MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

Popunjava nastavnik

IME I PREZIME: RIJEŠENI ZADACI

BROJ INDEKSA:

		Broj ↓ bodova
1.	Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$.	20
2.	Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 dx + y^2 dy + x dz$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu.	20
3.	Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu.	20
4.	Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$.	20
5.	Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: $$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$	20

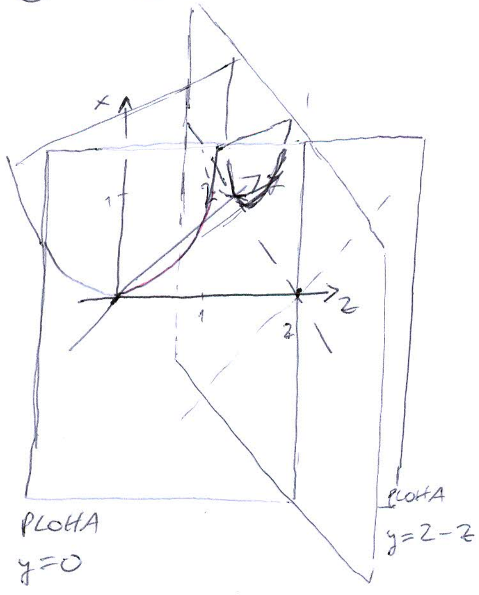
Ukupno:

---

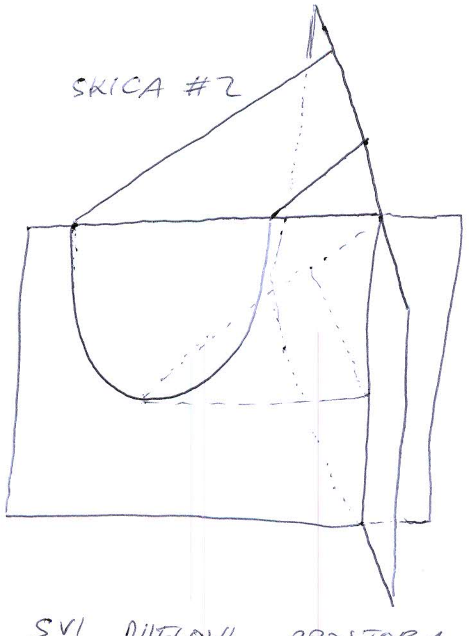
(3) VIDI STIPIĆ

(5) VIDI STIPIĆ

(4) SKICA #1



SKICA #2



SVI DIJELOVI PROSTORA SU NEOGRANIČENI POSTAVLJENIM PLOHAMA. STOGA INTEGRAL NE POSTOJI.

---

(1) EKSPLICITNA JEDNADŽBA PLOHE $z = \frac{x^2+y^2}{4}$

PARAMETRIZACIJA $r(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x^2+y^2}{4} \end{pmatrix}$

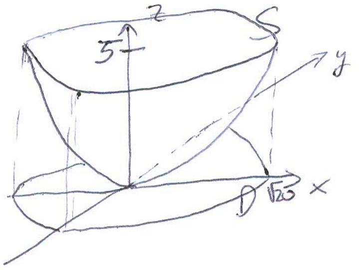
$\partial_x r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2x}{4} \end{pmatrix}$ $\quad \partial_y r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$

NORMALA:

$\vec{n} = \partial_x r \times \partial_y r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -y/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{n}\| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}$

NASTAVAK IZA...

① NASTAVAK



KADA JE $z=5$ TADA JE KRUŽNICA $x^2+y^2=20$ NA S

STOGA JE D OMEĐENO KRUŽNICOM RADIJUSA $\sqrt{20}$

$$P=\iint_S 1\,dS=\iint_D 1\,\|\vec{n}\|\,dx\,dy=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4}}\,dx\,dy=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{PRELAZAK U}\\ \text{POLARNE}\\ \text{KOORDINATE}\end{array}\right\}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{20}} r\sqrt{1+\frac{r^2}{4}}\,dr\,d\varphi=2\pi\left[\frac{4}{3}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{20}}$$

$$=2\pi\left(\frac{4}{3}\left(1+\frac{20}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot 6^{\frac{3}{2}}$$

$$=16\pi\sqrt{6}$$

---

② STOKESOVA FORMULA

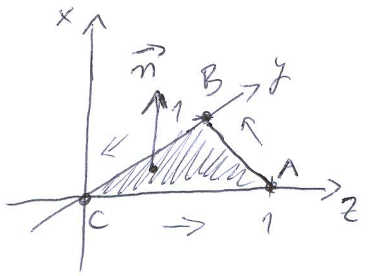
$$f=\begin{pmatrix} z^2\\ y^2\\ x\end{pmatrix}\qquad \operatorname{rot} f=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} z^2\\ y^2\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2z-1\\ 0\end{pmatrix}$$

$\partial_x \quad z^2$

$\partial_y \quad y^2$

$$\int_{\partial \overset{\frown}{ABC}} f\,dr=\iint_{\Delta \overset{\frown}{ABC}} \operatorname{rot} f\,dS=(*)$$

TROKUT ABC



PARAMETRIZACIJA

$$r(y,z)=\begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

DOMENA

$$D_{y,z}\left\{\begin{array}{l} z\in[0,1]\\ y\in[0,1-z]\end{array}\right.$$

NORMALA

$$\vec{n}=\partial_y r\times\partial_z r=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

VIZUALNOM INSPEKCIJOM SKICE VIDIMO DA JE $\vec{n}$ SUKLADNOG USMJERENJA SA $\partial\overset{\frown}{ABC}$ KAKO JE ZADANO

$$\Rightarrow\quad (*)=\iint_D \begin{pmatrix}0\\ 2z-1\\ 0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}dy\,dz=\iint_D 0\,dy\,dz=0$$