Popuniti odmah! PISATI JEDNOSTRANO!

IME I PREZIME: JURE MIČIĆ **BROJ INDEKSA:** 17-1-0083-11

DATUM: 26.6.2012. VRIJEME: OD DO

MATEMATIKA 1: Trajanje 120 minuta. Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

80

Broj ↓ bodova

1. Zadan je skup linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z - w &= -5 \\ 3z - 2y &= 5 \\ 2y - x - w &= -1 \\ w - 4x + 3z &= 9 \end{aligned}$$

   (a) zapisati dani sustav matrično, 2

   (b) riješiti matrični sustav Gaussovom metodom 10

   (c) provjeriti izračunato rješenje matričnim množenjem 3

2. Riješiti u kompleksnim brojevima sljedeće jednadžbe:

   (a) $z^3 + |3 - 4i| = \frac{5}{i}$. 10

   (b) $-z + |z - 4i| = \overline{3 + 4i}$. 10

3. Za funkciju $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$:

   (a) odrediti asimptote i 10

   (b) odrediti prvu derivaciju 10

4. Za funkciju $g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$:

   (a) uz pomoć L'Hopitalovog pravila odrediti: $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ 10

   (b) uz pomoć zaključka iz (a) diskutirati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^2}$ 10

5. Zadana je funkcija: $h(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$. Na temelju ispitivanja toka funkcije:

   (a) diskutirati da li je funkcija globalno ograničena ili ne, 5

   (b) navesti sve lokalne ekstreme, 5

   (c) navesti sve točke infleksije i 5

   (d) napraviti skicu grafa funkcije. 10

(1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right] +IV \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & 3 & 0 & 8 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right] :3 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right] -III \cdot 3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] :4 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3 \cdot II \\ \\ +\frac{2}{3} II \\ -2 \cdot II \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{7}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{6} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right] :\frac{7}{4}$$

VIDI RJEŠENJE 1

OTRAGA NIJE SKENIRANO!

IME I PREZIME: JURE MIĆIĆ BROJ INDEKSA: 17-1-0083-11

(2) b) $-2+|z-4i| = \overline{3+4i}$

$-2+\sqrt{z^2+4^2} = 3-4i$

$\left(\sqrt{z^2+4^2}\right)^2 = (2+3-4i)^2$

$z^2+16 = z^2+3z-4zi+3z+9-12i-4zi-12i-16$

$16 = 3z-8zi-24i-16$

$-3z+8zi = -32-24i$

$z(-3+8i) = -32-24i \;/:-3+8i$

$z = \frac{(-32-24i)}{-3+8i} \cdot \frac{(-3-8i)}{(-3-8i)}$

$z = \frac{96+72i+256i-192}{9+64}$

$z = \frac{-92+328i}{73}$

$z = -\frac{92}{73} + \frac{328}{73}i$

③ $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$ $\quad x \in \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle$

$x - \sqrt{x^2 - x} = 0$ $\quad x^2 - x \geq 0$ NEMA VERTIKALNIH ASIMTOTA ✓

$x_1 = 0$

$\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{x^2 - x} = +\infty$ NEMA HORIZONTALNIH ASIMTOTA ✗

$\lim_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \to \infty} -x - \sqrt{x^2 + x} = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x}}{x} = 0$ $\quad \lim_{x \to \infty} \frac{-x - \sqrt{x^2 + x}}{x} = 2$ $\quad a = 2$

$\lim_{x \to} x - \sqrt{x^2 - x} = 0$ $\quad \lim_{x \to \infty} -x - \sqrt{x^2 + x} + 2x = \lim_{x \to} x - \sqrt{x^2 + x}$

$= -\infty$

b) $f(x)' = 1 - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$ ✓

a) NEMA ASIMTOTA ✗

10

$\left[(x^2 - x)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2}(x^2 - x)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (2x - 1)$

$\frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}} \cdot (2x - 1)$

IME I PREZIME: JURE MIČIĆ

BROJ INDEKSA: 17-1-0083-11

(4) IME I PREZIME: JURE MIČIĆ BROJ INDEKSA: 17-1-0083-11

a) $g(x)=\frac{e^{2x}}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{2x})'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\frac{e^{2x}\cdot 2}{1}=2e^{2x}=\infty$$ ✓

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^2}$ NE KONVERGIRA JER $\lim_{n\to\infty} a_n$ NIJE JEDNAK NULI ✓

(5) $h(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$ $x\in\langle-\infty,+\infty\rangle$

a) FUNKCIJA JE OGRANIČENA ✓
GLOBALNI MAX (SUPREMUM) JOJ JE 1
A GLOBALNI MIN JE −1 ✓

b) $Y=-1$ JE LOKALNI MINIMUM ✓

$x^2-3=0$

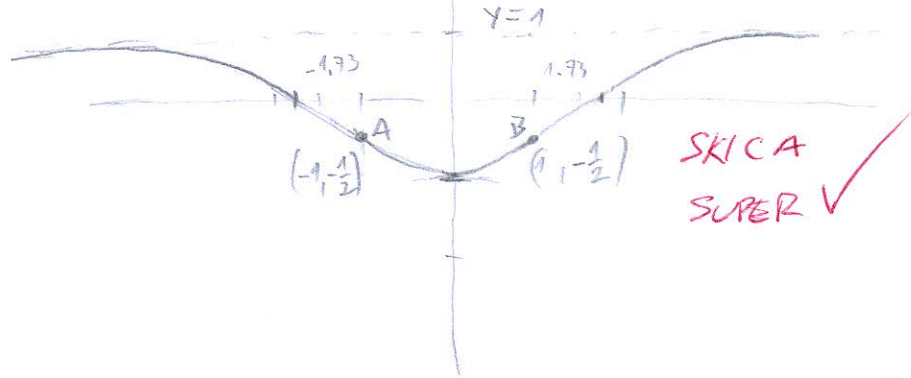
$x_1=\sqrt{3}=1.73$

$x_2=-\sqrt{3}=-1.73$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2+3}=1$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2+3}=1$

$Y=1$ – HORIZONTALNA ASIMTOTA ✓



SKICA SUPER ✓

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^2+3}=1$

a) $h(x)\in[-1,1\rangle$

c) $A(-1,-\frac{1}{2})$, $B(1,\frac{1}{2})$ TOČKE INFLEKSIJE ✓

$$h(x)'=\frac{2x\cdot(x^2+3)-(2x\cdot(x^2-3))}{(x^2+3)^2}$$

$$h(x)'=\frac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2}$$

$$h(x)'=\frac{12x}{(x^2+3)^2}\qquad h(x)'=0 \text{ KAD JE } x=0$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{12x}{(x^2+3)^2}$		−	0	+	
		↘		↗	

	-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$-36\frac{x^2+1}{(x^2+3)^3}$		−		−	0	+		+	0	−		−	
		↘		↘		↗		↗		↘		↘	

$$h(x)''=\frac{12\cdot(x^2+3)^2-(12x\cdot 2(x^2+3)^{2-1}\cdot 2x)}{(x^2+3)^4}$$

$$h(x)''=\frac{12(x^2+3)^2-48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^{4-3}}$$

$$h(x)''=\frac{12x^2+36-48x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{-36x^2+36}{(x^2+3)^3}$$