

**MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:**

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

**TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

**IME I PREZIME:** KRISTIJAN CUCIKOVSKI

**BROJ INDEKSA:**

**VRIJEME POČETKA:**

**VRIJEME ZAVRŠETKA:**

POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

Ukupno:

29

1. Ispitati tijek funkcije  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  i skicirati njen graf.

12

1.) D<sub>f</sub> R \ {0}

2.) NULTAČINE  
NEMA R.N.T

3.) DERIVACIJA  
 $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2}$$

$$x e^x - e^x = 0$$

$$x = 1$$

	$-\infty$	$x = 1$	$\infty$
$f'(x)$	-	+	
	↘	↗	

4.) ASIMPTOTE

$$H.A = 0$$

$$V.A = 0$$

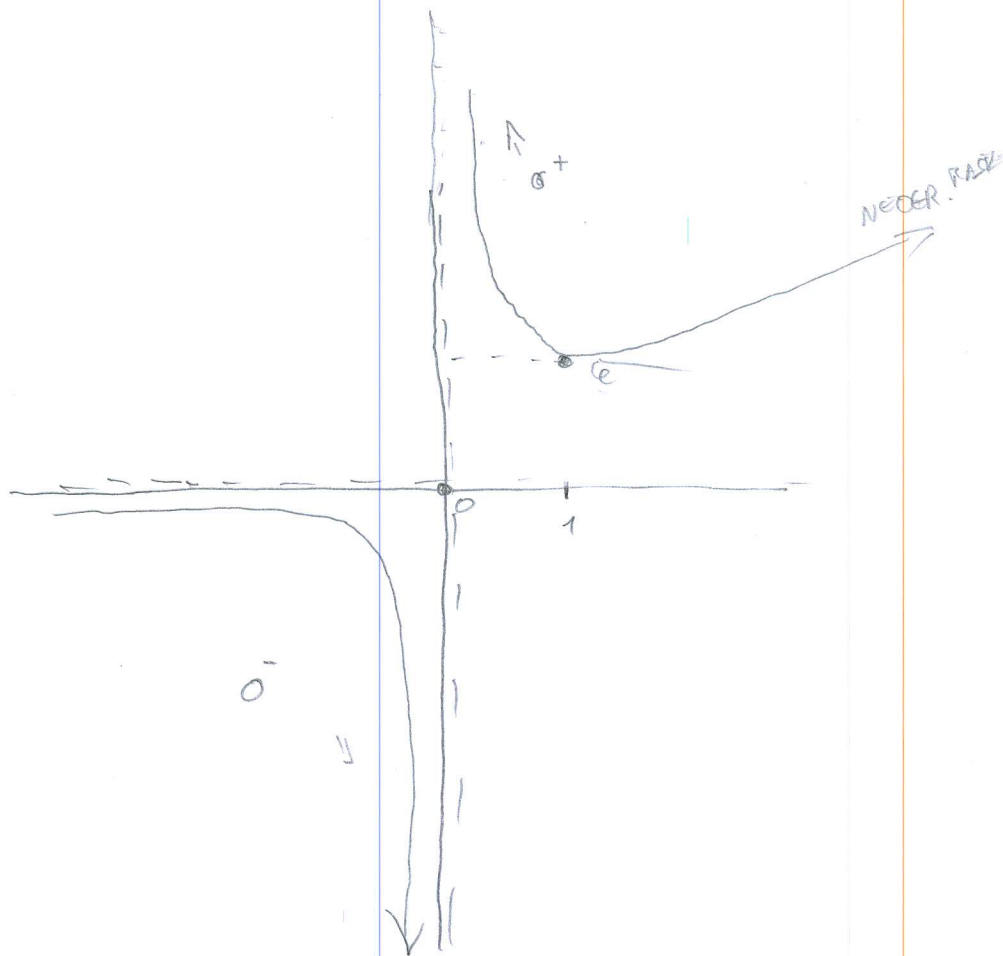
K.A - NEMA

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{L'H.}{=} \frac{e^x}{1} = e^{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-1} = -e^{-\infty} = 0$$



2. Ispitati konvergenciju reda  $\sum_n \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n = 0$

5

Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^{\frac{n}{n}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+5n}{6n+2} = \frac{5}{6} = 0,83, \Rightarrow \text{RED} < 1 \text{ KONVERGIRA}$$

3. Derivirati:  $(2 \ln(x+x^3) + \sqrt{x^2+3x-1})' =$

4

$$\frac{2}{x+x^3} \cdot (1+3x^2) + \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x-1}} \cdot (2x+3)$$

$$\frac{2+6x^2}{x+x^3} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}}$$

IME I PREZIME:

4. Odrediti globalne i lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

10

8

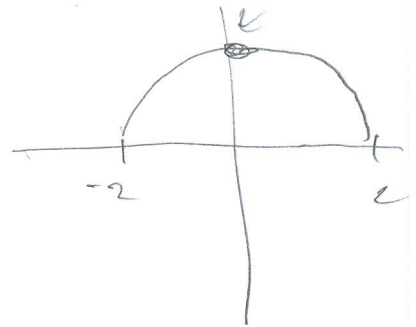
1.) NULTOČKI  $-x^2 + 4 = 0$   
 $x^2 = 4$   
 $x = \pm 2$

$D_f = \langle -2, 2 \rangle$

$f'(x) = 0$

$\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow -2x = 0$   
 $x = 0$

	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	-
	↗	○	↘



GLOBAL MAX?

LOKAL MAX  $x=0$   $(0, 2)$   
 $y=2$

GLOBAL MIN  
 $x = -2, 2$   $(-2, 0)$   
 $y = 0$   $(2, 0)$

5. Što označava pojam pozitivne zakrivljenosti, odnosno konveksnosti funkcije?

3

To znači da funkcija raste, zatim njome  
i raste, ujedno je to moguće globalni  
ili lokalni minimum.



*Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...*

**MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:**

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

**TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više tačnih.

IME I PREZIME: ROKO KRALJEV

BROJ INDEKSA:

VRIJEME POČETKA:

VRIJEME ZAVRŠETKA:

POPUNJAVA

NASTAVNIK

Broj ↓

bodova

Ukupno:

30

1. Ispitati tijek funkcije  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  i skicirati njen graf.

FUNKCIJA: NIJE PERIODIČNA,  
NIJE OGRANIČENA, NIJE NI PARNA NI NEPARNA  
H.A.

12

$x \neq 0$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

V.A.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1} = e^{-\infty} = 0$

$y = 0$  L.H.A.

NE MA K.A.

$x = 0$  O.V.A.

K.A.  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

$f(x) = 0$

$f(0) = N/D$

$f'(x) = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$f''(x) = 0$

$x(x^2 - 2x + 2) = 0$

$x = 0$

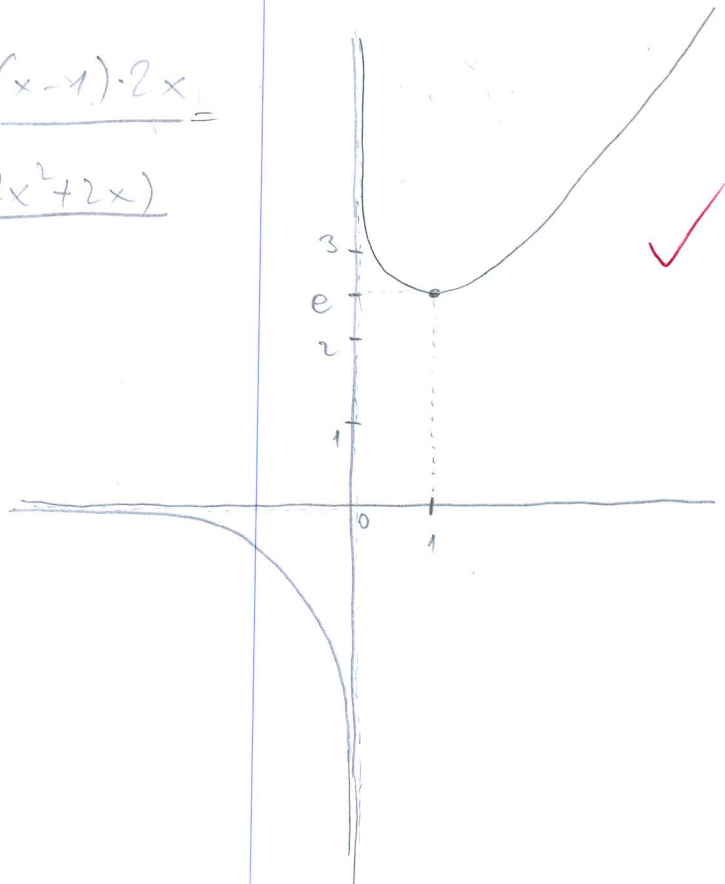
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

NE MA NULTOČAKA

$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$  (1, e)

$f''(x) = \frac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4}$   
 $= \frac{e^x \cdot x^3 - e^x(2x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4}$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	∩	∪	∪	∪



2. Ispitati konvergenciju reda  $\sum_n \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n$

5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4+5n-6n-2}{6n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-n+2}{6n+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{6n+2}{-n+2}}\right)^{\frac{6n+2}{-n+2} \cdot (-n+2)} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+2n}{6n+2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+2n}{6n+2}} = e^{-\infty} = 0$$

NUŽAN UVJET KONVERGENCIJE ZADANOJEN.

Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+5n/n}{6n+2/n} = \frac{5}{6} < 1$$

RED KONVERGIRA ✓

3. Derivirati:  $(2 \ln(x+x^3) + \sqrt{x^2+3x-1})' = 2 \cdot \frac{1}{x+x^3} (1+3x^2) + \frac{1}{2} (x^2+3x-1)^{-\frac{1}{2}} (2x+3) =$

$$= \frac{2+6x^2}{x+x^3} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}} \quad \checkmark$$

IME I PREZIME:

4. Odrediti globalne i lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

10

6

$$4-x^2 \geq 0$$
$$x^2 \leq 4$$
$$-2 \leq x \leq 2$$

$$d_f = [-2, 2]$$

NEMA V.A

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f(-2) = 0 \quad (-2, 0)$$
$$f(2) = 0 \quad (2, 0)$$

$$f'(x) = 0$$

$$-x = 0$$
$$x = 0$$

	-2	0	2		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

$$f(0) = 2$$
$$(0, 2)$$

TOČKA  $(0, 2)$  JE GLOBALNI MAKSIMUM FUNKCIJE


TOČKE  $(-2, 0)$  I  $(2, 0)$  SU LOKALNI MINIMUMI FUNKCIJE.

KOJI JE LOK. MAX?

KOJI SU GLOB. MIN?

5. Što označava pojam pozitivne zakrivljenosti, odnosno konveksnosti funkcije?

3



To znači da se dužina između bilo koje dvije točke na konveksnom dijelu grafa funkcije cijela nalazi iznad grafa funkcije.

*Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...*



**MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:**

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

**TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod. U pitanjima s višestrukim ponudjenim odgovorima može biti više tačnih.

IME I PREZIME: MATE MITROVIĆ

BROJ INDEKSA:

VRIJEME POČETKA:

VRIJEME ZAVRŠETKA:

POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

Ukupno:

**17**

1. Ispitati tijek funkcije  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  i skicirati njen graf.

1. Domeno  $x \neq 0$

$D_f \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$

2. Asimptote

a) V.A

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0^-} = -\infty$  ✓

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0^+} = +\infty$  ✓

$x=0$  je V.A

b) H.A

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{e^x}{1} = e^{+\infty} = +\infty$  ✓

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \left[ \frac{0}{-\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1} = \frac{0}{1} = 0$  ✓

$y=0$

Ime asimptote neno

3. Uloz elna mijda

$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow$  funkcija nije neno ni neno

- Nije derivabilna ču

4. Lijacite i kvad. osine

$f'(x) = 0$

$\frac{e^x}{x} = 0$

$e^x = 0 \Rightarrow$  neno ni neno ni neno

5. Derivacija

$f'(x) = x \cdot \frac{e^x - e^x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

6. Kritične točke

$Df = Df'$   $f(1) = \frac{e^1}{1}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x-1) = 0$

$\frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$

$x-1 = 0$   
 $x = 1$

$T(1, e) \rightarrow$  kritična točka

12

7. Monotonost

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

LOK. MIN

10. Kritične točke

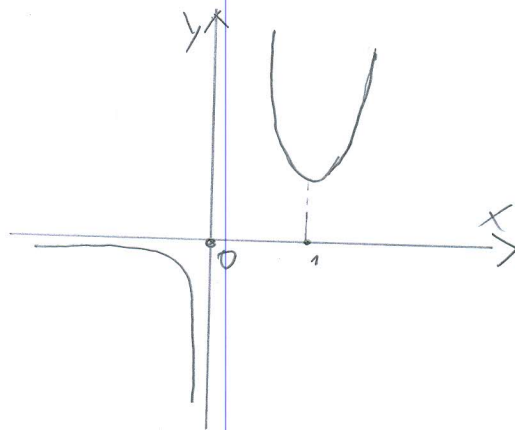
$f''(x) = 0$

$\frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$  neno ni neno

Neno točaka infleksije

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	



2. Ispitati konvergenciju reda  $\sum_n \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n$

5

M.O.K

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+4}{6n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+2-n+2}{6n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+2}{6n+2} + \frac{-n+2}{6n+2}\right)^n$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{6n+2}{-n+2}}\right)^{\frac{6n+2}{-n+2}}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+2}{6n+2}}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+2n}{6n+2}} = e^{-\frac{1}{6}} = 0$$

D'ALAMBERT

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4+5n+1}{6n+2+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+2(4+5n+1)}{4+5n(6n+2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+8+10n+2}{4+30n^2+10n+5n} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$0 < 1$  Red konvergira

RAABE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\left(\frac{4+5n+1}{6n+2+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{6n+8+10n+2}{4+30n^2+10n+5n}\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{4+30n^2+10n+5n - 6n+8+10n+2}{4+30n^2+10n+5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+30n^3+10n^2+5n^2 - 6n^2+8n+10n^2+2n}{4+30n^2+10n+5n} = \frac{30}{0} = +\infty$$

$+\infty > 1$  Red konvergira

3. Derivirati:  $(2 \ln(x+x^3) + \sqrt{x^2+3x-1})' =$

4  
2

$$= \frac{2}{1+x^3} \cdot (1+x^3)' + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-1}} \cdot (x^2+3x-1)'$$

$$= \frac{6x^2}{1+x^3} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}}$$

4. Odrediti globalne i lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

10. Domena

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x < -2$		-	-	+
$-2 < x < 2$		-	+	+
$x > 2$		+	+	+

$$D_f: (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

2. Asimptote

a) V. A

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4} = 0$$

Nema V. A

b) H. A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x^2} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Nema H. A

**NISTE NAISALI KOJI BI BILI**

**LOKALNI EKSTREMI**

c) K. A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \stackrel{1:\infty}{=} \frac{\sqrt{-1}}{1}$$

Nema K. A

4. Liječište i koordinatni

$$f(x) = 0$$

$$\sqrt{4-x^2} = 0 \iff \text{Nema riješi}$$

$$f(0) = \sqrt{4-0^2} = 2$$

$$T(0, 2)$$

3. Olovake moguće

$$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2}$$

Funkcija nije parna ni neparna

Nije periodična  
Funkcija je navedena ~~X~~

5. Derivacija

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot 2(\sqrt{4-x^2}) + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4(4-x^2)}$$

$$f''(x) = \frac{-4\sqrt{4-x^2} + \frac{-4x^2}{2\sqrt{4-x^2}}}{4(4-x^2)}$$

6. Kritične tačke

$$f'(x) = 0 \quad -2x = 0 \quad ( : (-2) )$$

$$\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \quad x = 0$$

$$f(0) = \sqrt{4-0^2}$$

$$= 2$$

$$T(0, 2) \rightarrow \text{K.T}$$

5. Što označava pojam pozitivne zakrivljenosti, odnosno konveksnosti funkcije?

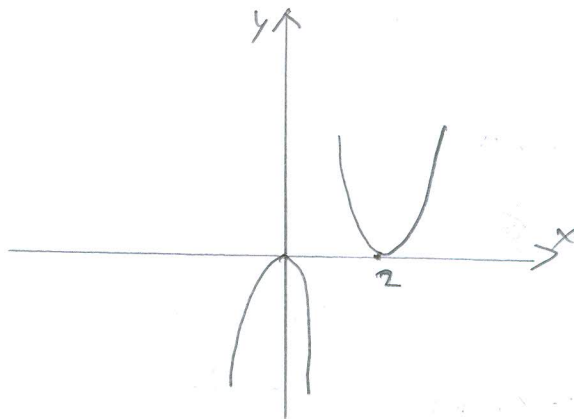
Označava da susimne koje poveruju drug tačke i grafu leži  
čitalo iznad grafu te funkcije

Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

4. Zadatak

7. Monotonost

	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	/	+	-	/	
$f(x)$	MD	$\nearrow$	$\searrow$	MD	
		LOK MAX		LOK MIN	



NA USTIMENOM POSEBNO :

- RJEŠAVANJE NEJEDNAKOSTI (VIDI GRUPE KOLOKVIJA #2)
- TANGENTA NA GRAF FUNKCIJE

**MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:**

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

**TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: **TONET MARINović**

BROJ INDEKSA:

VRIJEME POČETKA:

VRIJEME ZAVRŠETKA:

18:05

POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

Ukupno:

29

12

1. Ispitati tijek funkcije  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  i skicirati njen graf.

1°  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \neq 0$

2° ASIM

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty //$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty //$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^{1/4}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = |x \rightarrow -x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = 0 //$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

$x=0$  je O.V.A.

$y=0$  je L.H.A.

3° Funkc. je neometena.

$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} \Rightarrow$  funkc. nije parna ni neparna.

Funkc. nije periodična!

4°  $f(x) = 0$   
 $\frac{e^x}{x} = 0 \quad e^x \neq 0$

$f(0) = \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0}$   
nije u  $D_f$ !

5°  $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} //$

$f''(x) = \frac{[e^x(x-1) + e^x] \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} =$

$= \frac{(e^x(x-1+1)) \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} =$

$= \frac{e^x \cdot x \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} =$

$= \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4} = \frac{e^x \cdot x(x^2 - 2x + 2)}{x^4} =$

$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} //$

6°  $f'(x) = 0$

$e^x(x-1) = 0$

$x-1 = 0$

$x = 1$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	↘	↘	↗	

LOKALNI MINIMUM

$f(1) = e = 2.71 //$

7°  $f''(x) = 0$

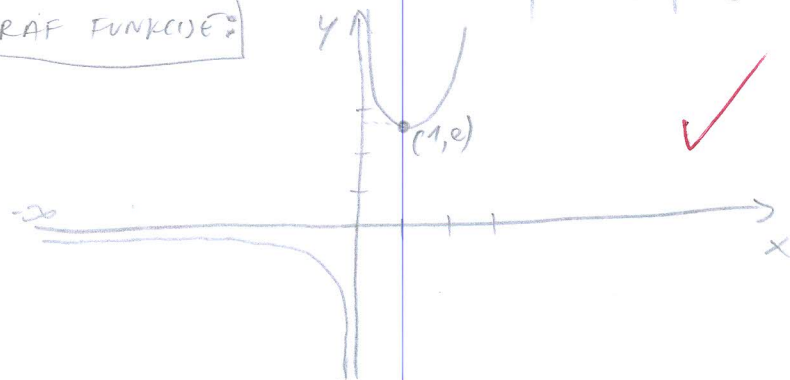
$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	
$f(x)$	↘	↗	↘	

8°

GRAF FUNKCIJE:



2. Ispitati konvergenciju reda  $\sum_n \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n$

(NUŽAN USJET =

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4+5n}{6n+2} - 1\right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4+5n-6n-2}{6n+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-n+2}{6n+2}\right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{6n+2}{-n+2}}\right)^n = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 //$$

$$\frac{6n+2}{-n+2} \cdot \frac{(-n+2) \cdot n}{6n+2}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{-n^2+2n}{6n+2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

CAUCHY  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^{\frac{n}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4+5n}{6n+2} \stackrel{5}{\underset{6}{< 1}}$

RED KONVERGIRA!  
✓

3. Derivirati:  $(2 \ln(x+x^3) + \sqrt{x^2+3x-1})' =$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x+x^3} \cdot (1+3x^2) + \frac{1}{2} (x^2+3x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+3) =$$

$$= \frac{2(1+3x^2)}{x+x^3} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}} // \checkmark = \frac{2+6x^2}{x+x^3} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}} //$$

IME I PREZIME:

4. Odrediti globalne i lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} > 0$$

$$\frac{df}{dx} > 0 \\ 4-x^2 > 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} //$$

(0,2)

$$x^2 \leq 4$$

$$\underline{-2 \leq x \leq 2}$$

	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$$f(0) = \sqrt{4} = 2$$

↓  
LOKALNI  
MAKSIMUM

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{4-x^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-4-x^2-x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Točka  $T(0,2)$  je lokalni maksimum a ujedno i globalni maksimum.

ŠTO JE S MAKSIMUMIMA?

5. Što označava pojam pozitivne zakrivljenosti, odnosno konveksnosti funkcije?

3

$$f''(x) > 0$$

Pojam konveksnosti funkcije znači da funkcija kod koje kad spojimo dvije točke grafa te funkcije ima dužinu koja se mora nalaziti ispod grafa te funkcije.

*Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...*



**MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:**

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

**TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: MARTIN SEDMAK BROJ INDEKSA:  
 VRIJEME POČETKA: 18:10 VRIJEME ZAVRŠETKA:

POPUNJAVA  
 NASTAVNIK  
 Broj ↓  
 bodova

Ukupno:

12

1. Ispitati tijek funkcije  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  i skicirati njen graf.

1. DOMENA

12

2. ASIMPTOTE

$x \neq 0$

$f(x) \leftarrow -\infty, 0 > 0 < 0, \infty$

~~$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x}$~~   
 ~~$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x}$~~   
 ~~$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$~~   
 ~~$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$~~

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$   
 NEMA D.F.A.

~~$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$~~   
 ~~$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$~~

~~$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^2}$~~

~~$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$~~

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 2x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(x^2 - 2x)}{1} = \infty$  nema kosih asimptota

~~$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$~~   
 ~~$f''(x) = \frac{e^x(x-1) \cdot e^x - x \cdot e^x(x-1) \cdot 2}{x^4}$~~   
 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$   
 $f''(x) = \frac{e^x(x-1) \cdot e^x - x \cdot e^x(x-1) \cdot 2}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{x^3}$   
 $f'(1) = \frac{e^1}{1} = e = 2.71$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$  ~~UR. ASIM.~~  $x=0$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$  L.H.A.  $y=0$

$f''(x) = 0$  za  $x^2 - x - 1 = 0$   $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow$  nema rj.

	$-\infty$	0	$\infty$
$f(x)$	-		+
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

2. Ispitati konvergenciju reda  $\sum_n \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n$

$$\frac{4+10}{12+2} \quad \frac{14^2}{14}$$

$$\frac{4+5}{6+2} \quad \frac{9}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+5n}{6n+2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{9}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4+5(n+1)}{6(n+1)+2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4+5n+5}{6n+6+2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n}$$

**BROJNIK < NAZIVNIK**  
RED KONVERGIRA.

3. Derivirati:  $(2 \ln(x+x^3) + \sqrt{x^2+3x-1})' =$

NA USMENOM ĆETE GOTOVO SIGURNO DOBITI  
PITANJE DA DERIVIRATE NEKU SLOŽENU FUNKCIJU,  
DA RIJEŠITE NEJEDNAČEBU, PAŽITE DA ZNATE  
PROMACI TANGENTU NA GRAF FUNKCIJE U ZADANOJ  
TOČKI.

IME I PREZIME:

4. Odrediti globalne i lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$f(0) = \sqrt{4} = 2 \text{ - MINIMUM FUNKCIJE}$$

$$x = 2'$$

$$f'(x) = 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \neq 0 \Rightarrow \text{MAXIMUM NEMA}$$

$$4-x^2 \geq 0$$

$$+x^2 \geq -4$$

$$x^2 \geq -4$$

$$x \geq \sqrt{-4}$$

$$x_1 \geq -i4$$

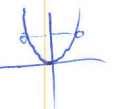
$$x_2 \geq i4$$

10

5. Što označava pojam pozitivne zakrivljenosti, odnosno konveksnosti funkcije?

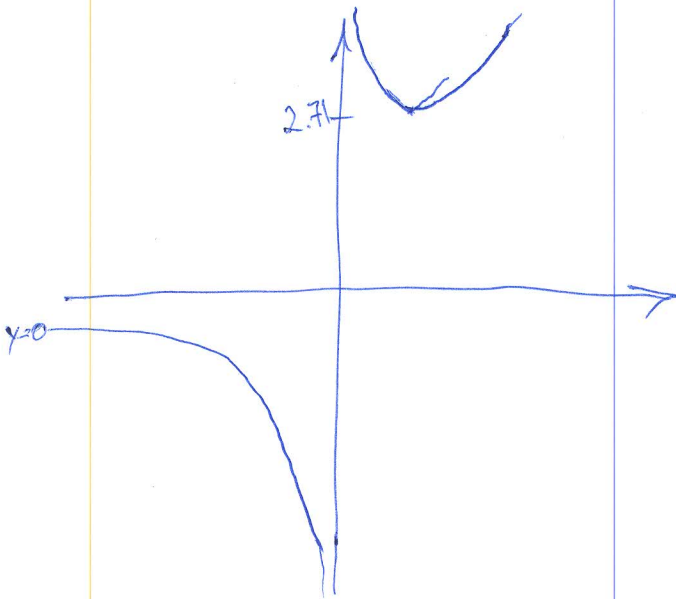
ZNAČI DA BILO KOJE DVIJE TOČKE FUNKCIJE  
 MOŽEMO SPOJITI PRAVCEM SAMO U 1. I 4.  
 KVADRANTU KOORDINATNOG SUSTAVA

3



Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

ZADATAK 1. GRAF



**MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:**

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

**TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO!** Obavezno popuniti sva polja ispod. U pitanjima s višestrukim ponudjenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: STIPE BRKLIJAČIĆ

BROJ INDEKSA:

VRIJEME POČETKA:

VRIJEME ZAVRŠETKA:

POPUNJAVA  
NASTAVNIK  
Broj ↓  
bodova

Ukupno:

**27**

12

1. Ispitati tijek funkcije  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  i skicirati njen graf.

1. DOMENA

DR:  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2. ASIMPTOTE

V.A

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

H.A

$v=0$  o. v. a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{1} = e^x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{1} = e^x = 0$$

L.H.A  $y=0$

KOSE DEMA.

3. GLOBALNA SUOPSTAV

nije periodična

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x}$$

BITI PARNA  
NITI NEPARNA  
NEODREĐENO

4. NULTIČKE

$$f(x) = \frac{e^x}{x} = 0$$

$$e^x = 0 \quad \text{nikad}$$

5. DERIVACIJE

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot 1 - x \cdot e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(x-1) - (e^x(x-1) \cdot 2x)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x(x-1) \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x \cdot 2}{x^4}$$

$$= e^x(x-1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2)$$

6. KRITIČNE TOČKE

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$$

$$e^x(x-1) = 0 \quad \ln = e$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$(1, e)$$

7. MONOTONOST

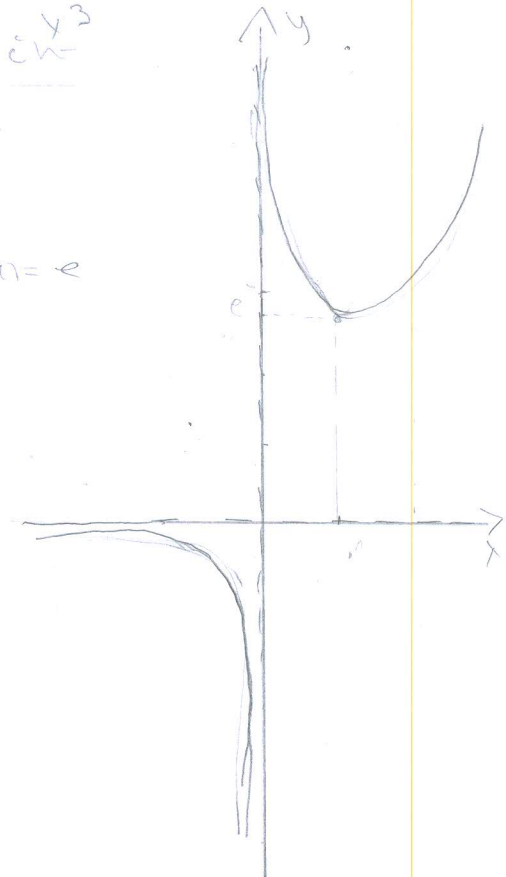
$$-\infty \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$$

$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

10. ZAKRIVLJENOST

$$e^x(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$



2. Ispitati konvergenciju reda  $\sum_n \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n$

NUŽAN UVJET

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4+5n}{6n+2} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{6} \right) \rightarrow 0$$

RAČUNA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+5n}{6n+2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{5}{6}\right) \checkmark$$

$$\frac{5}{6} < 1$$

≈ 0.83:

$$(0.83 < 1)$$

Red konvergira  $\checkmark$

3. Derivirati:  $(2 \ln(x+x^3) + \sqrt{x^2+3x-1})' =$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 1}{(x+x^3)} \cdot (1+3x^2) = \frac{2(1+3x^2)}{(x+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+3x^2)}{(x+x^3)^2} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2+6x^2}{(x+x^3)^2} + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}} \checkmark$$

$$\frac{1 \cdot (2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x-1}}$$

IME I PREZIME:

4. Odrediti globalne i lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

10

3

$$f'(x) = \frac{1}{2} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\begin{aligned} -x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \quad \text{P.O. (0,2)}$$

OP:  $[-2, 2]$

$$f(0) = \sqrt{4-0^2} = 2$$

KOJI JE GLOBALNI MIN? MAX?

NISTE NAŠLI LOKALNE MIN!

$$f(-2) = \sqrt{4-(-2)^2} = \sqrt{4-4} = 0$$

$$4-x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 4$$

$$x \in [-2, 2]$$

G.A.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

keru VA

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4-x^2} = 0$$

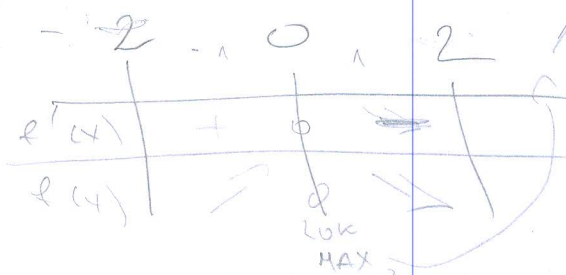
Ekstrem (0,2)

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \sqrt{4-0} = 2$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{4-0^2} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(-1)}{\sqrt{4-(-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-(-1)}{\sqrt{4-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

5. Što označava pojam pozitivne zakrivljenosti, odnosno konveksnosti funkcije?

3

Aužitu između bilo koje dvije točke na konveksnom djelu grafa i dijela je iznad grafika funkcije.

Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$
$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 - e^x) = 2x - e^x$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x^2} = \frac{0 \cdot (1-x^2) - 1 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 2) = 2x$$