

**MATEMATIKA 2:** Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!**

Grupa  
XXXXX  
POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

IME I PREZIME:

SABOLIC BORIS

BROJ INDEKSA:

17-2-0010-2010

15

1. Riješiti integral:


$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx.$$

2. Riješiti integrale:

(a)  $\int_0^\pi x \sin x dx$  ;

(b)  $\int \frac{(2x-2) dx}{x^2-2x+4}$

$(x^2-2x+4=t \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \ln|x^2-2x+4| + C$  15+15



3. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje za funkciju  $f(x, y) = x + 2y + 1$ .

15

4. Odrediti ekstreme funkcije:  $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ . Koje su ekstremne vrijednosti i gdje se postižu?

8+12

5. Riješi diferencijalnu jednadžbu  $(1 + e^x)yy' = e^x$  uz početni uvjet  $y(0) = 1$ .

20

①  $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$

Ukupno:

50

$2 \int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \dots$

$R_f = -\frac{1}{x^2-4} \Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{1-4}\right) - \left(-\frac{1}{0-4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  ✓

②  $\int_0^\pi x \sin x dx = \int \sin x dx = -\cos x = v$

$-x \cdot \cos x + \int \cos x dx =$

$-x \cos x + \sin x \Big|_0^\pi = [-\pi \cos(\pi) + \sin(\pi)] - [-0 \cdot \cos 0 + \sin 0] = (\pi + 0) - (0 + 0) = \pi$  ✓

$$(2b) \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{-2}$$

$$x^2 - 2x + 4 = (x-2)(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 2x - 4$$

$$(x-2)^2 = x^2 + 4x - 4$$

④ EXTREMI F-fē

$$f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$$

$$3x^2 - 3y = 0 \rightarrow -3y = -3x^2 / :(-3)$$

$$-3x - 3y^2 = 0 \leftarrow \boxed{y = x^2}$$

$$\partial_x f = 3x^2 - 3y$$

$$-3x - 3x^4 = 0$$

$$\partial_y f = -3x - 3y^2$$

$$x(-3 - 3x^3) = 0$$

$$\partial_{xx} f = 6x$$

A

$$\boxed{T_1 / \begin{matrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{matrix}} \checkmark$$

$$-3 - 3x^3 = 0$$

$$\partial_{xy} f = -3$$

B

$$-3x^3 = 3 / :(-3)$$

$$\partial_{yy} f = -6y$$

C

$$x^3 = -1$$

$$T_2 \begin{matrix} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{matrix} \checkmark$$

$$T_1(0, 0)$$

SEDLO

$$\left. \begin{matrix} A=0 \\ C=0 \end{matrix} \right\} \Delta = 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0 \leftarrow \text{nema extrema} \checkmark$$

$$T_2(-1, 1)$$

$$A = -6 \left. \begin{matrix} \Delta = -6 \cdot (-6) - 9 = 36 - 9 \\ C = -6 \end{matrix} \right\}$$

$$\Delta = 27 > 0 \leftarrow \text{postoji ekstrem}$$

$$A < 0 \leftarrow \underline{\underline{\text{max}}} \checkmark$$

$$f_{\max} = -1 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1^3 =$$

$$\boxed{f_{\max} = 1} \checkmark$$

$$\textcircled{1} \int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4=t \\ 2x dx=dt \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 t^{-2} dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} \Big|_0^1 = \left[ -\frac{1}{-3} \right] - \left[ -\frac{1}{-4} \right] = \frac{1}{12} \checkmark$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} x=u \\ dx=du \\ \int \sin x dx = -\cos x \\ -\cos x = v \end{array} \right|$$

$$-x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x \Big|_0^{\pi} + C$$

$$\left( -\pi \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi) \right) - \left( -0 \cdot \cos(0) + \sin(0) \right) =$$

$$\left( \pi + 0 \right) - \left( 0 + 0 \right) = \pi = 3.14 \checkmark$$

**EXTREMI**

$f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$

$\partial_x f = 3x^2 - 3y$

$\partial_y f = -3x - 3y^2$

$\partial_{xx} f = 6x$

$\partial_{xy} f = -3$

$\partial_{yy} f = -6y$

$3x^2 - 3y = 0$   
 $-3x - 3y^2 = 0$

$\sqrt{3x^2 = 3y} / :3$

$x^2 = y$

$-3x - 3 - (x^2)^2 = 0$

$-3x - 3x^4 = 0$

$x(-3 - 3x^3) = 0$

$-3 - 3x^3 = 0$

$-3x^3 = 3 \quad (:(-3))$

$x^3 = -1$

$x_2 = -1 \quad y_2 = 1$

$-3y^2 = 3x \quad (:(-3))$   
 $y^2 = -x$   
 $-3x = 3y^2 \quad (:(-3))$   
 $x = -y^2 \quad ???$

$T_1(0,0) \quad T_2(-1,1)$

$T_1(0,0) \Rightarrow A=0 \quad C=0$

$A=0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$  nema EXTREMA

$T_2(-1,1) \Rightarrow A = -6 \cdot (-6) - 9 = 27 > 0$

postoji ekstrem

$A < 0$  - max

$f_{max} = -1 + 3 - 1 = 1 \checkmark$

2b

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} =$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2 - 6x} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{dx}{6x}$$
$$= \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = t$$
$$(2x - 2) dx = dt$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{dx}{6x}$$

$6x = t$   
 $6dx = dt$   
 $dx = \frac{1}{6} dt$

$$|x+2=t| \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} =$$

$$\int t^{-2} dt + \frac{1}{6} \ln|t| + C$$

$$-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{6} \ln|6x| + C$$

$$x^2 - 2x + 4$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{-2} =$$

$$(x-2)(x+2)^2 = (x^2 + 4x + 4) \cdot (x-2)$$
$$(x+2)^2 - 6x - 2x$$
$$(x-1)(x+2) \mid (x+2)(x-1) =$$
$$x^2 + 2x - x - 2 \mid x^2 - x + 2x - 2$$
$$x^2 - x - 2$$

$$x(x+2)^2 =$$

$$x^2 - 2x + 4$$

$$(x+2)^2 = (x^2 + 4x + 4) - 6x$$

**MATEMATIKA 2:** Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!**

IME I PREZIME: DENI MILETIĆ

BROJ INDEKSA: 57143-2009

Grupa  
XXXX  
POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

1. Riješiti integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx.$$

15

2. Riješiti integrale:

(a)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$  ;

(b)  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$ .

15+15

3. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje za funkciju  $f(x, y) = x + 2y + 1$ .

15

4. Odrediti ekstreme funkcije:  $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ . Koje su ekstremne vrijednosti i gdje se postižu?

8+12

5. Riješi diferencijalnu jednadžbu  $(1 + e^x)yy' = e^x$  uz početni uvjet  $y(0) = 1$ .

20

Ukupno:

30

$$\begin{aligned} 1. \int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} &= \left\{ t = x^2 - 4; dt = 2x dx \right\} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 t^{-2} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{t^{-2+1}}{-2+1} dt = \int_0^1 -\frac{dt}{t} = \left[ \ln t \right]_0^1 - \left[ \ln |x^2 - 4| \right]_0^1 \\ &= \left[ \ln |0^2 - 4| - \ln |1^2 - 4| \right] = 0 \end{aligned}$$

$$2. a) \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x; du=dx \\ dv=\sin x dx; v=-\cos x \end{array} \right\} = x \cos x - \int \cos x dx =$$

$$= [x \cos x - \sin x]_0^{\pi} = [0 \cdot \cos 0 - \sin 0] + [\pi \cdot \cos \pi - \sin \pi]$$

$$= \pi \cdot \cos \pi - \sin \pi \quad \checkmark$$

$$b) \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 3} = \left\{ t=x-1; dt=dx \right\} = \int \frac{dt}{t^2 + 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} \quad \checkmark$$

$$4. f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$$

$$f_x = 3x^2 - 3y \quad \checkmark \rightarrow 3y = 3x^2 \quad \checkmark$$

$$f_y = -3x - 3y^2 \quad \checkmark \rightarrow -3x - 3y^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{xy} = -3$$

$$f_{yy} = -6y$$

$$y^2 + x = 0$$

$$(x^2)^2 + x = 0$$

$$x^4 + x = 0$$

$$x(x^3 + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow J_1 = 0 \quad T_1(0, 0)$$

$$\rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow \boxed{x = -1, y = 1} \\ \boxed{T_2(-1, 1)}$$

$T_1(0, 0)$  - sedláta točka

$$A = 6 \cdot 0 = 0$$

$$\Delta = AC - B^2 = -(-3)^2 = -9$$

MÍSTĚ NAŠCI DRUGU  
KRITICKOU TOČKU!

**MATEMATIKA 2:** Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!**

Grupa  
x0xx0  
POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

IME I PREZIME: **MLADEN BULIĆ**

BROJ INDEKSA: **17-0018-2010**

1. Riješiti integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx.$$

15

2. Riješiti integrale:

(a)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$  ;

(b)  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$ .

15+15

3. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje za funkciju  $f(x, y) = x + 2y + 1$ .

15

4. Odrediti ekstreme funkcije:  $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ . Koje su ekstremne vrijednosti i gdje se postižu?

8+12

5. Riješi diferencijalnu jednadžbu  $(1 + e^x)yy' = e^x$  uz početni uvjet  $y(0) = 1$ .

20

Ukupno:

$$1. \int_0^1 \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x^2-4=t \\ 2x dx = dt \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 t^{-2} dt$$

$$= \int_0^1 t^{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = \frac{-1}{1} - \left( \frac{-1}{0} \right) = -1$$

2. a)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$       $u = x$       $v = \sin x$   
 $du = dx$       $dv = -\cos x$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx = \underline{\sin x^2} + \cos x = \sin \pi + \cos \pi - (\sin 0 + \cos 0) =$$

$$b) \int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \left[ \begin{array}{l} x^2-2x+4 = t \\ 2x-2 dx = dt \end{array} \right]$$

$$x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$



$$4. f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$$

$$\partial_x = 3x^2 - 3y$$

$$\partial_y = -3x - 3y^2$$

$$\partial_{xx} = 6x$$

A

$$\partial_{yy} = -6y$$

C

$$3x = -3y^2$$

$$x = -y^2$$





**MATEMATIKA 2:** Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!**

IME I PREZIME:

Ivan Škara

BROJ INDEKSA:

56180-2008

Grupa  
XXXXO  
POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

1. Riješiti integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 4)^2} dx.$$

15

2. Riješiti integrale:

15+15

(a)  $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$  ;

(b)  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$ .

3. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje za funkciju  $f(x, y) = x + 2y + 1$ .

15

4. Odrediti ekstremane funkcije:  $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ . Koje su ekstremne vrijednosti i gdje se postižu?

8+12

5. Riješi diferencijalnu jednadžbu  $(1 + e^x)yy' = e^x$  uz početni uvjet  $y(0) = 1$ .

20

Ukupno:

2.) b)  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \ln|x^2 - 2x + 4|.$





**MATEMATIKA 2:** Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!**

IME I PREZIME:

IVAN RASOVIĆ

BROJ INDEKSA:

57230

Grupa  
xoxo  
POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

1. Riješiti integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 4)^2} dx.$$

15

2. Riješiti integrale:

15+15

(a)  $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$  ;

(b)  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$ .

3. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje za funkciju  $f(x, y) = x + 2y + 1$ .

15

4. Odrediti ekstreme funkcije:  $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ . Koje su ekstremne vrijednosti i gdje se postižu?

8+12

5. Riješi diferencijalnu jednadžbu  $(1 + e^x)yy' = e^x$  uz početni uvjet  $y(0) = 1$ .

20

Ukupno:

$$\int \frac{2x}{(x^2-4)^2} dx =$$





**MATEMATIKA 2:** Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata. **PIŠITE DVOSTRANO!**

IME I PREZIME: **LUKA RADAŠ**

BROJ INDEKSA: **57662**

Grupa  
XXXXO  
POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

1. Riješiti integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 4)^2} dx.$$

15

2. Riješiti integrale:

15+15

(a)  $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$  ;

(b)  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$ .

3. Odrediti domenu, kodomenu i razinske krivulje za funkciju  $f(x, y) = x + 2y + 1$ .

15

4. Odrediti ekstreme funkcije:  $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ . Koje su ekstremne vrijednosti i gdje se postižu?

8+12

5. Riješi diferencijalnu jednadžbu  $(1 + e^x)yy' = e^x$  uz početni uvjet  $y(0) = 1$ .

20

---

Ukupno:

---

~~0~~

