MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.

POPUNJAVA NASTAVNIK Broj ↓ bodova

IME I PREZIME: RIJEŠENI ZADACI BROJ INDEKSA:

1. Da li krivuljni integral u vektorskom polju $g = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ovisi o putu integracije?
2. Neka je C cilindar zadan sa $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \le 2,\ 1 \le y \le 4\}$. Izračunati plošni integral 20

$$\iint_{\widehat{\partial C}} xz\,dydz + z^2\,dxdz + y\sin^2(y)\,dxdy$$

3. Izračunati volumen tijela omeđenog valjkom $x^2 + y^2 = 2^2$ i ravninama $z = y + 1$ i $z = -2$. 20
4. Neka je C kružna uzvojnica (spirala) s jednadžbama $x = \cos t$, $y = \sin t$ i $z = 2t$, $t \in [0, 4]$. Izračunaj $\int_C f ds$, kada je $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$. 20
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju nađi realnu funkciju f koja zadovoljava sljedeće uvjete: 20

$$f'''(t) + 4f'(t) = t, \quad f(0) = 2,\ f'(0) = 4,\ f''(0) = 4.$$

Ukupno:

---

(1) KRIVULJNI INTEGRAL VEKTORSKOG POLJA NE OVISI O PUTU INTEGRACIJE KADA JE VEKTORSKO POLJE POTENCIJALNO, ŠTO ZNAČI AKO JE $g = \nabla f$ ZA NEKO SKALARNO POLJE f.

$$\left.\begin{aligned} g_x &= \partial_x f \\ g_y &= \partial_y f \\ g_z &= \partial_z f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x = \partial_x f &\Rightarrow \int x\,dx = \int \partial_x f\,dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} = f(x,y,z) + \{\text{EVENTUALNO NEŠTO ŠTO NE OVISI O } x\} \\ y = \partial_y f &\Rightarrow \int y\,dy = \int \partial_y f\,dy \Rightarrow \frac{y^2}{2} = f(x,y,z) + \{\text{EVENTUALNO NEŠTO ŠTO NE OVISI VIŠE O } y\} \\ z^2 = \partial_z f &\Rightarrow \int z^2\,dz = \int \partial_z f\,dz \Rightarrow \frac{z^3}{3} = f(x,y,z) + \{\text{EVENTUALNO NEŠTO ŠTO NE OVISI VIŠE O VARIJABLI } z\} \end{aligned}\right.$$

IZ GORNJEG RAČUNA ZAKLJUČUJEM: $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$

SLIJEDI DA JE g POTENCIJALNO POLJE.

---

(2) RIJEČ JE O PLOŠNOM INTEGRALU VEKTORSKOG POLJA $g = xy\vec{i} + z\vec{j} + y\sin(y)\vec{k}$ PO RUBU ZATVORENOG PODRUČJA (CILINDRA, VALJKA). MOŽE SE ISKORISTITI TEOREM O DIVERGENCIJI:

$$\iint_{\widehat{\partial C}} g \cdot dS = \iiint_C \operatorname{div} g\,dxdydz = \iiint_C (y + 0 + 0)\,dxdydz = \iiint_C y\,dxdydz = (*)$$

PAZI: VALJAK NIJE POSTAVLJEN STANDARDNO! NJEGOVA OS JE U SMJERU $\vec{j}$!

PRELAZAK U CILINDRIČNE KOORDINATE!

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ z &= r\sin\varphi \\ y &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow (*) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_1^4 r\,y\,dy\,dr\,d\varphi = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^4 = 2\pi \cdot 1 \cdot \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) = 15\pi$$

4 VIDI RIBIĆ

3 VIDI RIBIĆ

5 VIDI GALEŠIĆ

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. Pišite dvostrano.	POPUNJAVA NASTAVNIK
IME I PREZIME: Andrija Ribić BROJ INDEKSA: 57688-2009	Broj ↓ bodova

1. Da li krivuljni integral u vektorskom polju $g = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ovisi o putu integracije? ~~20~~

2. Neka je C cilindar zadan sa $C = \{(x,y,z) : x^2+z^2 \le 2,\ 1 \le y \le 4\}$. Izračunati plošni integral ~~20~~

$$\iint_{\partial C} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y\sin^2(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. Izračunati volumen tijela omeđenog valjkom $x^2+y^2=2^2$ i ravninama $z=y+1$ i $z=-2$. ~~20~~ 15

4. Neka je C kružna uzvojnica (spirala) s jednadžbama $x=\cos t$, $y=\sin t$ i $z=2t$, $t\in[0,4]$. Izračunaj $\int_C f\mathrm{d}s$, kada je $f(x,y,z) = z\,(x^2+y^2)$. 20

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju nađi realnu funkciju f koja zadovoljava sljedeće uvjete: 20

$$f'''(t) + 4f'(t) = t, \quad f(0)=2,\ f'(0)=4,\ f''(0)=4.$$

Ukupno: 35

3) $x^2+y^2=2^2$

$x^2+y^2=r^2$

$r=2$

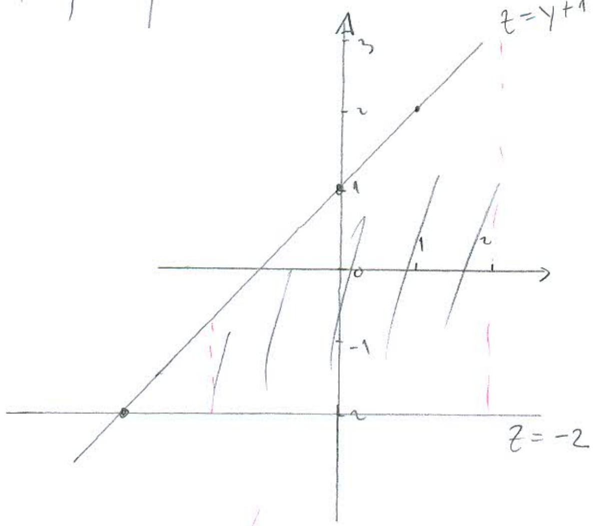
$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$dxdydz = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$z = z$

y	0	1
$z=y+1$	1	2



$r\in[0,2]$

$\varphi\in[0,2\pi]$

$z\in[-2,\ y+1] = [-2,\ r\sin\varphi+1]$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-2}^{r\sin\varphi+1} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\cdot z\Big|_{-2}^{r\sin\varphi+1} dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\,(r\sin\varphi+1+2)\,dr\,d\varphi$$

15

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(r^2\sin\varphi+3r)\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\sin\varphi+3\cdot\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2^3}{3}\sin\varphi+3\cdot\frac{2^2}{2}\right)d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}\sin\varphi+\cancel{12}\ 6\right)d\varphi = -\frac{8}{3}\cos\varphi+12\varphi\Big|_0^{2\pi} = -\frac{8}{3}\cos 2\pi+12\cdot 2\pi-\left(-\frac{8}{3}\cos 0+12\cdot 0\right)$$

$$= -\frac{8}{3}+24\pi-\left(-\frac{8}{3}\right) = -\cancel{\frac{8}{3}}+24\pi+\cancel{\frac{8}{3}} = \boxed{24\pi}$$

4) Neka je C kružna uzvojnica (spirala) s jednadžbama $x=\cos t$ $y=\sin t$ i $z=2t$ $t\in[0,4]$ izračunaj $\int_C f\,ds$ kada je $f(x,y,z)=z(x^2+y^2)$

*PARAMETRIZACIJA

$$r(t)=\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \overset{x}{\cos t} \\ \overset{y}{\sin t} \\ 2t \end{pmatrix} \end{array},\quad r'(t)=\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix} ✓$$

$$\|r'(t)\|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+2^2}=\sqrt{\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{=1}+4}=\sqrt{5} ✓$$

$$\int_C f\,ds=\int_a^b f\cdot\|r'(t)\|\,dt=\int_0^4 \sqrt{5}\,2t\,dt$$ ✓ 1,5

$$f(x,y,z)=2t\,(\cos t^2+\sin t^2)$$
$$=2t\,\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{=1} ✓$$

$$f(x,y,z)=2t ✓$$

$$=\int_0^4 \sqrt{5}\,2t\,dt=\int_0^4 2\sqrt{5}\,t\,dt=2\sqrt{5}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^4=2\sqrt{5}\cdot\frac{4^2}{2}=2\sqrt{5}\cdot 8=$$
$$=16\sqrt{5} ✓$$

5

2) $P(S) = \iint\limits_{D} 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

Andrija Ribić

$x^2 + z^2 = 2$

0