

MATEMATIKA 1: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod!!

POPUNJAVA
NASTAVNIK
Broj ↓
bodova

IME I PREZIME: **MATE PARAC**

VRIJEME POČETKA:

MATIČNI BROJ STUDENTA (IZNAD SLIKE U INDEKSU): **17-1-0179-2013**

C1

1. Za funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$ temeljem ispitivanja funkcijskog tijeka napraviti skicu grafa funkcije.
2. Odrediti tok funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ i skicirati graf.
3. Navesti posebno lokalne, a posebno globalne, ekstreme funkcije $f(x) = 2x^2 - 2$. Posebno komentirati (ne)ograničenost.
4. Gaussovom metodom riješiti matricni sustav:

20 graf ~~13~~

20 graf

7+7+6

12+3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -8 & -9 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Provjeri uvrštavanjem!

5. Odrediti kada je $\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} + 1 > 0$.

15

6. Razvojem u Taylorov red oko nule provjeriti binomnu formulu za $f(x) = (x-2)^4$.

15

Ukupno:

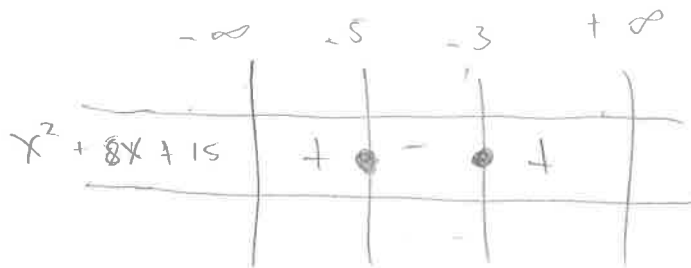
47

1) DOMENA

$$x^2 + 8x + 15 \geq 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -5$$



$$Df : \langle -\infty, -5 \rangle \cup [-3, +\infty \rangle$$

ASIMPTOTE

a) NEMA V.A.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 15}$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 15}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

NEMA H.A.



$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} /: x}{x /: x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 15} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 15 - x^2}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} /: x} = \frac{8}{2} = 4 \quad \boxed{y = x + 4}$$

D.K.A

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} /: x}{x /: x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 15} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} = -\infty$$

NEMA L.K.A.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 8x + 15}} \right) \cdot (2x + 8)$$

$$f'(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$$

ERSTREMI

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{(x+4)\sqrt{x^2+8x+15}}{(\sqrt{x^2+8x+15})^2} = 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

$$\sqrt{x^2 + 8x + 15} = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -5$$

	$-\infty$	-5	-3	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	
$f(x)$		↘	↗	
		MIN	MIN	

MIN $(-5, 0)$

MIN $(-3, 0)$

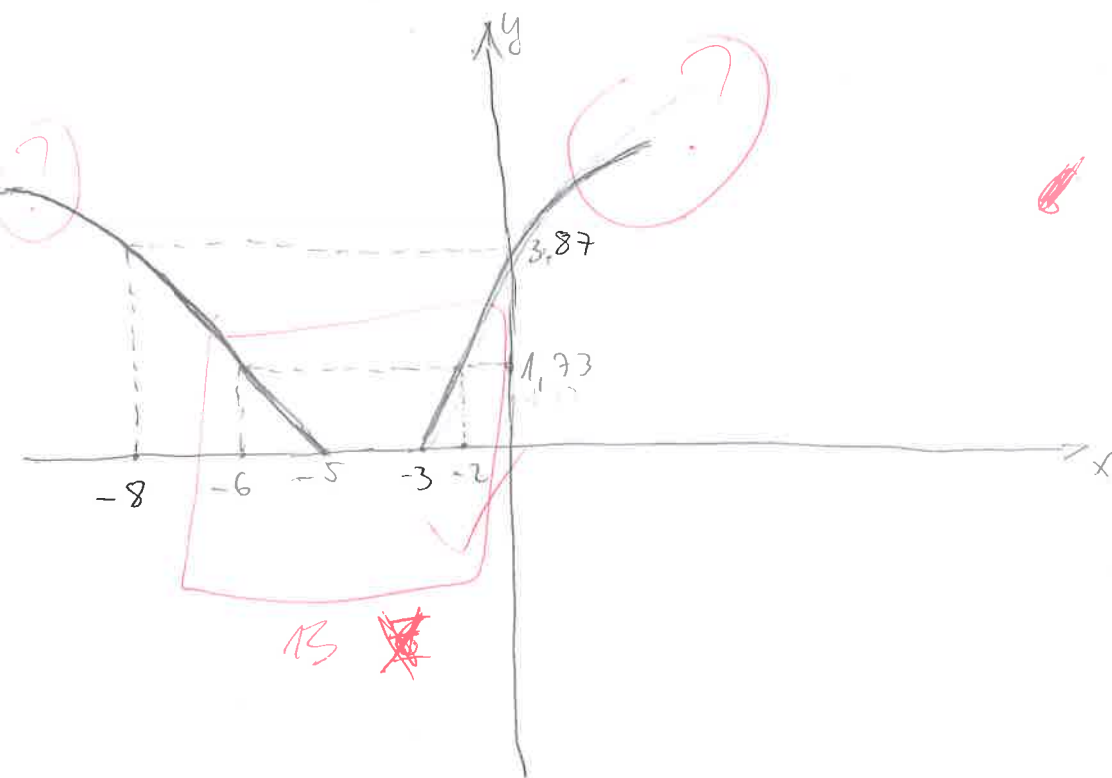
NISE U

DOMENI

Matematika 1

Ime i prezime: MATE PARAC'

Matični broj u indeksu: 17-1-0179-2013



$$\textcircled{2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$$

DOMENA

$$x^2 + 2 \neq 0$$

$$x^2 \neq -2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)' \cdot (x^2 + 2) - (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)'}^2$$

$$f'(x) = \frac{2 + (x^2 + 2)' - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2}$$

NULTOČKE

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 = \pm \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

$$f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \quad | \cdot (x^2 + 2)^2$$

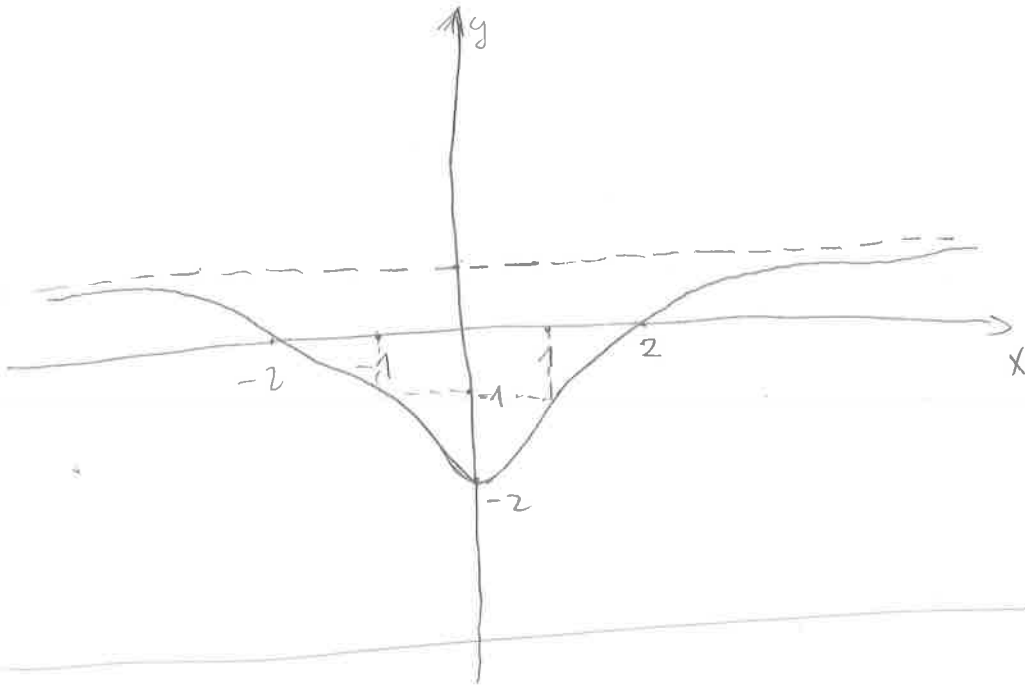
$$f'(x) = 12x = 0$$

$$x = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	-		+

U TOČKI $x=0$ POSTIJE
SE MINIMUM I ON IZNOSI

$$f(0) = \frac{-4}{2} = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} = 1$$

OBOSTRANA HORIZONTALNA ASIMP.

$$y = 1$$

NEMA KOSIH ASIMPTOTA

$$f'' = \frac{12(x^2 + 2)^2 - 12x \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4}$$

$$f'' = \frac{-35x^2 + 24}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f''(x) = 0$$

$$-35x^2 + 24 = 0$$

$$x^2 = \frac{24}{35}$$

$$x = \pm 0.82$$

	$-\infty$	-0.82	0.82	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	-
$f(x)$		∩	∪	∩

TOČKE INFLEKSIJE $(-0.82, -1.25)$ $(0.82, -1.25)$

3. $f(x) = 2^{x^2-2}$

$f'(x) = 2^{x^2-2} \ln 2 \cdot (2x)$

$f'(x) = 0$

$2^{x^2-2} \ln 2 \cdot 2x = 0$

$2^{x^2-2} = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

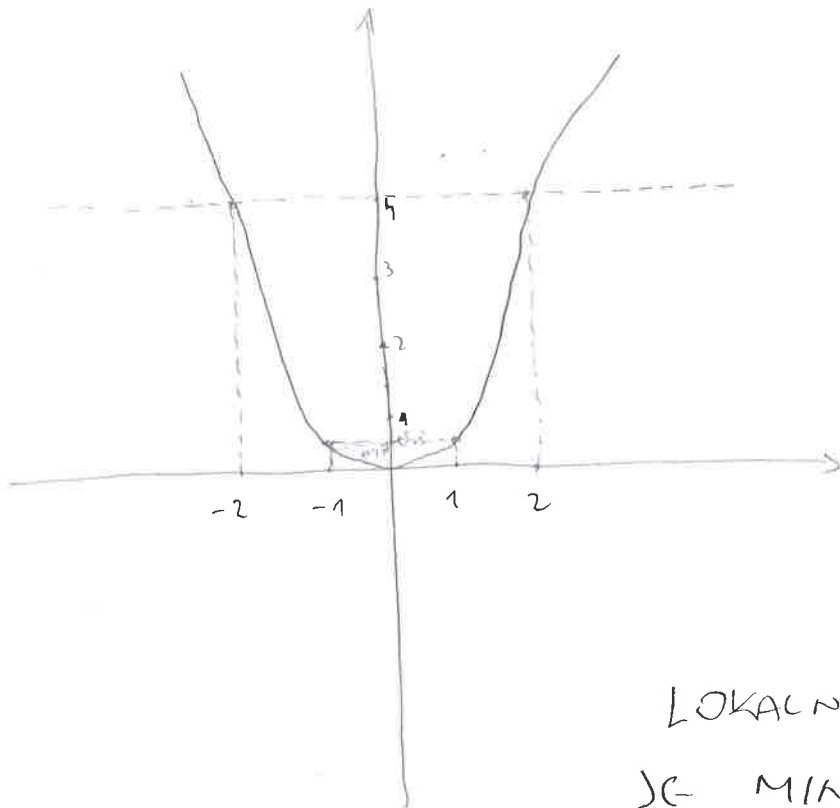
MATE PARAC

17-1-0179-2013

DOMENA
 $D_f = \mathbb{R}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↘	↗	

MIN (0, 0.25)



LOKALNI I GLOBALNI EKSTREM
JE MIN (0, 0.25)

NIJE OGRANICENA

FUNKCIJA JE OGRANICENA!
POSTOJI NA INTERVALU $[0.25, +\infty)$

MATEMATIKA 1: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj

POPUNJAVA
NASTAVNIK
Broj ↓
bodova

odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod

C1

IME I PREZIME: *Mate Hordov*

VRIJEME POČETKA:

MATIČNI BROJ STUDENTA (IZNAD SLIKE U INDEKSU): *17-1-0228-2013*

1. Za funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$ temeljem ispitivanja funkcijskog tijeka napraviti skicu grafa funkcije. 20 graf
2. Odrediti tok funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ i skicirati graf. 20 graf
3. Navesti posebno lokalne, a posebno globalne ekstreme funkcije $f(x) = 2x^2 - 2$. Posebno komentirati (ne)ograničenost. 7+7+6
4. Gaussovom metodom riješiti matricni sustav: 12+3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -8 & -9 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

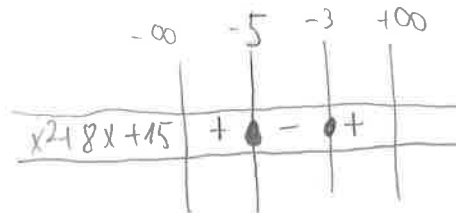
Provjeri vrštavanjem!

5. Odrediti kada je $\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} + 1 > 0$. 15

6. Razvojem u Taylorov red oko nule provjeriti binomnu formulu za $f(x) = (x-2)^4$. 15

Ukupno:

① $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$



$$Df : \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle -3, +\infty \rangle$$

Domena

$$x^2 + 8x + 15 \geq 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -5$$

2) Asimptota

Prema V. A.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 15}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} = \frac{1}{1} = +\infty$$

Prema H. A.

$$g) K = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 15 - x^2}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\boxed{y = x + 4}$$

D.K.A.

$$K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x} = -\infty$$

Wima L.K.A.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 8x + 15}} \cdot (2x + 8)$$

$$K'(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$$

Extremi.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{(x+4)\sqrt{x^2+8x+15}}{\sqrt{x^2+8x+15}} = 0$$

$$\sqrt{x^2+8x+15}$$

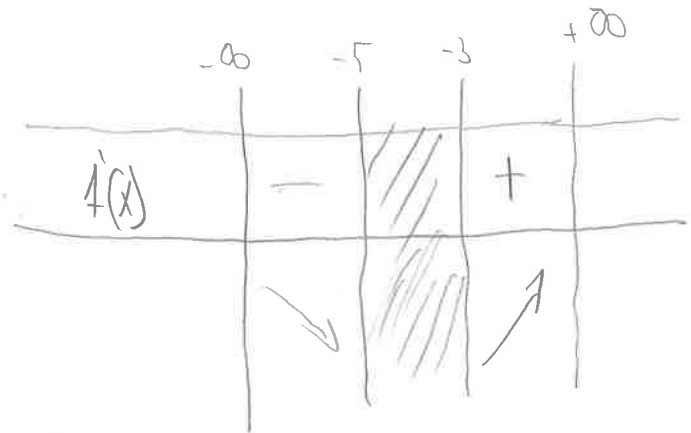
$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

$$\sqrt{x^2 + 8x + 15} = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -5$$



Min $(-5, 0)$

Min $(-3, 0)$

Matf Hordov

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 2}$$

Domena

$$x^2 + 2 \neq 0$$

$$x^2 \neq -2$$

Asimptota

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x = 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2) - (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + 4x - \cancel{2x^3} + 8x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \cdot 1 \cdot (x^2 + 2)^2$$

$$f'(x) = 12x = 0$$

$$x = 0$$

	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$			
$f'(x)$		\searrow	\nearrow
		-	+

V točki $x = 0$ postizel se minimum i on iznosi

$$f(0) = \frac{-4}{2} = -2$$

GRAF?

MATEMATIKA 1: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj

POPUNJAVA
NASTAVNIK
Broj ↓
bodova

odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod!!

C1

IME I PREZIME: **LUKA ŠATALIĆ**

VRIJEME POČETKA: **08:00**

MATIČNI BROJ STUDENTA (IZNAD SLIKE U INDEKSU):

17-2-0266-2013
0269075417

1. Za funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$ temeljem ispitivanja funkcijskog tijeka napraviti skicu grafa funkcije. 20 graf
2. Odrediti tok funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ i skicirati graf. 20 graf
3. Navesti posebno lokalne, a posebno globalne ekstreme funkcije $f(x) = 2x^2 - 2$. Posebno komentirati (ne)ograničenost. 7+7+6
4. Gaussovom metodom riješiti matrični sustav: 12+3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -8 & -9 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Provjeri uvrštavanjem!

5. Odrediti kada je $\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} + 1 > 0$. 15

6. Razvojem u Taylorov red oko nule provjeriti binomnu formulu za $f(x) = (x-2)^4$. 15

Ukupno:

~~15~~ 22

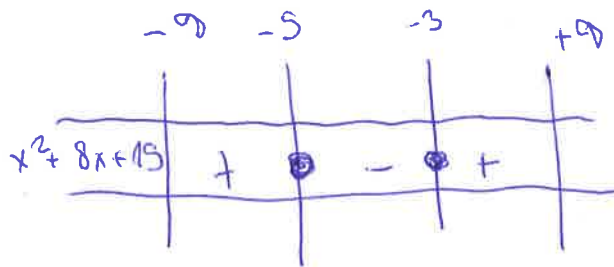
1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$

1) Domena

$$x^2 + 8x + 15 \geq 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -5$$



$$Df: \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle -3, +\infty \rangle$$

2) ASIMPTOTE

a) Nema k. A

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} \cdot \sqrt{x^2 + 8x + 15}}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 15}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} = \frac{1}{0} = +\infty$

c) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}{x} = \frac{1}{1} = 1$

NEMA H.A

~~$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15} = \sqrt{x^2 + 8x + 15} - x$~~
 ~~$\sqrt{x^2 + 8x + 15} = \sqrt{x^2 + 8x + 15} - x$~~
 ~~$\sqrt{x^2 + 8x + 15} = \sqrt{x^2 + 8x + 15} - x$~~

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} \stackrel{\text{lim}}{=} \frac{x^2 + 8x + 15 - x^2}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} \stackrel{/:x}{=} \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} + 1} \stackrel{/:x}{=} \frac{8}{2} = 4 \quad \boxed{y = x + 4}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}{x} \stackrel{/:x}{=} \frac{1}{-1} = -1$$

GRAF ↗

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} - x} = -\infty$$

NEMA LKA.

6. $f(x) = (x-2)^4$ $f(0) = 16$
 $f'(x) = 4(x-2)^3$ $f'(0) = -32$
 $f''(x) = 12(x-2)^2$ $f''(0) = 48$
 $f'''(x) = 24(x-2)$ $f'''(0) = -48$
 $f^{IV}(x) = 24$ $f^{IV}(0) = 24$

$$(x-2)^4 = 16 + (-32)x + \frac{48x^2}{2} + \frac{(-48)x^3}{6} + \frac{24x^4}{24}$$

$$= 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$$

✓

$$\textcircled{3} f(x) = 2^{x^2-2}$$

$$f'(x) = 2^{x^2-2} \ln 2 \cdot (x^2-2)'$$

$$= 2^{x^2-2} \ln 2 \cdot 2x$$

$$f'(x) = 0$$

$$2^{x^2-2} \cdot \ln 2 \cdot 2x = 0$$

$$\frac{2^{x^2-2}}{2^{x^2-2}} = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

~~GRAF~~

DOMENA
 $Df = \mathbb{R}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↘	↗	

MIN(0, 0.25)

DA LI JE OVO
 LOKALNI ILI GLOBALNI
 * MINIMUM *

ŠTO SE MOŽE REĆI O
 (NE) OMEĐENOSTI?

7

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} \stackrel{/:x^2}{=} 1$

0,44 OBOSTRANA HORIZONTALNA ASIMPTOTA

NEMA KOJIK ASIMPTOTA

GDJE JE f' ?

$$f''(x) = \frac{12(x^2 + 2)^2 - 12x \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4}$$

$$= \frac{(x^2 + 2) [12(x^2 + 2) - 48x^2]}{(x^2 + 2)^4}$$

$$= \frac{12x^2 + 24 - 48x^2}{(x^2 + 2)^3} = \frac{-36x^2 + 24}{(x^2 + 2)^3}$$

$f''(x) = 0$
 $-36x^2 + 24 = 0$
 $x^2 = \frac{24}{36}$
 $x = \pm 0.82$

	$-\infty$	-0.82	0.82	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	-	
$f(x)$	\cap	\cup	\cap	

TOČKE INFLEKCIJE:

$(-0.82, -1.25) \quad (0.82, -1.25)$

GRAF ?