle \cdot \Delta\vec{r}$	rad, $W = \langle\vec{M}\rangle \cdot \Delta\vec{\theta}$
kinetička energija, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetička energija, $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
snaga, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	snaga, $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Tablica 3.6: Usporedne veličine i jednadžbe kod translacijskih i rotacijskih gibanja.

Primjeri

1. Kolika je kinetička energija translacijskog gibanja diska mase 2 kg i brzine 20 m/s?

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 400 \text{ J}.$$

2. Koje tijelo ima veću kinetičku energiju, tijelo mase 5 kg i brzine 4 m/s ili tijelo mase 6 kg i brzine 3 m/s?

   Tijelo mase 5 kg ima energiju u iznosu od 40 J, a drugo tijelo 27 J.

3. Dizač utega trzajem je podigao utege mase 100 kg. Utezi su pomaknuti sa tla do visine 2 m u samo 0.5 sekundi. Kolika je prosječna snaga dizača utega tijekom podizanja?

   Rad koji je izvršen jednak je promjeni gravitacijske potencijalne energije (promjena kinetičke energije je nula jer su utezi mirovali na tlu i dok su dignuti) $\Delta E_p = mgh = 1960$ J. Tada je srednja snaga (1960 J)/(0.5 s) = 3920 W.

Poglavlje 4

BIOMEHANIČKA MJERENJA

Mnoga biomehanička istraživanja u vrhunskom sportu zasnivaju se na eksperimentalnom radu koji iziskuje korištenje modernih tehnologija. Više nisu dovoljna samo iskustva trenera i sportaša kako bi se procijenili nedostaci u tehničkoj realizaciji gibanja. Stoga se sve češće upotrebljavaju moderne tehnologije i metode koje omogućavaju objektivniji uvid kinematičke i kinetičke strukture gibanja. U biomehanici sporta provode se analize na osnovi antropometrijskog, kinematičkog, kinetičkog i elektromiografskog mjerenja. Podaci dobiveni tim mjerenjima služe u procjenjivanju efikasnosti sportske tehnike, u ustvrđivanjima uzroka sportskog ozljeđivanja, u programiranju procesa trenerinja i drugih. Ponekad su podaci mjerenja pogodni za interpretaciju u istom obliku u kakvom su i dobiveni u procesu mjerenja. No, mnogo je češća uporaba tih podataka u kompleksnim modeliranjima, koja su opisana u sljedećem poglavlju.

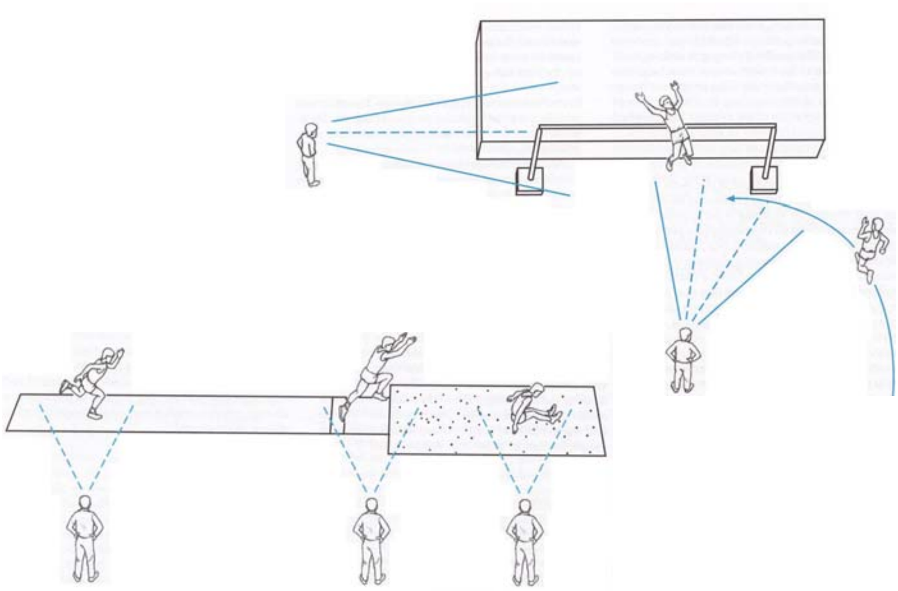
4.1 Planiranje mjernog postupka

Bez obzira o kojim se mjerenjima radi nužno je **planiranje** i priprema svih elemenata mjerenja. Nije dovoljno tek promatrati neku sportsku aktivnost i izmjeriti neku fizikalnu veličinu. Mjerenje treba isplanirati unaprijed pazeći na sljedeća pitanja: koju sportsku aktivnost želimo izučavati, tko je osoba čiju aktivnost želimo izučavati, pod kojim se uvjetima nalazi osoba ili predmet izučavanja, mjesto događanja sportske aktivnosti, što točno promatrati i mjeriti, kako se postaviti za izvođenje takvih mjerenja te definirati točan cilj mjerenja.

Osoba čija se aktivnost želi izučavati može biti vrhunski sportaš, amaterski sportaš ili neka druga osoba. Ako se pristupa vrhunskom sportašu, često je dovoljan samo manji broj mjerenja pazeći na točno određene detalje tijekom izvođenja njegove sportske aktivnosti, dok kod promatranja određenih aktivnosti amaterskih sportaša, potrebno je mnogo više istovrsnih mjerenja.

Okruženje u kojima se izučavaju aktivnosti i vrše mjerenja određenih svojstava trebalo bi biti što je moguće više pod pažljivo kontroliranim uvjetima te što više odgovarati slici realnih uvjeta pod kojima se takva aktivnost inače izvodi. Najbolje bi bilo promatranje stvarnih sportskih natjecanja, no takvi uvjeti nisu uvijek pod najboljim nadzorom onoga tko želi vršiti zapažanja i mjerenja.

Od velike je važnosti odlučiti što točno mjeriti i kako se postaviti prilikom određenih mjerenja. Treba uočiti postoji li, na primjer, glavna ravnina u kojoj se događa dana sportska aktivnost ili se barem većina pokreta događa u toj ravnini. Ako postoji takva ravnina, onda se osoba koja promatra određenu sportsku aktivnost treba postaviti okomito na nju (ilustracija 4.1). Jedan od primjera kod kojih postoji glavna ravnina su trčanja i skok udalj.



Ilustracija 4.1: Različita mjesta promatranja kod skoka udalj i uvis.

No, čak se je i u takvim uvjetima dobro postaviti i u druge položaje.

Kod većine sportova postoji više ravnina aktivnosti pa je nužno odabrati više mjesta s kojih će ih se promatrati. Kako jedna osoba ne može istovremeno biti na više mjesta, tada se mjerenja ponavljaju. Pored izbora ravnine gledanja treba odlučiti i koliko blizu se postaviti pri takvim mjerenjima i promatranjima. Za proučavanje aktivnosti kao cjeline bolje je postaviti se na većoj udaljenosti, dok je bolje biti na manjoj udaljenosti ako se proučavaju točno specifična i ciljana svojstva.

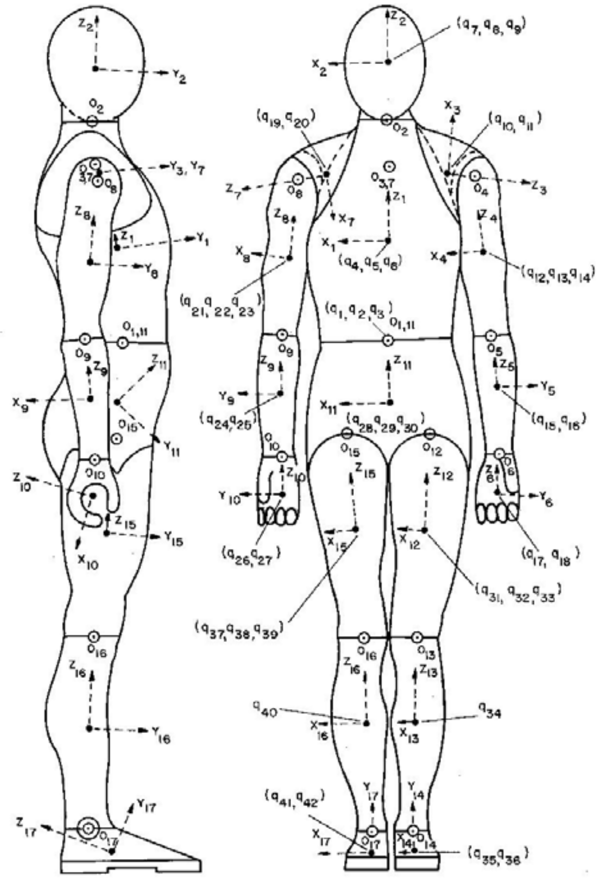
Prva bi promatranja trebala biti opća, a ostala bi se zapažanja trebala odnositi, na primjer, na određivanja točnih položaja pojedinih segmenata, vremenskih dimenzija događanja i drugih sličnih svojstava.

4.2 Antropometrijska mjerenja i biomehaničko modeliranje tijela

U cilju dobivanja fizikalnih svojstava ljudskog tijela provode se **antropometrijska** mjerenja. U biomehanici, parametri koji određuju proporcije ljudskog tijela nazivaju se **parametri segmenata**. Određivanje parametara na osnovi antropometrijskih mjera može se vršiti pomoću antropomorfnih modela. Takvi modeli koriste regresijske jednadžbe ili geometrijsku aproksimaciju kojima se segmenti ljudskog tijela oblikuju kao jednostavna geometrijska tijela. Neovisno o pristupu, antropometrijska mjerenja sportaša su nužna, a broj mjera ovisi o vrsti modela (npr. Hatze 242 mjere, Hanavan 25 mjera, Yeadon 95 mjera i drugi). Mjere se obično odnose na visinu i masu tijela, na duljine, širine, opsege i dubine dijelova tijela te na kožne nabore. Pomoću tih mjera, unutar danog modela, određuju se položaji težišta i momenti tromosti svakog segmenta te, time, položaj težišta i moment tromosti cijelog tijela sportaša.

Jedan od najkompleksnijih antropometrijskih modela je Hatzeov trodimenzionalni 17-segmentni model (ilustracija 4.2) koji dozvoljava 42 stupnja slobode gibanja tijela kao i razliku u obliku i gustoći pojedinih segmenata. Simetrija oko glavne osi pojednih segmenata pretpostavlja se samo kad je to nužno. Ovim su modelom uzete u obzir osnovne razlike između muškarca i žene u oblicima segmenata te gustoći i raspodjeli mase tijela. Sveukupna točnost modela je veća od 97 %.

Ovakva se mjerenja izvode uporabom standardnih antropometrijskih pribora.



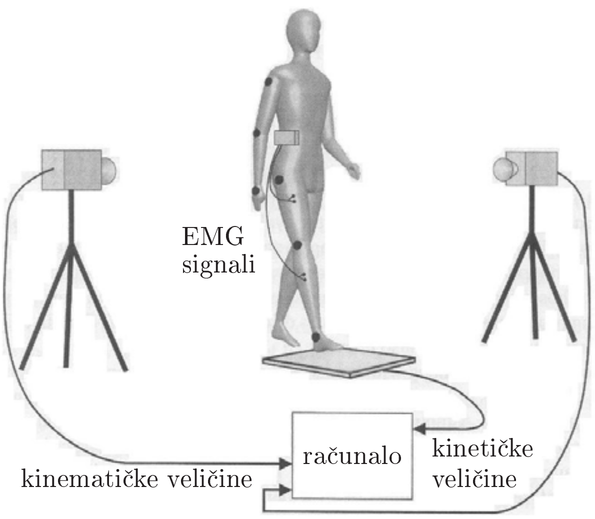
Ilustracija 4.2: Hatzeov trodimenzionalni 17-segmentni model.

4.3 Kinematička mjerenja

Kinematička se mjerenja odnose na određivanja položaja različitih točaka nekog tijela. Ako se promatra gibanje sportaša, tada se te točke nazivaju referentne točke, a njihov izbor ovisi o modelu koji se koristi u kasnijim analizama gibanja cijelokupnog tijela.

Kinematička mjerenja i njihovo pohranjivanje obavlja se kinematografskim ili optoelektroničkim uređajima. Važna svojstva ovakvih uređaja su prostorna i vremenska rezolucija, prostorni doseg, osjetljivost na osvjetljenje, broj istovrsnih zapisa i drugo. Za registraciju sportskih aktivnosti koriste se uređaji visoke vremenske rezolucije, odnosno frekvencije zapisa.

Sustav video kamera postavlja se u takav položaj kako bi se na potpuni način mogli odrediti položaji referentnih točaka tijela u različitim trenucima. Poznavajući te položaje određuju se i ostale kinematičke fizikalne veličine, npr. brzina i akceleracija. Video kamere zajedno s digitalnim pretvaračem i računalom (ilustracija 4.3) čine kinematički mjerni sustav. Cjelokupni sus-



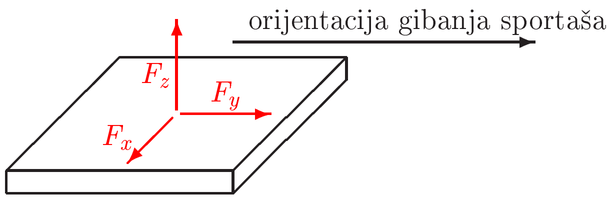
Ilustracija 4.3: Sustav video kamera s računalom čine kinematički mjerni sustav. Na ilustraciji je prikazana i platforma za mjerenja sila te uređaj za elektromiografska mjerenja.

tav daje koordinate putanje svake referentne točke. Kasnije, uporabom određenih modela tijela sportaša moguće je odrediti cjelokupnu strukturu gibanja. Jedna je kamera dovoljna za analizu dvodimenzionalnih gibanja, dok su za analize trodimenzionalnih gibanja potrebne najmanje dvije povezane video kamere.

Kratki opis uređaja i postupaka mjerenja kinetičkih veličina i EMG signala dan je u dijelu teksta koji slijedi.

4.4 Kinetička mjerenja

Sile kojima sportaš djeluje na okolinu, odnosno, po Trećem Newtonovom zakonu gibanja, reaktivne sile kojima okolina djeluje na sportaša, moguće je mjeriti uređajima za mjerenje sila. Osnovu za takva mjerenja, tzv. **kinetička** mjerenja, daju različita svojstva materijala koji se koriste u instrumentima. Takvi se uređaji mogu ugrađivati u gimnastičke ili druge sportske sprave i trenerima davati vrlo značajne informacije o veličini i promjeni sile tijekom određene aktivnosti sportaša, a nazivaju se pretvarači sila. Vrlo se često zasnivaju na električnim svojstvima materijala (npr. električnoj kapacitivnosti, električnom otporu, tzv. piezoelektričnim svojstvima i drugim). Svojstva tih materijala mijenjaju se proporcionalno sili koja djeluje na te materijale. Vrlo poznati uređaj je tzv. **platforma za mjerenje sila** (ilustracija 4.4).



Ilustracija 4.4: Vektorske komponente sile reakcije mjerene pomoću platforme za mjerenje sila.

Platforma za mjerenje sila je klasičan instrument u biomehanici koji se ugrađuje u pod laboratorija ili u odrazište, što je slučaj pri mjerenjima u atletici. Tim se instrumentima mogu mjeriti sve tri komponente sile, F_x, F_y, F_z, kao i njeno hvatište neprekidno tijekom nekog vremenskog intervala. Takva je platforma vrlo koristan uređaj u analizama pokreta kod odraza u skokovima, trčanju i drugim sličnim sportskim aktivnostima. Vrlo je čest slučaj uporabe platforme za mjerenje sila u kombinaciji s drugim mjernim instrumentima, kao što su na primjer sustav video kamera i uređaj za mjerenje elektromiografskih signala (ilustracija 4.3).

4.5 Mjerenja elektromiografskih signala

Čovjek se kreće zahvaljujući mišićima kostiju. Mišić ima sposobnost aktivne kontrakcije uz pretvorbu kemijske energije u mehaničku i toplinsku. Kontrakcijom mišića nastaje dinamička akcija, tj. pokret. Svaka mišićna stanica pri kontrakciji stvara električne promjene koje je moguće registrirati uređajem koji se naziva **elektromiograf**. Svaka mišićna aktivnost ovisi o broju i učestalosti aktivnosti mišićnih stanica, pa će i elektromiografski signal (EMG) prikazati promjene u mišićnoj aktivnosti. Kad mjerimo EMG signal, u stvarnosti mjerimo promjene električnog potencijala mišićne stanice. U miru je taj potencijal oko –90 mV, dok kod mišićne aktivnosti električni potencijal u stanici dosegne trenutnu vrijednost oko 30 do 40 mV te se opet vrati na potencijal kojeg ima u miru.

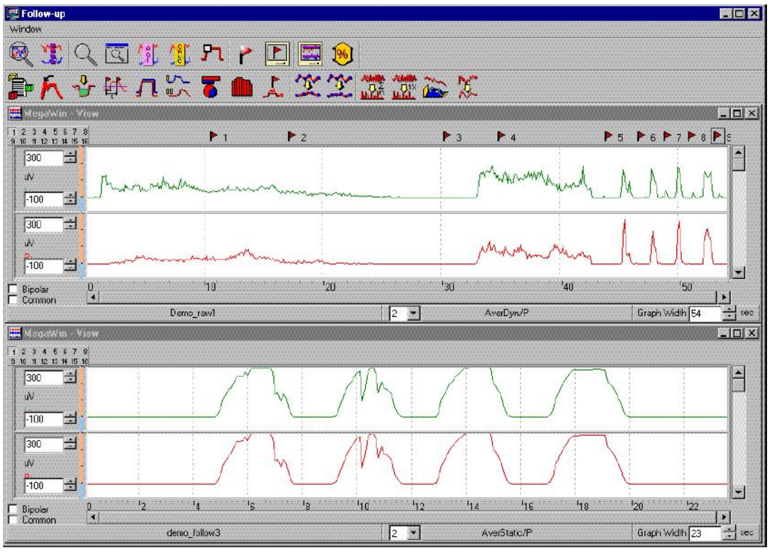
EMG se signal određuje pomoću elektroda kojima se mjeri razlika potencijala dviju točaka. Elektrode mogu biti površinske ili dubinske. U sportskoj biomehanici upotrebljavaju se površinske elektrode koje se postavljaju na kožu iznad mišića za kojega se prikupljaju podaci (ilustracija 4.5). Elektrode mogu biti jednopolne ili dvopolne. S jednopolnim elektrodama

Ilustracija 4.5: Površinske elektrode elektromiografa postavljaju se iznad mišića za kojega se prikupljaju podaci.

mjeri se razlika potencijala dane elektrode u odnosu na uzemljenu elektrodu. Ovakve elektrode imaju manu što mjere i razliku potencijala koja dolazi i iz okoline, a ne samo od mišića. Kod dvopolnih elektroda takvi problemi su izbjegnuti time što se dvjema elektrodama mjeri razlika potencijala u odnosu na uzemljenu elektrodu. Uspoređujući signale s obiju elektroda moguće je odbaciti neželjene utjecaje okoline.

Uređajima za mjerenje EMG signala, koji mogu raditi na ogromnim frekvencijama (do 2000 Hz), dobivaju se ogromne količine informacija iz kojih je vrlo teško razaznati stvarnu strukturu signala. Stoga je takve podatke (tzv. originalne ili sirove podatke, eng. raw) potrebno na poseban način obraditi i prikazati u drugim oblicima, tj. vizualizirati, što ćemo upoznati u sljedećem poglavlju. Kod analiza sportskih aktivnosti takvi podaci se reduciraju usrednjavanjima. Na ilustraciji 4.6 dan je primjer sirovih i usrednjenih EMG signala.

Već od prvih mjerenja EMG signala pokušavala se spoznati točna veza između mjerenih EMG signala i mišićnih sila. Iako još uvijek nema dobrog



Ilustracija 4.6: Primjer sirovih i usrednjenih elektromiografskih signala.

modela koji bi dao tu vezu, može se zaključiti kako postoji linearna proporcionalnost između izmjerenog EMG signala i odgovarajućeg iznosa mišićne sile. Konstanta proporcionalnosti ovisi o mnogim parametrima, kao što su na primjer duljina aktivnog mišića, položaji i vrste elektroda koje se upotrebljavaju u mjerenjima te o drugim parametarima.

Detaljniji opis rada EMG uređaja, platforme za mjerenje sila te drugih uređaja koji se koriste u biomehaničkim mjerenjima izlaze iz okvira ovog udžbenika. U knjizi *Measurement of Human Locomotion* autora profesora V. Medveda [16] detaljno su i vrlo pregledno opisani uređaji i postupci biomehaničkih mjerenja.

Primjeri

1. Koristeći sobnu vagu, odredite vrijednosti okomite komponente sile reakcije podloge pri pokušajima laganih skokova. Ako ste u mogućnosti, koristite dvije sobne vage.

2. Izmjerite opsege i duljine svojih nadlaktica i podlaktica.

Poglavlje 5

MODELIRANJA I SIMULACIJE

5.1 Opći principi modeliranja

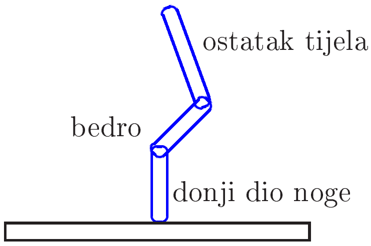
U svakodnevnom životu pojam modela koristi se za različite svrhe. Mi ćemo ovdje pod tim pojmom podrazumijevati pristup kojim se prikazuje određena fizikalna realnost. Iako možemo naići na mnoge modele koji izgledaju 'kompleksniji' od realnosti, oni su, ipak, samo jedno pojednostavnjenje fizikalne realnosti.

Možemo razlikovati dva načina stvaranja modela. Do jednih se modela dolazi dedukcijom, tj. od određenih općih znanja do primjene na konkretni primjer, a do drugih modela indukcijom, tj. polazeći od eksperimentalnih podataka do određenih općih znanja o danom sustavu. Dedukcijom se od općih znanja dolazi do jedinstvenog rješenja, a indukcijom od skupa eksperimentalnih podataka do nekog nejedinstvenog rješenja.

Svojstva koja određuju vrijednost nekog modela su njegova jednostavnost, svrsishodnost i potpunost, što je opisano u tekstu koji slijedi.

5.1.1 Jednostavnost

Jedno značajno svojstvo u razvoju modela je odabir važnih i nezaobilaznih elemenata nekog sustava kojega se nastoji prikazati nekim modelom, od onih elemenata koji bi se mogli zanemariti. Samo je po sebi jasno kako bi sva važna svojstva trebala biti uključena, a sva nevažna zanemarena. Međutim, nije uvijek moguće na jednostavan način odrediti važnost određenih svojstava. U pravilu je jednostavnostavniji model bolji, ali se time ulazi u opasnosti stvaranja modela koji je nerealan i ne opisuje sva svojstva danog sustava na ispravan način. Na primjer, ako je cilj napraviti model kojim se opisuju sile u mišićima pri skoku udalj, onda je zasigurno boja očiju nevažna. I ne samo boja očiju, već je u mnogim sportskim aktivnostima sportaše moguće zamisliti kao sustav sastavljen od manjeg broja segmenata nego što je to u stvarnosti. Na primjer, na ilustraciji 5.1 prikazan je model



Ilustracija 5.1: Prikaz jednog jednostavnog modela sportaša.

sa samo tri segmenta tijela koji je dovoljan u opisivanju sila koje se pri skoku uvis javljaju u stopalima.

5.1.2 Svrsishodnost

Modeli se mogu koristiti u stvarnim ili simuliranim situacijama. Rezultati dobiveni uporabom modela u danim situacijama mogu se upotrijebiti za proširivanje znanja o promatranom sustavu te za dobivanje vrijednosti određenih fizikalnih veličina. S druge strane, znanja o danom sustavu važna su za daljnji razvoj modela, što znači kako su razvoj modela i spoznaja o određenim svojstvima sustava u bliskoj međusobnoj vezi.

Model daje informacije samo o onim veličinama i njihovim međusobnim vezama koje su ugrađene u model. No, treba napomenuti kako model, koji daje prihvatljive rezultate, ne znači nužno da je i konceptualno ispravan.

5.1.3 Potpunost

Model nekog sustava zadovoljava potpunost u slučajevima kad su njegovi rezultati, tj. vrijednosti onih veličina koje se predviđaju tim modelom, u skladu s realnošću. Postizanje potpunosti, kao kvalitete jednog modela, može se izvršiti pomoću mjerenja onih fizikalnih veličina koje su ugrađene u model bilo kao ulazne ili izlazne veličine. Samo su u rijetkim slučajevima to veličine koje je moguće dobiti izravnim mjerenjima (npr. položaj, vanjske sile i drugo). Veličine koje odražavaju unutarnje stanje sustava vrlo je teško odrediti izravnim mjerenjima (npr. sile između nekih segmenata tijela). U tim se slučajevima pristupa mjerenjima drugih veličina koje ulaze u dani model i daju predviđanja onih veličina koje su od interesa. Na primjer, određena neizravna mjerenja mišićnih sila mogu se odrediti EMG mjerenjima.

Model će biti potpun ako se njime mogu dobiti sve informacije za koje je osmišljen i razvijen.

5.2 Vrste modela

Modeli se mogu svrstati u određene grupe na više različitih načina. Ugrubo možemo razlikovati fizikalne (ili deduktivne) modele, polufizikalne te matematičke (ili 'black-box') modele.

Fizikalni modeli su razvijeni na osnovi određenih znanja o promatranom sustavu. Prednost takvih modela je u tome što daju jedinstvene rezultate, a njihova slaba točka je teškoća izbora pojednostavnjenja. Postoji nekoliko takvih modela od kojih je svaki razvijen za određenu svrhu (npr. model skoka udalj, skoka uvis te mnogih drugih sportskih aktivnosti).

Polufizikalni modeli su, također, zasnovani na znanju. No, sustav koji se izučava je kompleksan pa se ide na dodatne matematičke pretpostavke. Primjeri takvih modela su modeli kojima se izučavanju sile između kostiju sportaša kod mnogih sportskih aktivnosti.

Matematički modeli su sastavljeni od skupa matematičkih jednadžbi koje nisu izabrane na osnovi znanja o sustavu, već samo tako kako bi najbolje povezivali vrijednosti ulaznih i izlaznih veličina.

5.3 Razvoj modela

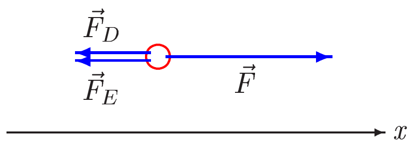
Znanstveni se pristup u procesu razvoja nekog modela sastoji od nekoliko povezanih aktivnosti. Početak se toga procesa sastoji od uočavanja i mjerenja određenih fizikalnih veličina. Nakon uočavanja i mjerenja slijedi opis te razvoj teorije koja će dati predviđanja ponašanja danog sustava. Kao sljedeća aktivnost u procesu razvoja modela je uspoređivanje predviđenih vrijednosti odabranih fizikalnih veličina s njihovim izmjerenim vrijednostima. Ovaj se proces nastavlja novim promjenama teorijske slike i tako napravi nekoliko iteracija sve dok se ne dođe do zadovoljavajućeg modela.

Na primjer, na osnovi mjerenja EMG uređaja, videokamerama i uređajima za mjerenje sila, razvija se teorija koja daje predviđanja ponašanja danog sustava. Novim se mjerenjima uspoređuju predviđene vrijednosti s izmjerenim vrijednostima. Nakon toga, korištena teorija se mijenja i poboljšava, pa sve tako dok se ne postigne zadovoljavajuća razina teorijskog opisa.

Postoji nekoliko općih koraka u procesu razvoja modela u biomehanici koji se mogu razdijeliti na sljedeći način: postavljanje pitanja na koja se želi odgovoriti, definiranje sustava koji se promatra, prisjećanje potrebnog znanja o sustavu, odabir pristupa, odnosno teorije, koji će se koristiti, pojednostavljenje i pretpostavke, matematička formulacija i matematičko rješenje, razvoj modela, diskusija, interpretacija i primjena rezultata te zaključak. Ovaj pristup je opći i primjenjiv je na različite vrste modela u biomehanici bilo da se radi o fizikalnim, polufizikalnim ili matematičkim modelima.

5.4 Primjer modela mišića

U biomehanici se mogu modelirati različite situacije cijelog tijela ili samo nekih njegovih segmenata. Jedan takav primjer je jednostavni model sile mišića na točku za koju je vezan. Mišić je u takvom modelu prikazan kao skup opruge i prigušivača. Pretpostavke ovakvog modela sastoje se od nekoliko stavki. U prvom redu, masa kompletnog mišića postavlja se samo u jednu točku, a za njegovu elastičnost uzima se kako je dobro opisana modelom elastične opruge. Pored toga, uzima se i jednostavno viskozno prigušenje mišića. Pretpostavlja se kako se kompleksna svojstva mišića mogu opisati spojem jedne elastične opruge i jednostavnog prigušivača koji je u paralelnom spoju s kontrahirajućim elementom (ilustracija 5.2). Drugi Newtonov



Ilustracija 5.2: Prikaz jednostavnog modela mišića.

zakon gibanja primijenjen na mišić daje jednadžbu gibanja za taj mišić

$$ma_x = F - F_E - F_D, \tag{5.1}$$

gdje F_E i F_D označavaju iznose elastične sile i viskozne sile u mišiću, a F silu kontrakcije mišića za koju se često pretpostavlja kako je konstantna tijekom svoga djelovanja. Ako pretpostavimo kako je viskozna sila proporcionalna brzini, $\vec{F}_D = -r\vec{v}$, slijedi

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F - kx(t) - r\frac{dx(t)}{dt}, \tag{5.2}$$

gdje m prestavlja masu mišića. Nakon toga se rješenje gornje diferencijalne jednadžbe uspoređuje s izmjerenim vrijednostima u eksperimentu s ciljem određivanja slobodnih parametara ovog jednostavnog modela. Rješevanje diferencijalne jednadžbe zahtijeva dodatno znanje iz matematike te je izvan okvira ovog udžbenika.

Pored jednostavnih modela mišića, postoje slični modeli koji na jednostavan način prikazuju utjecaj elastičnih i viskoznih svojstava sportske obuće tijekom različitih aktivnosti. Takvim se modelima kompleksna svojstva obuće pokušavaju opisati kombinacijom elastične opruge i prigušivača. Zapisuje se Drugi Newtonov zakon za sve segmente u modelu te se opet rješenje diferencijalne jednadžbe uspoređuje s eksperimentalnim rezultatima čime se mogu odrediti elastična i viskozna svojstva dane obuće.

5.5 Primjer modela ljudskog tijela

5.5.1 Težište tijela sportaša

U biomehaničkim istraživanjima ljudsko se tijelo promatra kao skup povezanih krutih segmenata. Svaki dio ili segment tijela ima određena fizikalna svojstva, kao što su masa, volumen, gustoća i mnoga druga. Između mnogih modela ljudskog tijela koji postoje u različitim biomehaničkim istraživanjima, ovdje ćemo uvesti model kojeg su uveli Zatsiorsky i Seluyanov (u poglavlju 4 već su spomenuti neki modeli ljudskog tijela koji se koriste u biomehanici). Modelom Zatsiorskyja i Seluyanova tijelo sportaša podijeljeno je na 16 segmenata (stopala, potkoljenice, natkoljenice, šake, podlaktice, nadlaktice, glava, te gornji, srednji i donji dio trupa), a mase m_i tih segmenata dane su sljedećim jednadžbama

$$m_i = B_0 + B_1 m + B_2 h, \quad i = 1, 2, \ldots, 16, \tag{5.3}$$

gdje su B_0, B_1, B_2 tzv. regrecijski koeficijenti (vrijednosti prikazane u tablici 5.1), a m i h masa, odnosno visina sportaša. Ovim je modelom masa sportaša očuvana, tj. za zbrojeve odgovarajućih regrecijskih koeficijenata vrijedi sljedeće

$$\sum_{i=1}^{16} B_0 = -0.0426 \text{ kg} \approx 0, \; \sum_{i=1}^{16} B_1 = 1.00082 \approx 1, \; \sum_{i=1}^{16} B_2 = 0.058 \text{ kg/m} \approx 0. \tag{5.4}$$

Segment	B_0 (kg)	B_1	B_2 (kg/m)
stopala	-0.829	0.0077	0.73
potkoljenice	-1.592	0.03616	1.21
natkoljenice	-2.649	0.1463	1.37
šake	-0.1165	0.0036	0.175
podlaktice	0.3185	0.0144	-0.114
nadlaktice	0.250	0.0301	-0.27
glava	1.296	0.0171	1.43
gornji dio trupa	8.2144	0.1862	-5.84
srednji dio trupa	7.181	0.2234	-6.63
donji dio trupa	-7.498	0.0976	4.896

Tablica 5.1: Regrecijski koeficijenti za procjenu mase segmenata sportaša (Zatsiorsky i Seluyanov).

Time je zbroj masa svih segmenata približno jednak ukupnoj masi m sportaša

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{16} B_0 + m \sum_{i=1}^{16} B_1 + h \sum_{i=1}^{16} B_2 \\ &= (-0.0426 \text{ kg}) + (1.00082)m + (0.058 \text{ kg/m})h \approx m. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Na primjer za sportaša mase 70 kg i visine 1.8 m, zbroj masa svih segmenata je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = -0.0426 \text{ kg} + (1.00082)(70 \text{ kg}) + (0.058 \text{ kg/m})(1.8 \text{ m}) = 70.12 \text{ kg} \tag{5.6}$$

što stvara grešku manju od 0.2 % od stvarne mase danog sportaša.

Ovim su modelom dane i regrecijske jednadžbe za određivanja položaja težišta svakog pojedinog segmenta. Međutim, u tablici 5.2 dajemo samo one podatke koji su prilagođeni za jednostavni prikaz svih položaja težišta segmenata tijela sportaša, a to su relativne udaljenosti l_i između jednih rubnih točaka segmenata i njihovih težišta u odnosu na ukupne duljine segmenata L_i. Na primjer, ako je duljina podlaktice nekog sportaša 0.28 m, tada se položaj težišta podlaktice nalazi u točki

$$x_{cm} = \left(\frac{l}{L}\right) L = (0.5726)(0.28 \text{ m}) = 0.16 \text{ m}$$

mjereno od središta ručnog zgloba uzduž podlaktice.

Segment	Rubne točke	l_i/L_i
stopala	vrh prsta stopala, rub pete	0.5585
potkoljenice	središta gležnja, središte koljenog zgloba	0.5951
natkoljenice	$\hookrightarrow$, izbočina na prednjoj strani zdjelice	0.5451
šake	vrh srednjeg prsta, središte ručnog zgloba	0.6309
podlaktice	$\hookrightarrow$, središte lakatnog zgloba	0.5726
nadlaktice	$\hookrightarrow$, središte ramenog zgloba	0.5502
glava	tjeme, razina 7. vratnog kralješka	0.5002
gornji dio trupa	$\hookrightarrow$, udubina ispod prsne kosti	0.5066
srednji dio trupa	$\hookrightarrow$, pupak	0.4502
donji dio trupa	$\hookrightarrow$, simfiza stidne kosti	0.3541

Tablica 5.2: Relativne duljine između prvih rubnih točaka segmenata i njihovih težišta u odnosu na ukupne duljine segmenata. Oznaka $\hookrightarrow$ prestavlja rubnu točku koja je nastavak prethodnog segmenta.

Poznavajući mase m_i i položaje težišta $\vec{r}_{cm,i}$ svakog pojedinog segmenta u nekom koordinatnom sustavu, lako se odredi položaj težišta $\vec{r}_{cm}$ sportaša u tom istom koordinatnom sustavu

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{16} m_i \vec{r}_{cm,i}}{m} \tag{5.7}$$

odnosno koordinate tog težišta

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_{cm,i}}{m}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_{cm,i}}{m}, \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_{cm,i}}{m}, \tag{5.8}$$

gdje $x_{cm,i}, y_{cm,i}, z_{cm,i}$ prestavljaju koordinate težišta svakog pojedinog segmenta tijela.

Moment inercije tijela sportaša

Moment inercije

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{5.9}$$

je fizikalna veličina koja opisuje svojstvo tijela kod rotacijskih gibanja. Ona ovisi o raspodjeli mase tijela u odnosu na odabranu os rotacije.

Već smo pokazali na koji se način određuju mase segmenata tijela u modelu kojega su uveli Zatsiorsky i Seluyanov. Na sličan način, tj. korištenjem tzv. regrecijskih jednadžbi

$$I_i = B_0 + B_1 m + B_2 h, \quad i = 1, 2, \ldots, 16 \tag{5.10}$$

mogu se odrediti momenti inercije I_i svakog pojedinog segmenta u tom modelu za svaku od glavnih osiju rotacije koje prolaze težištem tih segmenata. Koeficijenti B_0, B_1 i B_2 su regrecijski koeficijenti koji su, posebno za svaku od glavnih osi, dani u tablicama 5.3, 5.4 i 5.5

Segment	B_0 (kg m^2)	B_1 (m^2)	B_2 (kg m)
stopala	-0.01	0.000048	0.00626
potkoljenice	-0.1105	0.000459	0.0663
natkoljenice	-0.3557	0.00317	0.1861
šake	-0.00195	0.000017	0.00116
podlaktice	-0.0064	0.000095	0.0034
nadlaktice	0.02507	0.000156	0.01512
glava	-0.0078	0.0001171	0.01519
gornji dio trupa	0.00812	0.003673	-0.0597
srednji dio trupa	0.06185	0.00398	-0.1287
donji dio trupa	-0.1568	0.0012	0.07741

Tablica 5.3: Regrecijski koeficijenti za procjenu momenata inercije segmenata sportaša oko poprečne osi koja prolazi težištem danog segmenta (Zatsiorsky i Seluyanov).

Segment	B_0 (kg m^2)	B_1 (m^2)	B_2 (kg m)
stopala	-0.009709	0.0000414	0.00614
potkoljenice	-0.1152	0.0004594	0.06815
natkoljenice	-0.3690	0.003202	0.1924
šake	-0.001368	0.0000088	0.00092
podlaktice	-0.00679	0.0000855	0.00376
nadlaktice	0.0232	0.0001525	0.01343
glava	-0.0112	0.000143	0.0173
gornji dio trupa	0.0367	0.00183	-0.0573
srednji dio trupa	0.0263	0.00267	-0.08
donji dio trupa	-0.0934	0.00118	0.0344

Tablica 5.4: Kao u tablici 5.3, samo oko frontalne osi danih segmenata.

U analizima pokreta sportaša momenti inercije su vrlo često važne fizikalne veličine. Ukupni moment inercije I sportaša odredi se kao zbroj

Segment	B_0 (kg m^2)	B_1 (m^2)	B_2 (kg m)
stopala	-0.001548	0.0000144	0.00088
potkoljenice	-0.00705	0.0001134	0.003
natkoljenice	-0.00135	0.00113	-0.0228
šake	-0.000626	0.00000762	0.000347
podlaktice	-0.000566	0.0000306	-0.00088
nadlaktice	0.00169	0.0000662	0.000435
glava	-0.00616	0.000172	0.000814
gornji dio trupa	0.0561	0.003603	-0.0998
srednji dio trupa	0.1501	0.004314	-0.198
donji dio trupa	-0.0775	0.00147	0.01685

Tablica 5.5: Kao u tablici 5.3, samo oko uzdužne osi danih segmenata.

momenata inercije svakog pojedinog segmenta u odnosu na danu os rotacije

$$I = \sum_{i=1}^{16} I_i = \sum_{i=1}^{16} (I_{cm,i} + m_i d_i^2), \tag{5.11}$$

gdje su d_i udaljenosti težišta segmenata od dane osi rotacije, a $I_{cm,i}$ njihovi vlastiti momenti inercije oko paralelne osi.

Ponekad nije potrebno točno poznavanje vrijednosti momenata inercije nekog sportaša, već samo njihova procjena, kao je prikazano na ilustraciji 3.52.

Primjeri

1. Za vježbu odredite položaj težišta sportaša na nekoj fotografiji.

5.6 Simulacije

Vrlo često nije moguće izvršiti biomehanička istraživanja na sportašima, a posebno kad su u pitanju ekstremni uvjeti, kao na primjer problem ozljeda. To nije moguće izvršiti i zbog toga što uvjeti pri kojima se događaju ozljede nisu pod kontrolom ili su etičke prirode. U tim se slučajevima pristupa tzv. eksperimentima pomoću numeričkih modela. Takav proces izvođenja eksperimenata na numeričkim modelima naziva se **simulacija**. Koristi se termin eksperiment jer se tim procesom za određene ulazne parametre dobivaju izlazni podaci. Kad je takav model jednom razvijen, izvođenje takvog eksperimenta vrlo je jednostavno koristeći moderna računala. Naravno, jedno od najvećih problema u modeliranju i simulaciji fizikalnih događaja je realnost modela. Stoga su važni mnogi testovi modela kojima se nastoji simulirati određeni događaj.

Simulacije gibanja sportaša uljučuju diferencijalne jednadžbe koje su zapravo Drugi Newtonov zakon za translacije ili rotacije nekog segmenta tijela. Na primjer, promatrajmo biciklistu koji se spušta niz kosinu bez uporabe pedala. Zanemarujući silu trenja kotrljanja, jedine sile na biciklistu su komponenta sile teže, sila reakcije podloge te sila otpora zraka. Takav problem smo riješili kroz primjere mehanike potpuno analitički. Međutim, postoji samo manji broj primjera u realnosti koji se mogu rješiti analitički, dok je za sve ostale nužno numeričko rješenje. U tim slučajevima fizikalni modeli postaju kompjutorske simulacije. To se uglavnom radi na način da se sve potrebne veličine numerički računaju za mnoštvo bliskih trenutaka [1].

5.7 Vizualizacija

Proces vizualizacije možemo shvatiti kao bilo koji proces pretvaranja velikog skupa podataka (u pravilu numeričkih) u neki od vizualnih prikaza (npr. sliku ili crtež), a vizualizirati se mogu eksperimentalni jednako kao i podaci dobiveni simulacijom.

Numerički podaci koji opisuju neka svojstva promatranog sustava možemo shvatiti kao najniži oblik prikaza nekog sustava. Interpretacija je takvih podataka iscrpljujuća, izuzetno teška i ponekad gotovo nemoguća. Vizualni su prikazi za ljude puno prihvatljiviji, što dolazi zbog toga što osjetila vida imaju puno veći prihvat podataka nego sva druga osjetila. Osjetila vida imaju ogromni kapacitet prepoznavanja različitih vizualnih struktura, njihovih geometrijskih oblika i veličina.

Postupci se vizualizacije mogu grupirati u tri klase i to: opći, geometrijski te postupak određivanja i prepoznavanja bitnih struktura. Opći postupak daje kvalitetnu opću vizualizaciju podataka pri nižem nivou apstrakcije i složenosti, dok geometrijski uzima različite geometrijske objekte u prikazivanju zadanih podataka. Geometrijski se postupak može smatrati srednjim nivoom prikazivanja numeričkih podataka, bilo da se radi o nivou apstrakcije ili složenosti postupka. Postupak prepoznavanja bitnih struktura nekog skupa podataka ima najviši nivo u složenosti i apstrakciji. Na primjer,

[1] Primjere fizikalnih simulacija nekih sportskih aktivnosti možete vidjeti na www.pmfst.hr/~mile/biomehanika.

jedan takav postupak može biti uočavanje i određivanje načina vizualizacije kutnog položaja tijela sportaša kod skijaških letova tijekom leta. Ovakav primjer vizualizacije u sebi bi sadržavao i dinamičko svojstvo promatranog sustava.

Vizualizacija prestavlja vrlo važnu ulogu u znanstvenim biomehaničkim istraživanjima. Vizualizacija omogućava istraživaču uočavanje novih svojstava promatranog sustava, što može dovesti do stvaranje novih modela ili mijenjanja slobodnih parametara nekog modela, nakon što se više puta ponove postupci mjerenja, modeliranja, simuliranja, vizualizacije i analize.

Proces vizualizacije je vrlo složen proces i bez uporabe modernih računala bilo bi ga nemoguće i zamisliti.

Detaljniji opis procesa vizualizacije izlazi iz okvira ovog udžbenika.

Primjeri

1. Napravite fizikalni model leta skijaša kod skijaških letova i izvršite simulacije mijenjajući vrijednosti ulaznih parametara.

2. Napravite matematički model ovisnosti opsega nadlaktice i sile koju stvaraju mišići bicepsa.

3. Vizualizirajte podatke koje ste dobili nekim mjerenjima ili simulacijama.

Popis literature

[1] Aaberg, E. (1996) *Bio-mechanically correct*, Realistic individualized professional training services, Dallas

[2] Asai, T., Akatsuka, T, Haake, S. (1998) *The physics of football*, World 11 (6) 25-7

[3] Baechle, T.R., Earle, R.W. (2000) *Essentials of strength training and conditioning*, Human Kinetics, Champaign, IL

[4] Bartlett, R. (1999) *Sports Biomechanics: Reducing Injury and Improving Performance*, E & FN Spon, London

[5] Bloomfield, J., Ackland, T., Elliott, B. (1999) *Applied Anatomy and Biomechanics in Sport*, Blackwell Science Publications, Melburne

[6] Čoh, M., Tomažin, K., Dolenc, A., Terčelj, M., Fajfar, P. (2001) *Biomehanski parametri štarta in štartne akceleracije pri vrhunskih šprinterjih in šprinterkah*, Biomehanika atletike, urednik M. Čoh, ČUK GRAF, Ljubljana

[7] Donskoj, D.D., Zatsiorsky, V.M. (1979) *Biomehanika*, Fiskultura i sport, Moskva

[8] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. (2001) *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, New York

[9] Hatze, H. (1974) *The meaning of the term 'Biomechanics'*, Journal of Biomechanics, 7:189-190

[10] Howley, E.T., Franks, B.D. (1997) *Health Fitness Instructor's Handbook*, Human Kinetics, Champaign, IL

[11] `http://www.pmfst.hr/~mile/biomehanika`, CARNet, Zagreb

[12] `http://asb-biomech.org/historybiomech/`

[13] Jarić, S. (1997) *Biomehanika*, Dosije, Beograd

[14] Krmpotić-Nemanić, J. (1979) *Anatomija čovjeka*, Jumena, Zagreb

[15] McGinnis, P.M. (1999) *Biomechanics of Sport and Exercise*, Human Kinetics, Champaign, IL

[16] Medved, V. (2001) *Measurement of Human Locomotion*, CRC Press, Boca Raton, Fl

[17] Mejovšek, M. (1995) *Biomehanika sporta*, Priručnik za sportske trenere, Sportska stručna biblioteka, Zagreb

[18] Mikić, B. (2000) *Psihomotorika*, Filozofski fakultet, Tuzla

[19] Nigg, B.M., Herzog, W. (1999) *Biomechanics of the Musculo-skeletal System*, John Wiley & Sons, London

[20] Nikolić, V., Hudec, M. (1988) *Principi i elementi biomehanike*, Školska knjiga, Zagreb

[21] Opavsky, P. (1976) *Osnovi biomehanike*, Naučna knjiga, Beograd

[22] Rosser, M. (1999) *Body Fitness and Exercise: Basis Theory and Practice for Therapists*, Hodder & Stoughton, London

[23] Serway, R.A., Faughn, J.S. (2000) *College Physics*, Sounders College Publishing, Orlando

[24] Zatsiorsky, V. (2000) *Biomechanics in Sports*, The Encyklopedia of Sport Medicine, Blackwell Science Publications, Melburne

Kazalo pojmova