MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO! Obavezno popuniti sva polja ispod⇊. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: PETAR PERICA **BROJ INDEKSA:**

VRIJEME POČETKA: **VRIJEME ZAVRŠETKA:**

POPUNJAVA NASTAVNIK Broj ↓ bodova
Ukupno: 25

1. Ispitati tok funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8}$ i na temelju toga skicirati njen graf. ~~13~~ 8

1) DOMENA

$x^2+2x+8 \geq 0$

$x^2+2x+8=0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 8}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{-28}}{2}$

nema $\mathbb{R}$ nultočke

$D_f: \langle -\infty, +\infty \rangle$ ✓

2) ASIMPTOTE

a) V.A - nema $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x+8} = +\infty$

b) H.A - nema H.A

c) K.A

$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+8}}{x} \Big/ :x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$l = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+8}-x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+8}-x\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x+8}+x}{\sqrt{x^2+2x+8}+x} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+8-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+8}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+8 \quad /:x}{\sqrt{x^2+2x+8}+x \quad /:x} = \frac{2}{2} = 1$

$y = kx + l$, $\boxed{y = x+1}$ - DESNA KOSA ASIMPTOTA ✓

$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+8}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+8} \quad /:x}{-x \quad /:x} = \frac{1}{-1} = -1$

$l = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+8}+x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+8}-x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+8}-x\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+8}+x}{\sqrt{x^2-2x+8}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x+8-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+8}+x} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+8 \quad /:x}{\sqrt{x^2-2x+8}+x \quad /:x} = \frac{-2}{2} = -1$ $y = kx+l$, $\boxed{y = -x-1}$ - LIJEVA KOSA ASIMPTOTA ✓

3) GLOBALNA SVOJSTVA

- funkcija je neomeđena
- $f(-x) = \sqrt{x^2-2x+8}$
- ni parna, ni neparna
- nije periodična

4) SJECIŠTA S KOORDINATNIM OSIMA

$\sqrt{x^2+2x+8} = 0$

- funkcija nema $\mathbb{R}$ nultočke

5. DERIVACIJE

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+2x+8)' =$

$= \frac{1}{2}(x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+2)$

$= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

$f''(x) = \frac{2\left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right)-(2x+2)\cdot\left(\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}\right)}{\left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right)^2}$

2. Taylorov razvoj funkcije omogućuje da se funkcija aproksimira polinomom. Izračunati petu parcijalnu sumu u Taylorovom razvoju funkcije kosinus oko nule pa kalkulatorom provjeriti kolika greška nastaje ovom aproksimacijom kod računanja funkcije kosinus za argument $x = 1$. ~~4~~

3. Riješiti: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$ 2

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{2}(6+x)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{6+x}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

4. Koja je definicija derivacije funkcije f u točki x_0? 3

Derivacija funkcije f u nekoj točki odgovara nagibu tangente grafa u toj točki.

IME I PREZIME:

5. Ispitati lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (\ln x)^2$.

7

$f'(x) = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

$\ln x = 0$

$x = e^0$

$x = 1$

$f(1) = 0$

DOMENA

$\ln x > 0$

$\langle 0, +\infty \rangle$

	0	$0{,}5$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

LOK. MINIMUM $(1, 0)$

6. Ispitati konvergenciju reda $\sum_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

5

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n \cdot (-1)}$$

$$= e^{-1} \neq 0$$

RED DIVERGIRA