Usporedba dva algoritma Jacobijevog tipa za svojstvene vrijednosti općih kompleksnih matrica

Mate Kosor[1]

[1] Pomorski odjel, Sveučilište u Zadru

Seminar za numeričku matematiku i znanstveno računanje
Zagreb, 4. rujna 2014.

Sadržaj predavanja

Svojstvene vrijednosti

- $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednosti, a $v \in \mathbb{F}^n$ svojstveni vektor matrice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kada:

$$A\,v = \lambda\,v.$$

Nultočke karakterističnog polinoma: $\det(A - \lambda I) = 0$

Ovisi o polju $\mathbb{F}$: $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Biramo $\mathbb{C}$ jer je izbor svojstvenih vrijednosti veći (osnovni teorem algebre).

Svojstvene vrijednosti

- $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednosti, a $v \in \mathbb{F}^n$ svojstveni vektor matrice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kada:

$$A\,v = \lambda\,v.$$

Nultočke karakterističnog polinoma: $\det(A - \lambda I) = 0$

Ovisi o polju $\mathbb{F}$: $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Biramo $\mathbb{C}$ jer je izbor svojstvenih vrijednosti veći (osnovni teorem algebre).

- za $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, te $X = [v_1\, v_2\, \ldots]$ imamo:

$$A\,X = X\,D$$

Svojstvene vrijednosti

- $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednosti, a $v \in \mathbb{F}^n$ svojstveni vektor matrice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kada:

$$A\,v = \lambda\,v.$$

Nultočke karakterističnog polinoma: $\det(A - \lambda I) = 0$

Ovisi o polju $\mathbb{F}$: $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Biramo $\mathbb{C}$ jer je izbor svojstvenih vrijednosti veći (osnovni teorem algebre).

- za $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, te $X = [v_1\; v_2\; \dots]$ imamo:

$$A\,X = X\,D$$

- kada se od svojstvenih vektora može sastaviti baza $X = [v_1\; v_2\; \dots\; v_n]$ matricu A nazivamo dijagonalizabilna:

$$A = X\,D\,X^{-1}$$

Matricu koje nisu dijagonalizabilna naziamo defektnom.

Transformacije sličnosti

A dijagonalizabilna:

ako za neku regularnu matricu X i dijagonalnu D vrijedi:

$$A = X\,D\,X^{-1}$$

Transformacije sličnosti

A dijagonalizabilna:
ako za neku regularnu matricu X i dijagonalnu D vrijedi:

$$A = X\,D\,X^{-1}$$

A i B su slične:
ako za neku regularnu matricu X vrijedi:

$$A = X\,B\,X^{-1}$$

A i B su unitarno slične:
ako za neku unitarnu matricu Q vrijedi:

$$A = Q\,B\,Q^{-1}$$

Unitarne transformacije sličnosti pokazuju bolja numerička svojstva: ne treba računati inverz $Q^{-1} = Q^{*}$, čuva se normalnost, hermitičnost, unitarnost, ne povećava se razina perturbacija...

Transformacije sličnosti

A dijagonalizabilna:

ako za neku regularnu matricu X i dijagonalnu D vrijedi:

$$A = X\,D\,X^{-1}$$

A i B su slične:

ako za neku regularnu matricu X vrijedi:

$$A = X\,B\,X^{-1}$$

A i B su unitarno slične:

ako za neku unitarnu matricu Q vrijedi:

$$A = Q\,B\,Q^{-1}$$

A je normalna matrica:

- ako i samo ako: $A^*\,A = A\,A^*$
- ako i samo ako je unitarno slična dijagonalnoj:

$$A = Q\,D\,Q^*$$

Unitarne transformacije sličnosti pokazuju bolja numerička svojstva: ne treba računati inverz $Q^{-1} = Q^*$, čuva se normalnost, hermitičnost, unitarnost, ne povećava se razina perturbacija. . .

Matrične dekompozicije koje otkrivaju svojstvene vrijednosti

Schurova forma

Za proizvoljnu kvadratnu matricu A postoji ortogonalno slična trokutasta matrica, tj.

$$A = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} Q^*$$

Matrične dekompozicije koje otkrivaju svojstvene vrijednosti

Jordanova forma

Za proizvoljnu kvadratnu matricu A postoji slična blok-dijagonalna matrica (blokovi $B_1, \ldots, B_k$)

$$A = X \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix} X^{-1}$$

gdje su blokovi bidijagonalni oblika $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$.

Kako testirati dijagonalizabilnost?

Slika sa podkupovima matrica. . . TODO

QR metoda za općenite matrice (1961)

Iterativna metoda: $A_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} A$, za $k \in \mathbb{N}$

1. napravi QR rastav: $A_k = Q_k \, R_k$,
2. $$\begin{aligned} A_{k+1} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} R_k \, Q_k \\ &= Q_k^{-1} \, Q_k \, R_k \, Q_k \\ &= Q_k^{-1} \, A_k \, Q_k \\ &= Q_k^T \, A_k \, Q_k \end{aligned}$$

- numerički stabilna,
- pod određenim uvjetima (sporo) konvergira
- svaka iteracija je skupa: $\mathcal{O}(n^3)$

QR metoda za općenite matrice (1961)

Iterativna metoda: $A_1 \stackrel{\text{def}}{=} A$, za $k \in \mathbb{N}$

1. napravi QR rastav: $A_k = Q_k\, R_k$,
2. $$\begin{aligned} A_{k+1} &\stackrel{\text{def}}{=} R_k\, Q_k \\ &= Q_k^{-1}\, Q_k\, R_k\, Q_k \\ &= Q_k^{-1}\, A_k\, Q_k \\ &= Q_k^{T}\, A_k\, Q_k \end{aligned}$$

- numerički stabilna,
- pod određenim uvjetima (sporo) konvergira
- svaka iteracija je skupa: $\mathcal{O}(n^3)$

Modifikacija:

- svaka iteracija QR metode čuva Hessenbergovu formu

$$A = Q \begin{bmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \star \\ & & \star & \star \end{bmatrix} Q$$

- Q (hermitska) Hausholderova transformacija
- konačno $\frac{10}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ operacija
- brža, sigurna konvergencija i jeftinije QR iteracije: $6n^2 + \mathcal{O}(n)$

QR metoda nije savršena:

- Čuva Hessenbergovu, tridijagonalnu i neke druge slične forme, ali nije prilagođena za sve matrične strukture
  - ne čuva Hamiltonovu formu $H = \begin{bmatrix} A & C \\ D & -A^T \end{bmatrix}$, za C i D simetrične,
  - itd.

QR metoda nije savršena:

- Čuva Hessenbergovu, tridijagonalnu i neke druge slične forme, ali nije prilagođena za sve matrične strukture
  - ne čuva Hamiltonovu formu $H = \begin{bmatrix} A & C \\ D & -A^T \end{bmatrix}$, za C i D simetrične,
  - itd.
- Stabilna (natrag), svojstvene vrijednosti računa s malom apsolutnom greškom (ovisi o spektralnoj normi, dimenziji matrice i mašinskoj preciznosti),
  - ali izračunate malene svojstvene vrijednosti mogu imati veliku relativnu grešku.
  - Redukcija na Hessenbergovu formu može uzrokovati velike relativne greške malenih svojstvenih vrijednosti.
- Paralelizacija...

Svojstvene vrijednosti 2x2 simetrične realne matrice

Theorem

(E. Carlen, Calculus++, 2003) Svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ *su*

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{b^2 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^2}.$$

Svojstveni vektori koji čine ortonormalnu bazu $\{u_1, u_2\}$*mogu se izračunati preko*

$$\begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \end{bmatrix} = A - \lambda_1 I, \quad u_1 = \frac{1}{|r_1|} r_1^{\perp}, \quad u_2 = u_1^{\perp}$$

Jacobijeva metoda za simetričnu realnu matricu (1846,1949)

Na matrici $A = (a_{ij})$ sprovedi:

- Ponavljaj dok A nije skoro dijagonalna (sweep):
  - za $i = 2, \ldots, n$, te $j = 1, \ldots, i-1$ (redoslijed)
    - $A \leftarrow G\,A\,G^T$ (iteracija), gdje je $G = G(i,j,\theta)$

$G(i,j,\theta) =$ Givensova rotacija

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

rotacija u (i,j) ravnini za kut θ

1. nakon transformacije sličnosti $a_{ij} = a_{ji} = 0$
2. iteracija mijenja 2 stupca i 2 retka
3. dovoljno je (pažljivo) izračunati $c = \cos\theta$ i $s = \sin\theta$

Konvergencija i stabilnost Jacobijeve metode za simetrične matrice

- još 1950-tih prvi rezultati o kvadratičnoj asimptotskoj (lokalnoj) konvergenciji Jacobijeve metode
- temelje se na minimizaciji off-norme

$$\mathrm{off}(A) = \sqrt{\sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2}$$

Konvergencija i stabilnost Jacobijeve metode za simetrične matrice

- još 1950-tih prvi rezultati o kvadratičnoj asimptotskoj (lokalnoj) konvergenciji Jacobijeve metode
- temelje se na minimizaciji off-norme

$$\mathrm{off}(A) = \sqrt{\sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2}$$

- konvergenciju je moguće ubrzati izborom specifičnog redoslijeda iteracija, pa čak pokazati i globalnu konvergenciju
  - npr. Rhee & Hari (1993), *On the global and cubic convergence of quasi-cyclic Jacobi method*, Numerische Mathematik
- nudi relativnu točnost i za malene svojstvene vrijednosti
  - Demmel & Veselić (1992), *Jacobi's method is more accurate than QR*, SIAM J. Matrix Anal. Appl.

Na općoj matrici donedavno nije dokazana niti globalna niti lokalna konvergencija!

Greenstadt (1955): θ t.d. poništi a_{ij} ispod dijagonale $\dashrightarrow$ Schurova forma

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & \overline{u_{ii}} & & & \overline{u_{ji}} & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & \overline{u_{ij}} & & & \overline{u_{jj}} & \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
\underbrace{\begin{bmatrix}
* & * & * & * & * & * \\
\cdot & * & * & * & * & * \\
\cdot & \cdot & * & * & * & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & * & * & * \\
\cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & * & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & *
\end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & u_{ii} & & & u_{ij} & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & u_{ji} & & & u_{jj} & \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}}_{G}
=
\begin{bmatrix}
* & \star & * & * & \star & * \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star \\
\cdot & \star & * & * & \star & * \\
\cdot & \star & \cdot & * & \star & * \\
\star & 0 & \star & \star & \star & \star \\
\cdot & \star & \cdot & \cdot & \star & *
\end{bmatrix}
$$

Problem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jacobijeva metoda se može generalizirati na hermitske matrice

Kod matrica nad $\mathbb{C}$ Givensove rotacije ovise o dva realna parametra (kuta) ψ i ϕ. U slučaju hermitske matrice A ($a_{ji} = \overline{a_{ij}}$) moguće je "naštimati" parametre tako da se u k-toj iteraciji ponište pivoti $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k+1)} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi_k & -\mathrm{e}^{i\psi_k}\sin\phi_k \\ \mathrm{e}^{-i\psi_k}\sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii}^{(k)} & a_{ij}^{(k)} \\ a_{ji}^{(k)} & a_{jj}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_k & \mathrm{e}^{i\psi_k}\sin\phi_k \\ -\mathrm{e}^{-i\psi_k}\sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ii}^{(k+1)} & 0 \\ 0 & a_{jj}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

Jacobijeva metoda se može generalizirati na hermitske matrice

Kod matrica nad $\mathbb{C}$ Givensove rotacije ovise o dva realna parametra (kuta) ψ i ϕ. U slučaju hermitske matrice A ($a_{ji} = \overline{a_{ij}}$) moguće je "naštimati" parametre tako da se u k-toj iteraciji ponište pivoti $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k+1)} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi_k & -\mathrm{e}^{i\psi_k}\sin\phi_k \\ \mathrm{e}^{-i\psi_k}\sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii}^{(k)} & a_{ij}^{(k)} \\ a_{ji}^{(k)} & a_{jj}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_k & \mathrm{e}^{i\psi_k}\sin\phi_k \\ -\mathrm{e}^{-i\psi_k}\sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ii}^{(k+1)} & 0 \\ 0 & a_{jj}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

- Jacobijev tip algoritma ima svojstva kao kod simetrične realne matrice
- slično je za antihermitske matrice

Modifikacija Jacobijeve metode za normalne matrice

Test, Goldstine & Horwitz (1959):

$$|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|^2 + [\mathrm{Re}\,(a_{ii} - a_{jj})]^2 \overset{?}{\substack{\leq \\ = \\ >}} |a_{ij} - \overline{a_{ji}}|^2 + [\mathrm{Im}\,(a_{ii} - a_{jj})]^2$$

Ako test $\geq$: odaberi ϕ i ψ t.d

$\mathrm{Im}\big(a_{ij} - a_{ji}\big)\cos\psi - \mathrm{Re}\big(a_{ij} + a_{ji}\big)\sin\psi = 0$

$\cos\psi\,\mathrm{Re}\big(a_{ij} + a_{ji}\big) \geq 0$

$\tan 2\phi = \dfrac{\left|a_{ij} + \overline{a_{ji}}\right|}{\mathrm{Re}\big(a_{ii} - a_{jj}\big)}$ i $\sin\phi\,\mathrm{Re}\big(a_{ii} - a_{jj}\big) \geq 0$

Ako test $<$: odaberi ϕ i ψ t.d

$\mathrm{Re}\big(a_{ij} - a_{ji}\big)\cos\psi + \mathrm{Im}\big(a_{ij} + a_{ji}\big)\sin\psi = 0$

$\cos\psi\,\mathrm{Im}\big(a_{ij} + a_{ji}\big) \geq 0$

$\tan 2\phi = \dfrac{\left|a_{ij} - \overline{a_{ji}}\right|}{\mathrm{Im}\big(a_{ii} - a_{jj}\big)}$ i ϕ opet manji izbor

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & e^{i\psi}\sin\phi \\ -e^{-i\psi}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Preinaka s normalnih na općenite matrice

- samo za normalnu A vrijedi $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |\lambda_{\mathrm{i}}|^2$ i $AA^* - A^*A = O$
- smicanje $S = S(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cosh y & -i\mathrm{e}^{i\beta} \sinh y \\ -i\mathrm{e}^{-i\beta} \sinh y & \cosh y \end{bmatrix}$ generira transformaciju sličnosti (nije unitarna)

Preinaka s normalnih na općenite matrice

- samo za normalnu A vrijedi $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |\lambda_{\mathrm{i}}|^2$ i $AA^* - A^*A = O$
- smicanje $S = S(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cosh y & -i\mathrm{e}^{i\beta} \sinh y \\ -i\mathrm{e}^{-i\beta} \sinh y & \cosh y \end{bmatrix}$ generira transformaciju sličnosti (nije unitarna)
- Eberlein (1962): moguće je odabrati smicanje S tako da (globalna konvergencija)

$$\|A\|_F^2 - \left\|S^{-1} A S\right\|_F^2 \geq \frac{1}{3} \frac{1}{n(n-1)} \|AA^* - A^*A\|_F^2$$

- Eberlein (1970): "isprepliće" Givensove rotacije za normalne matrice sa transformacijama smicanja:

$$S_k^{-1} R_k^* \ldots S_1^{-1} R_1^* A R_1 S_1 \ldots R_k S_k \xrightarrow{k} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{prostor normalnih matrica} \\ \longrightarrow \text{dijagonalizacija} \end{array}$$

Preinaka s normalnih na općenite matrice

- Eberlein (1962): moguće je odabrati smicanje S tako da (globalna konvergencija)

$$\|A\|_F^2 - \left\|S^{-1} A\, S\right\|_F^2 \geq \frac{1}{3}\,\frac{1}{n\,(n-1)}\,\|A\,A^* - A^* A\|_F^2$$

- Eberlein (1970): "ispreplića" Givensove rotacije za normalne matrice sa transformacijama smicanja:

$$S_k^{-1} R_k^* \ldots S_1^{-1} R_1^*\, A\, \underbrace{R_1 S_1}_{W_1} \ldots \underbrace{R_k S_k}_{W_k} \xrightarrow{k} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{prostor normalnih matrica} \\ \longrightarrow \text{dijagonalizacija} \end{array}$$

  - dio Wilkinson-Reinsch kolekcije

Preinaka s normalnih na općenite matrice

- Eberlein (1962): moguće je odabrati smicanje S tako da (globalna konvergencija)

$$\|A\|_F^2 - \left\|S^{-1} A\, S\right\|_F^2 \geq \frac{1}{3}\, \frac{1}{n\,(n-1)}\, \|A\,A^* - A^* A\|_F^2$$

- Eberlein (1970): "isprepliće" Givensove rotacije za normalne matrice sa transformacijama smicanja:

$$S_k^{-1} R_k^* \dots S_1^{-1} R_1^*\, A\, \underbrace{R_1 S_1}_{W_1} \dots \underbrace{R_k S_k}_{W_k} \xrightarrow{k} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{prostor normalnih matrica} \\ \longrightarrow \text{dijagonalizacija} \end{array}$$

  - dio Wilkinson-Reinsch kolekcije

- Ruhe (1968): blaga modifikacija Eberlein algoritma
  - pokazao asimptotsku kvadratičnu konvergenciju za općenite kompleksne matrice

Eberlein (1970) procedura *eigen* (pojednostavljeno)

- Počni sa $W = I$.
- Sigurnosna petlja (35 iterations max)

1. ($\mathcal{O}(n^2)$) pripremi varijable koje mjere konvergenciju $\tau = \sum_{i \neq j} |\mathrm{Re}(a_{ij})| + |\mathrm{Im}(a_{ij})|$, $en[j] = \sum_i |\mathrm{Re}(a_{ij})| + |\mathrm{Im}(a_{ij})|$ (1-norma j-tog stupca)
2. ($\mathcal{O}(n^2)$) Sortiraj stupce (i retke) of A (koristi en), promijeni W na odgovarajući način (zamijeni stupce)
3. Ako $\tau < 100\varepsilon$ izađi iz petlje
4. Napravi sweep: $\frac{n^2}{2}$ transformacija (rotacija i smicanja zajedno): NE poredak

   A) temeljem unosa u stupcima i retcima sa indeksima i, j izračunaj S i R, ($\mathcal{O}(n)$)
   B) $W \leftarrow W\,S\,R$, ($\mathcal{O}(n)$)
   C) $A \leftarrow R^* S^{-1} A S R$ ($\mathcal{O}(n)$)

Eberlein (1970) implementacija

- Sage: alternativa za Matlab, Mathematicu, itd.
- koristi double na IntelCore i5
- ispisuje $\tau = \sum_{i \neq j} |\mathrm{Re}(a_{ij})| + |\mathrm{Im}(a_{ij})|$ za svaki sweep
- trajanje $\approx$ broj sweepova
- osim originalnog algoritma čiji su rezultati ponovljeni iskušao i neke modifikacije (bez nekog posebnog uspjeha)
- pokazati primjere 2 i 3
- očekivanje $\tau \to 0$ asimptotski kvadratično

Zašto Jacobi ima problema na općenitim matricama?

Mehl (2008): modifikacija Greenstadt algoritma

$$\begin{array}{c}\Downarrow\\ \text{odozgo}\\ \text{prema}\\ \text{dolje}\end{array}\quad \begin{bmatrix} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ . & \circ & \ast & \ast & \circ & \ast \\ . & \diamond & \ast & \ast & \bullet & \ast \\ . & \diamond & . & \ast & \bullet & \ast \\ . & \circ & . & . & \circ & \ast \\ . & . & . & . & . & \ast \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c}\Uparrow\\ \text{odozdo}\\ \text{prema}\\ \text{gore}\end{array}\quad \begin{bmatrix} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ . & \circ & \ast & \ast & \circ & \ast \\ . & . & \ast & \ast & \bullet & \ast \\ . & . & . & \ast & \bullet & \ast \\ . & \circ & . & . & \circ & \ast \\ . & \diamond & . & . & \triangle & \ast \end{bmatrix}$$

Legenda: 2x2 problem iz iteracije označen sa $\circ$, moguće veliki iznosi iznad dijagonale $\bullet$, poništavano u ranijim iteracijama istog sweepa $\diamond$, elementi ispod dijagonale za koje se iz prethodnog sweepa očekuje da su maleni $\triangle$.

Konvergencija Mehl modifikacije

- Mehl je pokazao lokalnu (asimptotski) kvadratnu konvergenciju

Konvergencija Mehl modifikacije

- Mehl je pokazao lokalnu (asimptotski) kvadratnu konvergenciju

- Moja implementacija: Sage + isti laptop
- ispisuje $\tau = \sum_{i>j} |\mathrm{Re}(a_{ij})| + |\mathrm{Im}(a_{ij})|$ za svaki sweep
- trajanje se mjeri brojem sweepova (uzeti u obzir da Eberlein sweep košta oko 1.5 puta više)
- pokazati usporedbe na slučajnom primjeru
- trajanje: Mehl $\approx$ Eberlein $\approx \frac{1}{2}$ Greenstadt

Sličnosti različitih generalizacija Jacobijevog algoritma

- Koristi se transformacija sličnosti prilagođena specifičnom potprostoru
  - Kvadratična konvergencija u “okolini” specifičnog potprostora!
    - Koja je prava mjera “blizine”?
    - Mogućnost: na osnovi udaljenosti od specifičnog potprostora iskorisiti pogodan algoritam
  - Kako ubrzati konvergenciju dok su iteracije “daleko”?

Sličnosti različitih generalizacija Jacobijevog algoritma

- Koristi se transformacija sličnosti prilagođena specifičnom potprostoru
  - Kvadratična konvergencija u "okolini" specifičnog potprostora!
    - Koja je prava mjera "blizine"?
    - Mogućnost: na osnovi udaljenosti od specifičnog potprostora iskorisiti pogodan algoritam
  - Kako ubrzati konvergenciju dok su iteracije "daleko"?
- Poredak i narav operacija sličnosti ne uzimati "zdravo za gotovo"!
  - Propitivati svaki korak algoritma koji nije dokazano optimalan
  - Npr. prelazak sa 2x2 rotacija na 3x3 rotacije, itd.

Sličnosti različitih generalizacija Jacobijevog algoritma

- Koristi se transformacija sličnosti prilagođena specifičnom potprostoru
  - Kvadratična konvergencija u "okolini" specifičnog potprostora!
    - Koja je prava mjera "blizine"?
    - Mogućnost: na osnovi udaljenosti od specifičnog potprostora iskorisiti pogodan algoritam
  - Kako ubrzati konvergenciju dok su iteracije "daleko"?
- Poredak i narav operacija sličnosti ne uzimati "zdravo za gotovo"!
  - Propitivati svaki korak algoritma koji nije dokazano optimalan
  - Npr. prelazak sa 2x2 rotacija na 3x3 rotacije, itd.
- Usporedbe sa QR algoritmom trebaju uzeti u obzir točnost!