MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

IME I PREZIME: MARINO ŽUBČIĆ

BROJ INDEKSA: 17-2-0216-2012

POPUNJAVA NASTAVNIK

Broj ↓ bodova

1. Koristeći Laplaceovu transformaciju nađi realnu funkciju f koja zadovoljava sljedeće uvjete: 20

$$f'''(t) + 4\,f'(t) = t, \quad f(0) = 5,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = 4.$$

2. Da li krivuljni integral u vektorskom polju $g = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ ovisi o putu integracije? 20

3. Izračunati volumen tijela omeđenog valjkom $x^2 + y^2 = 5^2$, ravninom $z = -5$ i parabolom $z = x^2 + y^2$. Napomena: obzirom da je više takvih tijela traži se ono najmanje koje sadrži ishodište. 20

4. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20

5. Neka je C cilindar zadan sa $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 5,\ 1 \leq y \leq 4\}$. Izračunati plošni integral 20

$$\iint\limits_{\partial C} y^2 x \,dydz$$

Ukupno: 60

④ $x^2 + y^2 = 4z,\ z \leq 5 \quad ; \quad \iint ds = ?$

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

$$I = \sqrt{1 \left(\frac{2}{4}x\right)^2 + \left(\frac{2}{4}y\right)^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{20}} \sqrt{1 + \frac{4}{16}\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}} \cdot r\,dr$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{20}} \sqrt{1 + \frac{1}{4}r^2} \cdot r\,dr = \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4}r^2 = t \\ \frac{1}{2}r\,dr = dt \\ r\,dr = 2dt \end{array} \right|$$

$$I = 2\pi \cdot \int_1^6 \cdot 2\sqrt{t}\,dt = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^6$$

$$I = 4\pi \cdot \frac{2}{3}\left(6^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8\pi}{3} \cdot 13.69 \approx 114.747$$

③ $x^2 + y^2 = 5^2$ $x = r\cos\varphi$ $x^2 + y^2 = r^2$

$z = -5$ $y = r\sin\varphi$

$z = x^2 + y^2$ $z = z$

$$V = \iiint dx\,dy\,dz$$

$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{5}\int_{-5}^{r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi$$ ✓

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$r \in [0, 5]$

$z \in [-5, r^2]$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} (r^2+5)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} + 5\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{5}}\,d\varphi$$

$$V = 2\pi\cdot\left[\left(\frac{25}{4}+\frac{25}{2}\right) - (0+0)\right]$$

$$V = 2\pi\cdot\frac{75}{4}$$

$$V = \frac{75}{2}\pi$$ ✓

⑤ $C = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 \leq 5,\ 1 \leq y \leq 4$

$\operatorname{div}\vec{w} = y^2 + 0 + 0 = r^2$? ?

KAKO JE DOŠLO DO OVE GREŠKE?

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} dr \int_1^4 y^2\cdot r\,dy$$ ✓

$$I = 2\pi\int_0^{\sqrt{5}} \cdot r \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_1^4\,dr$$

$$I = 2\pi\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{5}} r\,(4^3 - 1^3)\,dr$$

$$I = \frac{2\pi}{3}\cdot 63\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{5}}$$

5 - nastavak

$$I = 21\pi(5-0)$$

$$I = 105\pi$$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

IME I PREZIME: KANKO BRKIĆ **BROJ INDEKSA:** 17-1-0031-2011

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova

1. Koristeći Laplaceovu transformaciju nađi realnu funkciju f koja zadovoljava sljedeće uvjete: ~~20~~

$$f'''(t) + 4\,f'(t) = t, \quad f(0) = 5,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = 4.$$

2. Da li krivuljni integral u vektorskom polju $g = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ ovisi o putu integracije? 20

3. Izračunati volumen tijela omeđenog valjkom $x^2 + y^2 = 5^2$, ravninom $z = -5$ i parabolom $z = x^2 + y^2$. Napomena: obzirom da je više takvih tijela traži se ono najmanje koje sadrži ishodište. ~~20~~ 15

4. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. ~~20~~

5. Neka je C cilindar zadan sa $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 5,\ 1 \leq y \leq 4\}$. Izračunati plošni integral 20

$$\iint\limits_{\partial C} y^2 x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Ukupno: 35

① Koristeći Laplaceovu transformaciju nađi realnu funkciju f koja zadovoljava sljedeće uvjete.

$f'''(t)+4f'(t)=t,\quad f(0)=5,\ f'(0)=2,\ f''(0)=4.$

$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)+4fF(s)-4f=\frac{1}{s^2}$

$F(s)(s^3+4s)-5s^2-2s-4-20=\frac{1}{s^2}$

$F(s)(s^3+4s)=\frac{1}{s^2}+5s^2+2s+24$

$F(s)(s^3+4s)=\frac{5s^4+2s^3+24s^2+1}{s^2}$

$F(s)=\frac{5s^4+2s^3+24s^2+1}{s^3(s^2+4)}$

$\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{D+E}{s^2+4}\ /\cdot s^3(s^2+4)$

$A(s^2+4)+Bs(s^2+4)+Cs^2(s^2+4)+(Ds+E)\cdot s^3=$

$As^2+4A+Bs^3+4Bs+4Cs^4+4Cs^2+Ds^4+Es^3=$

$s^4(C+D)+s^3(B+E)+s^2(A+4C)+s(4B)+4A=$

$C+D=5$

$D+E=2$

$A+4C=24$

$4B=0 \quad B=0$

$4A=1 \quad A=\frac{1}{4} \quad D=-\frac{15}{16}$

$E=2 \quad C=\frac{95}{16}$

DAJE !

RANKO BRKIĆ 16.09.2015.

Brodostrojarstvo

② $y = yi - xj \qquad g = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\oint_c w\,dr = ? \qquad rot.w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ y & -x & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = k(1-(-1)) = 2k$ ✓

ovisi o kutu integracije

$rot\, g = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

20

(2) Da li krivuljni integral u vektorskom polju $g = yi - xj$ ovisi o putu integracije?

$$\cancel{g = yi - xj = \int}$$

$$\cancel{\int g = \int yi - \int xj}$$

$$\cancel{g\int 1 = yi\int 1 - xj\int 1}$$