

MATEMATIKA 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita.

50

ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

IME I PREZIME: Domagoj Knežević

BROJ INDEKSA: 57299

1. Riješiti integrale:

(a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

10

(b) $\int \frac{(x^4 - 2x^3) dx}{(4x^2 + 3x - 1)(x - 1)}$

5

2. Izračunati površinu lika omeđenog parabolama $y^2 = 2x + 5$ i $y^2 = -2x + 3$.

3. Zadana je funkcija $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$. Pronaći i klasificirati ekstreme. Prikazati funkciju pomoću razinskih krivulja, strelicama označiti smjer rasta funkcije i označiti točke ekstrema

15

4. Riješiti diferencijalnu jednačbu, a zatim rješenje uvrstiti u jednačbu i provjeriti da je uistinu zadovoljava:

$y'' - 4y = \cos x$

5. Razviti funkciju $f(x) = e^{4x-3}$ u Taylorov red po potencijama oko točke $x_0 = 1$. Izračunati barem prva 3 člana.

20

1. a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_0^2$

$= 2\sqrt{x} \Big|_0^2 = 2\sqrt{0} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

10

b) $\int \frac{(x^4 - 2x^3) dx}{(4x^2 + 3x - 1)(x - 1)}$

STUPANJ POLINOMA U BROJNIKU JE VEĆI OD STUPNJA POLINOMA U NAZIVNIKU \Rightarrow TREBA PRVO PODIJELITI, A ZATIM RASTAV NA PARC. RAZL.

$\frac{x^4 - 2x^3}{(4x^2 + 3x - 1)(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{4x^2 + 3x - 1}$

VIDI ROKO BURČUL

X

$x^4 - 2x^3 = A(x^2 + 3x - 1) + (Bx + C)(x - 1)$

$x = 1$
 $1 - 2 = A(1 + 3 - 1) + 0$

$x = 0$
 $0 = \frac{1}{3} - C / 3$

$x = -1$
 $1 + 2 = A(1 + 3 - 1) + (-B + C) \cdot (-2)$

$-1 = 3A$
 $A = -\frac{1}{3}$

$0 = 1 - 3C$
 $3C = 1$
 $C = \frac{1}{3}$

$3 = 1 + 2B - \frac{2}{3} / 3$

$9 = 3 + 6B - 2$

$8 = 6B$
 $B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

\Rightarrow

IME I PREZIME: Domagoj Knežević

BROJ INDEKSA: 57299

$$-\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}}{4x^2 + 3x - 1} dx$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} - \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{4x+1}{4x^2+3x-1} dx$$

$$= \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{12} \int \frac{(4x-1)dx}{x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{12} \left[4 \int \frac{x dx}{\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}} - \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}} \right] = \left| \begin{array}{l} x + \frac{3}{8} = t \Rightarrow x = t - \frac{3}{8} \\ dx = dt \end{array} \right|$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{12} \left[4 \int \frac{\left(t - \frac{3}{8}\right) dt}{t^2 - \frac{25}{64}} - \int \frac{dt}{t^2 - \frac{25}{64}} \right] =$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \left[\int \frac{t dt}{t^2 - \frac{25}{64}} - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{25}{64}} \right] - \frac{1}{12} \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{8}} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}}{x + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}} \right| + C \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} t^2 - \frac{25}{64} = z \\ 2t dt = dz \\ t dt = \frac{1}{2} dz \end{array} \right|$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} - \frac{3}{8} \frac{1}{\frac{5}{8}} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}}{x + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}} \right| \right] - \frac{1}{15} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}}{x + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}} \right| + C$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln \left| \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} \right| - \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}}{x + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}} \right| - \frac{1}{15} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}}{x + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}} \right| + C$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln \left| \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} \right| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}}{x + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}} \right| + C$$

5

IME I PREZIME: Domagoj Knežević

BROJ INDEKSA: 57299

$$2. \sqrt{x} = 2x + 5 \quad \text{i} \quad \sqrt{x} = -2x + 3$$

$$2x + 5 = -2x + 3$$

$$2x + 2x + 2 = 0 \quad ?$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

3. $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$T(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 = A$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 = C$$

$\Delta > 0$ $A < 0 \Rightarrow$ u tački T imamo maksimum ✓

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$f(0,0) = 16 - 0 - 0 = 16$$

15

$T_{\max}(0,0; 16)$

RAZINSKE KRIVULJE ?

5. $f(x) = e^{4x-3}$

$$f(1) = e^{4-3} = e^1 = e$$

$$f'(x) = e^{4x-3} \cdot 4 = 4e^{4x-3} \Rightarrow f'(1) = 4e \quad \checkmark$$

$$f''(x) = 0 + 4e^{4x-3} \cdot 4 = 16e^{4x-3} \Rightarrow f''(1) = 16e \quad \underline{20}$$

$$f'''(x) = 0 + 16e^{4x-3} \cdot 4 = 64e^{4x-3} \Rightarrow f'''(1) = 64e$$

$$f(x) = e + \frac{4e}{1!}(x-1) + \frac{16e}{2!}(x-1)^2 + \frac{64e}{3!}(x-1)^3$$

$$= e + 4e(x-1) + 8e(x-1)^2 + \frac{32}{3}e(x-1)^3 \quad \checkmark$$

↑
NEDOSTAJE

ISTE GREŠKE
KAO KOD
IVAN BAŠIĆ