OBAVEZNO POPUNITI VRIJEME RJEŠAVANJA ISPITA: OD DO

MATEMATIKA 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita.

ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

55

IME I PREZIME: BORIS ĐURBIĆ BROJ INDEKSA: 57640

1. Riješiti integrale:
   (a) $\int \frac{x^3}{x^2+3x+5}\,dx$,
   (b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

10

2. Odrediti površinu između krivulja $y = x+2$ i $y = 4+x-x^2$. 20

3. Odrediti ekstreme funkcije $f(x,y) = 3x^2 + xy - y^3 + 2$. 5

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' + y' - 2y = 1$.

5. Razviti funkciju $f(x) = \cos x$ u Taylorov red po potencijama $x - \frac{\pi}{2}$. Izračunati barem prva 4 člana. 20

3.

$Y = 3x^2 + xy - y^3 + 3$

$\partial_x = 6x + y$ $\quad 6x + y = 0$

$\partial_y = x - 3y^2$ $\quad x - 3y^2 = 0 \,/\cdot(-6)$

$6x + y = 0$

$-6x - 18y^2 = 0$ $\Rightarrow y + 18y^2 = 0$

$-17y^2 = 0$ $\quad y(1+18y) = 0$ $\quad y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{18}$

$y = 0$

$x = 0$ $\quad T(0,0)$ ×

$\partial_{xx} = 6$ $\quad \partial_{xy} = 1$

$\partial_{xx} = 0$ $\quad \partial_{yy} = -6y$

$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 6\cdot 0 - 1\cdot 0 = 0$ ×

IMAMO LOKALNI MINIMUM U TOČKI $T(0,0)$ ×

$\partial_{yx} = \partial_{xy} = 1$

5

VIDI ZVONIMIR DUNATOV

IME I PREZIME: BORIS ĐURBIĆ BROJ INDEKSA: 57640

5. $\cos x \qquad x - \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2}$ ✓

$f_0 = 0$

$\cos x' = -\sin x \qquad f_1' = -1$

$-\sin x' = -\cos x \qquad f_2'' = 0$

$-\cos x' = \sin x \qquad f_3''' = 1$

$$\frac{f_0 \cdot (x)}{1} + \frac{f_1' \cdot (x - x_0)^1}{1!} + \frac{f_2'' (x - x_0)^2}{2!} + \frac{f_3''' (x - x_0)^3}{3!}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} + \frac{-1\,(x - \frac{\pi}{2})^1}{1!} + \frac{0\,(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{1\,(x - \frac{\pi}{2})^3}{3!}$$

$$f(x) \approx 0 - 1\,(x - \tfrac{\pi}{2}) + 0 + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{6} + \dots$$ ✓ 20

1. b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$\ln x = u \qquad du = \frac{1}{x}$

$\int \frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow \int x^{-2}\,dx \qquad v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$ 10

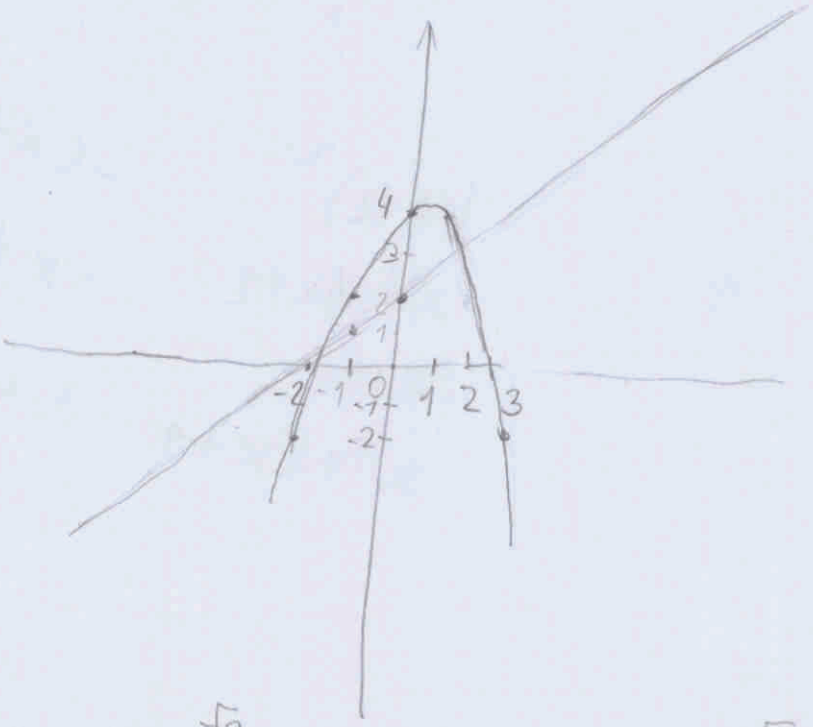
$$\ln x \cdot \frac{-1}{x} - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$ ✓

$\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)' = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$ ✓

IME I PREZIME: BORIS ĐORĐIĆ BROJ INDEKSA: 57640

(2.) $y = x + 2$

$y = 4 + x - x^2$



$x + 2 = 4 + x - x^2$

$-x^2 = -2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$$P = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 + x - x^2) - (x + 2) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -x^2 + 2 = -\frac{x^3}{3} + 2x \Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$ ✓

$$= -\frac{\sqrt{2}^3}{3} + 2\sqrt{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}^3}{3} - 2\sqrt{2}\right)$$

$$= -\frac{2.82}{3} + 2.82 + \frac{2.82}{3} + 2.8 = 4\sqrt{2} = 5{,}65$$

20

IME I PREZIME: BORIS ĐURBIĆ BROJ INDEKSA: 57640

a) $\int \frac{x^3}{x^2+3x+5}$ | $u = x^3 \quad du = 3x^2$

$dv = \int x^2 + 3x + 5 \, dx \quad v = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x$

~~$x^3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) - \int 3x^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) dx$~~

∅

1. $\frac{1}{x^2+3x+5} = \int \frac{1}{(x+1)^2 \cdot (x+4)} = \frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \frac{C+D}{(x+1)} + \frac{D+E}{(x+4)}$

=

$x^3 : (x^2+3x+5) = x-3$

$-(x^3+3x^2+5x)$

$-3x^2-5x$

$-(-3x^2-9x-15)$

$4x+15$

$x^2+3x+5=0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow x^2+3x+5$ nema realnih korijena, ne može se rastaviti na faktore

$\int \frac{x^3}{x^2+3x+5} dx = \int \left(x-3+\frac{4x+15}{x^2+3x+5}\right) dx = \int x\,dx - 3\int dx + \int \frac{4x+15}{x^2+3x+5} dx$

$= \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|x^2+3x+5| + \frac{18}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right) + C$

$\int \frac{4x+15}{x^2+3x+5} dx = \int \frac{2(2x+3)+9}{x^2+3x+5} dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx + 9\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$

$= 2\ln|x^2+3x+5| + 9 \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right) + C$

$\int \frac{dx}{x^2+3x+5} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 5 - \frac{9}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \frac{1}{\frac{11}{4}} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right)^2 + 1} = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{11}} dx \end{matrix} \right\}$

$= \frac{4}{11} \int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}\, dt}{t^2+1} = \frac{4}{11} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} \arctan t = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right) + C$