

MATEMATIKA 3: Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

POPUNJAVA
NASTAVNIK
Broj ↓
bodova

IME I PREZIME:

BORIS DURBIĆ

BROJ INDEKSA:

57640

- Izračunati volumen tijela omeđenog plohami $z = x^2 + y^2$, $z = 5$. 20
- Neka je C plašt cilindra koji ne uključuje baze (nije zatvoren), radijusa $r = 1$ koji se prostire u smjeru z -osi, visine $v = 2$ s centrom u ishodištu ($z \in [-1, 1]$). Podrazumijeva se orijentacija plašta cilindra prema van. Izračunati $\iint_C 2x + 3dydz$? 20
- Primjenom Greenove formule izračunati integral $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, gdje je C kontura trokuta $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ i $C(1, 3)$ prijeđena u pozitivnom smislu (suprotno od kazaljke na satu) 20
- Provjeri da li je $g(x, y, z) = (x + y, x + y, 1)$ potencijalno polje? Koja vrsta integrala se lagano rješava u potencijalnom polju? 15-5
- Zadana je kružna uzvojnica (spirala) s jednadžbama $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ i $z = t$. Skiciraj krivulju. Izračunati duljinu 3 namotaja ove krivulje. (pomoć: jedan namotaj odgovara periodu iskorištenih trigonometrijskih funkcija) 20

Ukupno:

95

$$1. \quad x^2 + y^2 = z \quad z = 5 \quad r \in [0, \sqrt{z}]$$

$$r^2 = z \quad z \in [0, 5]$$

$$r = \sqrt{z}$$

$$\iiint_0^5 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, dy = \int_0^5 \int_0^{\sqrt{z}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} dz \, dy = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^5 z \, dz = \pi \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^5$$

$$= \frac{25\pi}{2}$$

$$5. \quad x = 2\cos t$$

$$y = 2\sin t$$

$$z = t$$

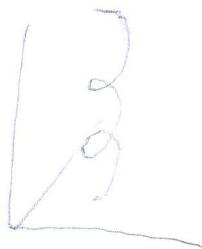
$$r' = \begin{bmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|r'| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{5}$$

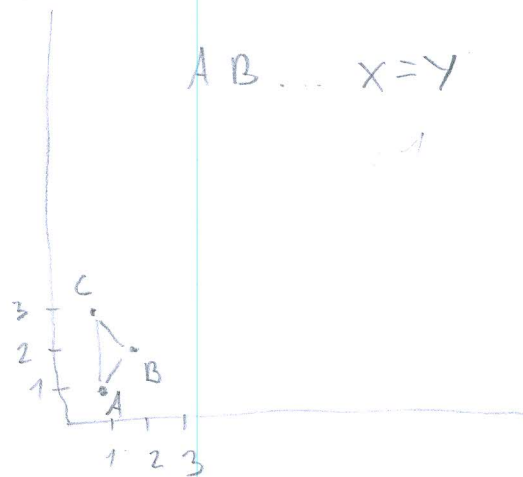
$$\int_0^{6\pi} \sqrt{5} \, dt = 6\sqrt{5}\pi$$



$$3. \oint_P 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

$$2(x+y) \cdot 1 - 2 \cdot 2y \quad \checkmark$$

$$= 2x + 2y - 4y = 2x - 2y \quad \checkmark$$



$$CB \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{2 - 3}{2 - 1} (x - 1)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{1} (x - 1)$$

$$y - 3 = -x + 1$$

$$y = -x + 4$$

$$\int_1^2 \int_x^{-x+4} (2x - 2y) dy dx = \int_1^2 2xy - 2 \frac{y^2}{2} \Big|_x^{-x+4} dx$$

$$= \int_1^2 (2 \cdot x \cdot (-x+4) - x^2 + 8x - 16 - 2x^2 + x^2) dx$$

$$= \int_1^2 (-2x^2 + 8x - x^2 + 8x - 16 - 2x^2 + x^2) dx$$

$$= \int_1^2 (-4x^2 + 16x - 16) dx = \left[-4 \frac{x^3}{3} + 16 \frac{x^2}{2} - 16x \right]_1^2$$

$$= -\frac{4 \cdot 8}{3} + 32 - 32 + \frac{4}{3} - 8 + 16 =$$

$$= \frac{-32 + 4 + 24}{3} = -\frac{4}{3}$$

