MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

Ime i prezime: RIJEŠENI ZADACI **Broj indeksa:**

Popunjava nastavnik — Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20
2. Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 dx + y^2 dy + x dz$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20
3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20
4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$

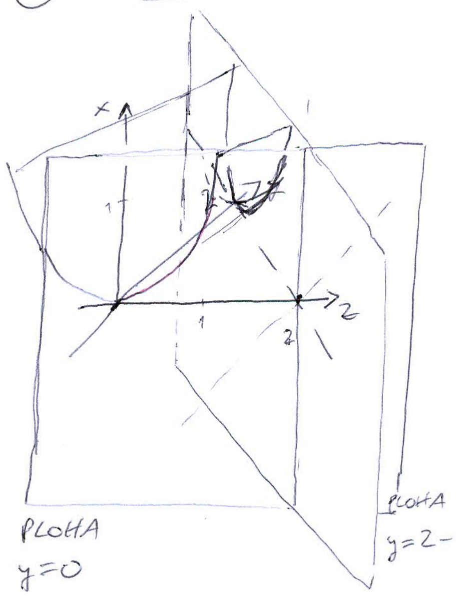
Ukupno:

---

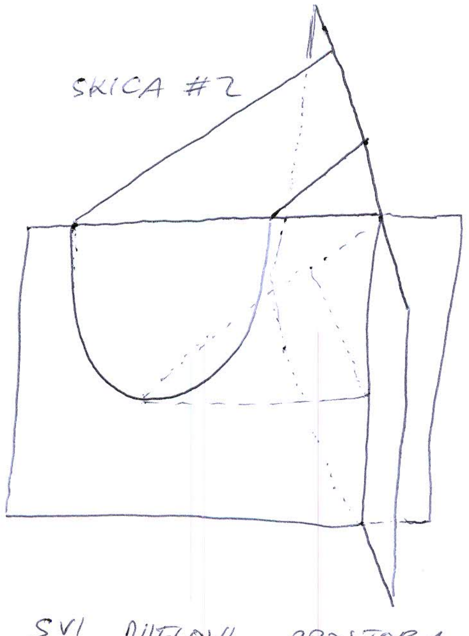
③ VIDI STIPIĆ

⑤ VIDI STIPIĆ

④ SKICA #1



SKICA #2



SVI DIJELOVI PROSTORA SU NEOGRANIČENI POSTAVLJENIM PLOHAMA. STOGA INTEGRAL NE POSTOJI.

---

① EKSPLICITNA JEDNADŽBA PLOHE $z = \dfrac{x^2+y^2}{4}$

PARAMETRIZACIJA $r(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x^2+y^2}{4} \end{pmatrix}$

$\partial_x r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2x}{4} \end{pmatrix}$ $\quad \partial_y r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$

NORMALA:

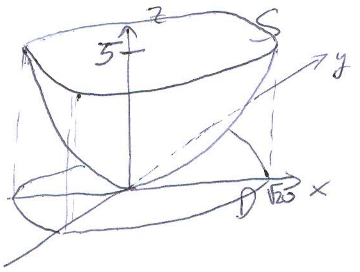
$\vec{n} = \partial_x r \times \partial_y r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -y/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{n}\| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}$

NASTAVAK IZA...

① NASTAVAK

KADA JE $z=5$ TADA JE KRUŽNICA $x^2+y^2=20$ NA S

STOGA JE D OMEĐENO KRUŽNICOM RADIJUSA $\sqrt{20}$



$$P=\iint\limits_S 1\,dS=\iint\limits_D 1\,\|\vec{n}\|\,dx\,dy=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4}}\,dx\,dy=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{PRELAZAK U}\\ \text{POLARNE}\\ \text{KOORDINATE}\end{array}\right\}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{20}} r\sqrt{1+\frac{r^2}{4}}\,dr\,d\varphi=2\pi\left[\frac{4}{3}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{20}}$$

$$=2\pi\left(\frac{4}{3}\left(1+\frac{20}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot 6^{\frac{3}{2}}$$

$$=16\pi\sqrt{6}$$

---

② STOKESOVA FORMULA

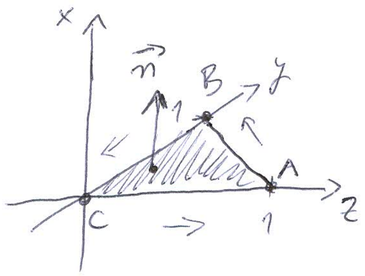
$$f=\begin{pmatrix} z^2\\ y^2\\ x\end{pmatrix}\qquad \operatorname{rot} f=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} z^2\\ y^2\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2z-1\\ 0\end{pmatrix}$$

∂_x z^2

∂_y y^2

$$\int\limits_{\partial\overrightarrow{ABC}} f\,dr=\iint\limits_{\Delta\overrightarrow{ABC}}\operatorname{rot} f\,dS=(*)$$

TROKUT ABC



PARAMETRIZACIJA

$$r(y,z)=\begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

DOMENA

$$D_{y,z}\begin{cases} z\in[0,1]\\ y\in[0,1-z]\end{cases}$$

NORMALA

$$\vec{n}=\partial_y r\times\partial_z r=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

VIZUALNOM INSPEKCIJOM SKICE VIDIMO DA JE $\vec{n}$ SUKLADNO G USMJERENJA SA $\partial\overrightarrow{ABC}$ KAKO JE ZADANO

$$\Rightarrow\quad (*)=\iint\limits_D\begin{pmatrix}0\\ 2z-1\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}dy\,dz=\iint\limits_D 0\,dy\,dz=0$$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.	POPUNJAVA NASTAVNIK
IME I PREZIME: LUKA STIPIĆ **BROJ INDEKSA:** 17-2-0083-2011	Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20
2. Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 dx + y^2 dy + x dz$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20
3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20
4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$

Ukupno: 40

3.) $f(x,y)=x^2$

$r=5$

$T(0,0)$

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$dxdy = r\,dr\,d\varphi$

$\varphi\in[0,2\pi]$

$r\in[0,5]$

$$\iint x^2 dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^5 (r\cos\varphi)^2 r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^5 (r^2\cdot\cos^2\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 r^3\cdot\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\cdot\cos^2\varphi\right)\Big|_0^5 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{625}{4}\cdot\cos^2\varphi\right)d\varphi = \left|\ \cos^2\varphi = \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\ \right|$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{625}{4}\cdot\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{625}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)d\varphi = $$

$\frac{1}{2}\int\cos 2\varphi = \left| \begin{array}{l} 2\varphi = t \\ 2d\varphi = dt \\ d\varphi = \frac{dt}{2} \end{array}\right.$

$\frac{1}{2}\int\cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int\cos t\,dt$

$= \frac{1}{4}\sin t$

$= \frac{1}{4}\sin 2\varphi$

$$= \left(\frac{625}{16}\sin 2\varphi + \frac{625}{8}\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{625}{8}\cdot 2\pi = \frac{625}{4}\ //$$

4) $f(x,y,z)=z$

$x=z^2$

$y=0$

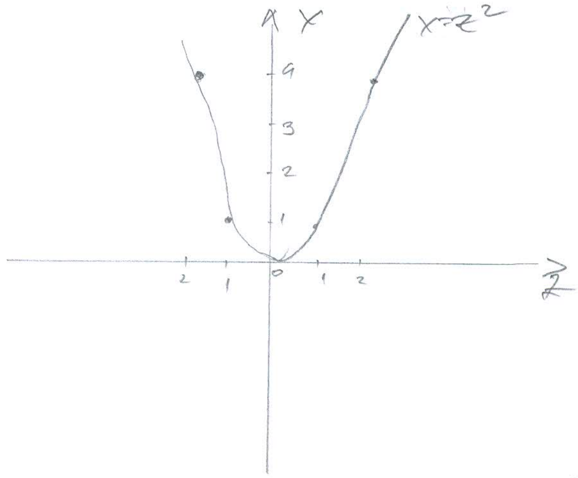
$y=2-z$

$y\in[0,2-z]$

$x=z^2$

$x=4$

z	0	-1	1	-2	2
$x=z^2$	0	1	1	4	4



$y=2-z$

$y=0$

$0=2-z$

$z=2$

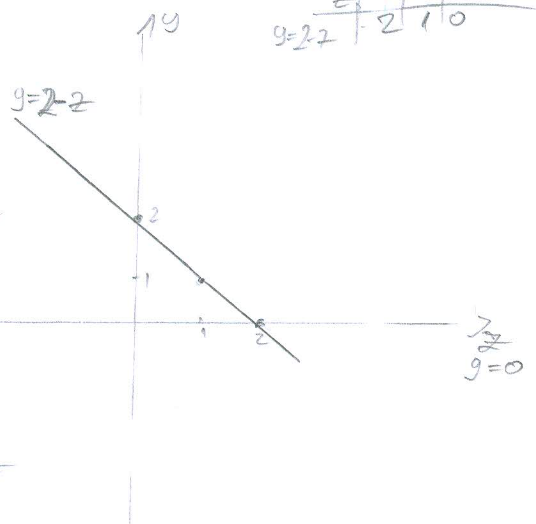
$z\in[0,2]$

$x\in[z^2,4]$

NIJE DOBRA VIZUALIZACIJA.
OVO JE NEOGRANIČENO
PODRUČJE U PROSTORU,
PA INTEGRAL NE POSTOJI.
DRUGIM RIJEČIMA, MOŽEMO REĆI
DA SU GRANICE INTEGRACIJE
POGREŠNO POSTAVLJENE.

$\emptyset$

z	0	1	2
$y=2-z$	2	1	0



$$\int_0^2\int_0^{2-z}\int_{z^2}^{4} z\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^{2-z}\left(4z-z^3\right)dy\,dz$$

$$=\int_0^2\left(\left(4z-z^3\right)\cdot\left(2-z-0\right)\right)dz=\int_0^2\left(8z-4z^2-2z^3+z^4\right)dz$$

$$=\left(4z^2-\frac{4}{3}z^3-\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^2=\frac{56}{15}$$

5) $y'''(t)+y''(t)+y'(t)+y(t)=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=2$, $y''(0)=4$

$s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)+s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)+Y(s)=0$

$s^3Y(s)-5s^2-2s-4+s^2Y(s)-5s-2+sY(s)-5+Y(s)=0$

$Y(s)(s^3+s^2+s+1)=5s^2+7s+11 \quad / \cdot \frac{1}{s^3+s^2+s+1}$

$Y(s)=\frac{5s^2+7s+11}{s^3+s^2+s+1}=\frac{5s^2+7s+11}{(s+1)\cdot(s^2+1)}$

$\frac{5s^2+7s+11}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1} \quad / \cdot (s+1)(s^2+1)$

$5s^2+7s+11=A\cdot(s^2+1)+(Bs+C)\cdot(s+1)$

$5s^2+7s+11=As^2+A+Bs^2+Bs+Cs+C$

$A+B=5$

$B+C=7$

$-A+C=-11$

$B-A=7-11$

$B-A=-4$

$-A+B=-4$

$A+B=5$

$2B=1$

$B=\frac{1}{2}$

$A+\frac{1}{2}=5$

$A=5-\frac{1}{2}$

$A=\frac{9}{2}$

$\frac{1}{2}+C=7$

$C=7-\frac{1}{2}$

$C=\frac{13}{2}$

$Y(s)=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}s+\frac{13}{2}}{s^2+1}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

$y(t)=\frac{9}{2}\cdot e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{13}{2}(\sin t)$ ✓

$y(0)=\frac{9}{2}\cdot e^{-0}+\frac{1}{2}\cos 0+\frac{13}{2}\sin 0$

$=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$ // ✓

$y'(t)=-\frac{9}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t+\frac{13}{2}\cos t$

$y'(0)=-\frac{9}{2}e^{0}-\frac{1}{2}\sin 0+\frac{13}{2}\cos 0$

$y'(0)=2$ // ✓

$y''(t)=\frac{9}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t-\frac{13}{2}\sin t$

$y''(0)=\frac{9}{2}e^{-0}-\frac{1}{2}\cos 0-\frac{13}{2}\sin 0$

$=4$ // ✓

PROVJERA:

$$y'''(t) = -\frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{13}{2}\cos t$$

$$y''' + y'' + y' + y = \underbrace{-\frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{13}{2}\cos t}_{=y'''} + \underbrace{\frac{9}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{13}{2}\sin t}_{=y''}$$

$$+ \underbrace{-\frac{9}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t + \frac{13}{2}\cos t}_{=y'} + \underbrace{\frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{13}{2}\sin t}_{=y}$$

$$= 0 \checkmark$$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

IME I PREZIME: ŠIME MATANOVIĆ **BROJ INDEKSA:** 57655

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. ~~20~~
2. Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}y + x \mathrm{d}z$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20
3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. ~~20~~
4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. ~~20~~
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: ~~20~~

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$

Ukupno: ~~0~~

5. $y''' + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$ $y(0)=5$ $y'(0)=2$ $y''(0)=4$

$$s^3Y(s) - s^2\underbrace{y(0)}_{5} - s\underbrace{y'(0)}_{2} - \underbrace{y''(0)}_{4} + s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{5} - \underbrace{y'(0)}_{2} + sY(s) - \underbrace{y(0)}_{5} + Y(s) = 0$$

$$s^3Y(s) - 5s^2 - 2s - 4 + s^2Y(s) - 5s - 2 + sY(s) - 5 + Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^3+s^2+s+1) = 5s^2 + 2s + 4 + 5s + 2 + 5$$

$$Y(s)(s^3+s^2+s+1) = 5s^2 + 7s + 11$$

$$Y(s) = \frac{5s^2+7s+11}{s^3+s^2+s+1} \qquad Y(s) = \frac{5s^2+7s+11}{s^2(s+1)(s+1)} \qquad Y(s) = \frac{5s^2+7s+11}{s^2(s+1)+(s+1)} =$$

PROVJERA

$$\frac{7}{s} + \frac{11}{s^2} + \frac{-7s-6}{s^2+1} = \frac{7s(s^2+1)+11(s^2+1)+s^2(-7s-6)}{s^2(s^2+1)} = \frac{7s^3+7s+11s^2+11-7s^3-6s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{5s^2+7s+11}{s^2(s^2+1)}$$ √ O.K.

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \quad / \cdot \ldots$$

POGREŠNA FAKTORIZACIJA
$x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1)+x+1 = (x+1)(x^2+1)$

$$5s^2+7s+11 = As(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s^2)$$

$$\cancel{Y(s) = \frac{7}{s} + \frac{11}{}}$$

$$5s^2+7s+11 = As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2$$

$$Y(s) = 7\cdot\frac{1}{s} + 11\cdot\frac{1}{s^2} - 7\cdot\frac{1}{s^2+1} - 6\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$0 = A + C$ → $A + C = 0$

$5 = B + D$

$7 = A$ → $\boxed{A = 7}$ $7 + C = 0$ $\boxed{C = -7}$

$11 = B$ → $\boxed{B = 11}$

$5 = 11 + D$

$11 + D = 5$

$D = 5 - 11$

$\boxed{D = -6}$

$$\boxed{Y'(s) = 7 + 11t - 7\cos(t) - 6\sin(t)}$$

$\cancel{\emptyset}$ $4\sqrt{5}$

PROVJERA: $y(0) = 7 + 11\cdot 0 - 7\cos 0 - 6\sin 0 = 7 - 7 = 0$ ×

8.

1. $x^2+y^2=4z$ $z \leq 5$ $x^2+y^2=r^2$

$r^2 = 4z$ $4z = r^2 /:4$

$r^2 = 4\cdot 5$ $z = \frac{1}{4}r^2$ ✓

$r^2 = 20$

$r = \sqrt{20}$ ✓

$r = \sqrt{4\cdot 5}$

$r = 2\sqrt{5}$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$r \in [0, 2\sqrt{5})$

$z \in [\frac{1}{4}r^2, 5]$

POGREŠAN TIP INTEGRALA

TRAŽI SE PLOŠNI INTEGRAL VEKTORSKE FUNKCIJE!

$\cancel{\emptyset}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{5}}\int_{\frac{1}{4}r^2}^{5} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{5}} r\left(5-\frac{1}{4}r^2\right)d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{5}} 5r - \frac{1}{4}r^3\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} 5\frac{r^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\sqrt{5}} d\varphi = \int_0^{2\pi} 5\cdot\frac{(2\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(2\sqrt{5})^4}{4}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 5\cdot\frac{4\cdot 5}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{16\cdot 5^2}{4}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} 50 - \frac{1}{4}\cdot 100\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 50 - \frac{100}{4}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{200-100}{4}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{100}{4}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 25\,d\varphi = 25\cdot 2\pi = \boxed{50\pi}$$

SIME MATANOVIĆ
57635

4.] $f(x,y,z)=z$ $x=z^2$, $y=0$ $y=2-z$

$x=2^2$

$x=\pm 4$

$0=2-z$
$2-z=$
$-z=-2\ /\cdot(-1)$
$\boxed{z=2}$

RIJEČ JE O NEOGRANIČENOM PODRUČJU

PA INTEGRAL NE POSTOJI

$x\in[4,-4]$
$y\in[0,2-z]$
$z\in[0,2]$

$$\int_4^{-4}\int_0^2\int_0^{2-z} z\,dx\,dy\,dz=\int_4^{-4}\int_0^2 z(2-z)\,dx\,dz=$$

$$=\int_4^{-4}\int_0^2 2z-z^2\,dx\,dz=\int_4^{-4}\left.2\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right|_0^2 dx=$$

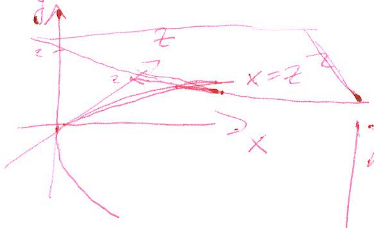
$$=\int_4^{-4}2^2-\frac{2^3}{3}dx=\int_4^{-4}4-\frac{8}{3}dx=\left.4x-\frac{8}{3}x\right|_4^{-4}=$$

$$=4\cdot(-4)-\frac{8}{3}(-4)-\left(4\cdot4-\frac{8}{3}\cdot4\right)=$$

$$=-16+\frac{32}{3}-16+\frac{32}{3}=\frac{-48+32-48+32}{3}$$

$$=\frac{-48}{}\qquad=\frac{-96+64}{3}=-\frac{32}{3}$$

$$\boxed{=-10{,}666}$$



NEOGRANIČENO PODRUČJE

ŠIME MATANOVIĆ
57655
7.02.2014

3.] $f(x,y)=x^2$ $r=5$

$\cancel{x = r\cos\varphi}$
$\cancel{y = r\sin\varphi}$

$\cancel{xdxd\varphi dy}$

$\cancel{\varphi \in [0, 2\pi)}$
$\cancel{x \in}$
$\cancel{y \in}$

$\varphi \in [0, 2\pi]$
$r \in [0, 5]$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^5 r\,dr\,d\varphi = \cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^5 r} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^5 = \int_0^{2\pi} \frac{5^2}{2}d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{25}{2}d\varphi$$

$$= \int_0^{} \frac{25}{2}\cdot 2\pi = \boxed{25\pi}$$

X

X

GDJE JE f?

$\cancel{0}$

4.] $f(x,y,z)=z$ $x=z^2$, $y=0$ $y=2-z$

$z^2=x$ $x=\pm\sqrt{z}$

$z=\pm\sqrt{x}$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}}\int_0^{2-z} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}} r(2-z)\,d\varphi\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}} 2r - z\cdot r$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$
$x \in [\sqrt{x}, -\sqrt{x}]$
$y \in [0, 2-z]$

$f(x,y,z)=z$ $\quad x=z^2,\ y=0\ \ y=2-z$ ŠIME MATANOVIĆ 57657

$\varphi \in [$

$x=2^2$

$\boxed{x=4}$

$z^2=x$

$z^2=4$

$z=\sqrt{4}\quad z=\pm 2$

$0=2-z$

$2-z=0$

$-z=-2\ /\cdot(-1)$

$z=2$

$\cancel{x\in[z^2,4]}$
$\cancel{y\in[0,2-z]}$
$\cancel{z\in[0,2]}$

$x\in[z^2,4]$
$y\in[0,2-z]$
$z\in[2,-2]$

$\int$

$$\int_{z^2}\int_2^{-2}\int_0^{2-z}\int_{z^2}^{4} z\,dz\,dx\,dy=\int_2^{-2}\int_0^{2-z} z(4-z^2)\,d\cancel{x}dy$$

$$=\int_2^{-2}\int_0^{2-z} 4z-z^3\,dx\,dy=\int_2^{-2} 4\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\Big|_0^{2-z}dy=$$

$$=\int_2^{-2}\left(2z^2-\frac{1}{4}\cdot z^4\right)\Big|_0^{2-z}dy=\int_2^{-2} 2(2-z)^2-\frac{1}{4}\cdot(2-z)^4\,dy=$$

$$=\int_2^{-2}$$

$\cancel{1\pm\sqrt{1-8}\quad \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad z^2-z+2=0}$

$f(x,y,z)=z$ $\quad x=z^2$

$y=0\ \ y=2-z$

$x\in[z^2,4]$
$y\in[0,2-z]$
$z\in[0,2]$

$x=z^2$

$\boxed{x=4}$

$0=2-z$

$2-z=0$

$-z=-2$

$\boxed{z=2}$

$$\int_0^2\int_4^{z^2}\int_0^{2-z} z\,dz\,dx\,dy=\int_0^2\int_4^{z^2} z(2-z)\,dx\,dz=\int_0^2\int_4^{z^2} 2z-z^2\,dx\,dz=$$

$$=\int_0^2 \frac{2z^3}{3}-\frac{z^3}{3}\Big|_4^{z^2}dz=\int_0^2 \frac{\cancel{2}}{3}\,2$$

$$\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_{z^2}^4 z\,dz\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2-z} z(4-z^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2-z} 4z - z^3\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^4 4\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\Big|_0^{2-z} dx = \int_4^4 \frac{4}{2}(2-z)^2 - \frac{1}{4}(2-z)^4$$

$$\left(2-z\right)(2-z)(2-z)(2-z)$$

$$16 - z^3$$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

Popunjava nastavnik
Broj ↓ bodova

IME I PREZIME: IVAN ŠIKIĆ

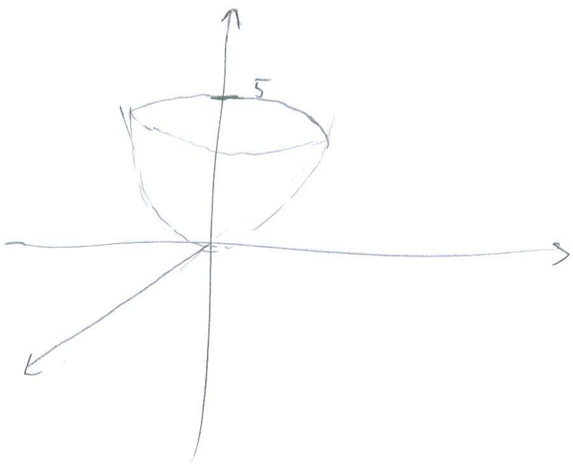
BROJ INDEKSA: 17-1-0014-2010

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20
2. Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 dx + y^2 dy + x dz$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20
3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20
4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5, \, y'(0) = 2, \, y''(0) = 4\,.$$

Ukupno: Ø

1.



$x^2 + y^2 = 4z \, , \, z \leq 5$

$x^2 + y^2 = r^2$

$r^2 = 4z$

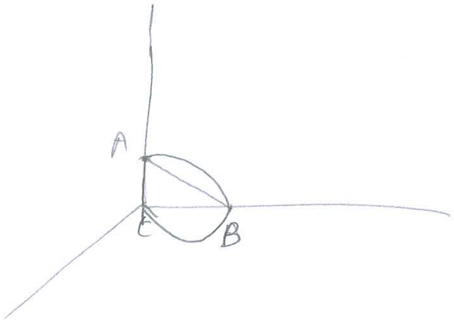
$r = \sqrt{2z}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}}$$

POGREŠAN TIP INTEGRALA

Ø

2.



$$w = \begin{bmatrix} z^2 \\ y^2 \\ x \end{bmatrix} \qquad -f = \begin{bmatrix} -z^2 \\ -y^2 \\ -x \end{bmatrix} \, ?$$

$1^\circ \ \frac{df}{dx} \, , \ -z^2 \cdot 0 + c = 0$

$2^\circ \ \frac{df}{dy} \, , \ -\frac{y^3}{3} + c_1$

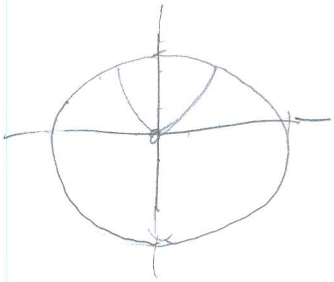
$3^\circ \ \frac{df}{dz} \, , \ x \cdot 0 + c_2 = 0$

$$-\int_1^0 \frac{y^3}{3} dy + c = -\frac{1}{3}$$

X

3. $f(x,y) = x^2$

$r = 5$



$\int x^2 dx + c$

$\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{5} x^2 dx = 25}$

X

4. $f(x,y,z)$

$x = z^2$

$y = 0$

$y = 2 - z$

$y - 2 = -z$

$z = 2 - y$

$u = \begin{bmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2-y \end{bmatrix} - f = \begin{bmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2-y \end{bmatrix}$ X

$1^\circ \quad \frac{df}{dx} = z^2 x$

$2^\circ \quad \frac{df}{dy} = 0$

$3^\circ \quad \frac{df}{dz} = 2z$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano. **IME I PREZIME:** BORIS KREŠIĆ **BROJ INDEKSA:** 17-1-0022-2010	POPUNJAVA NASTAVNIK Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20

2. Izračunati $\int_{\overset{\frown}{ABC}} z^2 dx + y^2 dy + x dz$ gdje je $\overset{\frown}{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20

3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20

4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5, y'(0) = 2, y''(0) = 4.$$

Ukupno: Ø

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano. **IME I PREZIME:** MARIN SMOLIĆ **BROJ INDEKSA:** 55376/2007	POPUNJAVA NASTAVNIK Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20

2. Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}y + x \mathrm{d}z$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20

3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20

4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\, y'(0) = 2,\, y''(0) = 4\,.$$

Ukupno:

∅

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.	POPUNJAVA NASTAVNIK Broj ↓ bodova
IME I PREZIME: STIPE DUŠEVIĆ BROJ INDEKSA: 17-2-0051-2010	

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20

2. Izračunati $\int_{\overset{\frown}{ABC}} z^2 \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}y + x \mathrm{d}z$ gdje je $\overset{\frown}{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20

3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20

4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$

Ukupno: $\emptyset$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

IME I PREZIME: IVAN KAŠTEZA **BROJ INDEKSA:**

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20

2. Izračunati $\int_{\widehat{ABC}} z^2 dx + y^2 dy + x dz$ gdje je $\widehat{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20

3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20

4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$

Ukupno: $\emptyset$

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

IME I PREZIME: JURE PORTADA BROJ INDEKSA: 57350

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova

1. Izračunajte površinu oplošja paraboloida $x^2 + y^2 = 4z$, $z \leq 5$. 20

2. Izračunati $\int_{\overset{\frown}{ABC}} z^2 \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}y + x \mathrm{d}z$ gdje je $\overset{\frown}{ABC}$ krivulja koja ide bridovima trokuta s vrhovima $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$ usmjerena redom od vrha A preko B i C do ponovo vrha A. Koristiti Stokesovu formulu. 20

3. Izračunati integral funkcije $f(x,y) = x^2$ na krugu radijusa $r = 5$ sa središtem u ishodištu. 20

4. Izračunati integral funkcije $f(x,y,z) = z$ u dijelu prostora omeđenog plohama $x = z^2$, $y = 0$ i $y = 2 - z$. 20

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu: 20

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4\,.$$

Ukupno: 0

2.)