MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:
Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO! Obavezno popuniti sva polja ispod⇊. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: PETAR PERICA **BROJ INDEKSA:**

VRIJEME POČETKA: **VRIJEME ZAVRŠETKA:**

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova

Ukupno: 25

1. Ispitati tok funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$ i na temelju toga skicirati njen graf. ~~13~~ 8

1) DOMENA

$x^2+2x+8 \geq 0$

$x^2+2x+8=0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 8}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-28}}{2}$

nema $\mathbb{R}$ nultočke

$D_f: \langle -\infty, +\infty \rangle$

2) ASIMPTOTE

a) V.A – nema $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+8} = +\infty$

b) H.A – nema H.A

c) K.A

$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+8}}{x} \Big/ :x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$l = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+8} - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+8} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x+8}+x}{\sqrt{x^2+2x+8}+x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+8-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+8}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+8 \quad /:x}{\sqrt{x^2+2x+8}+x \quad /:x} = \frac{2}{2} = 1$ $y = kx + l$, $\boxed{y = x+1}$ – DESNA KOSA ASIMPTOTA

$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+8}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+8} \quad /:x}{-x \quad /:x} = \frac{1}{-1} = -1$

$l = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+8} + x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+8} - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+8} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2-2x+8}+x}{\sqrt{x^2-2x+8}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-2x+8-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+8}+x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+8 \quad /:x}{\sqrt{x^2-2x+8}+x \quad /:x} = \frac{-2}{2} = -1$ $y = kx + l$, $\boxed{y = -x-1}$ – LIJEVA KOSA ASIMPTOTA

3) GLOBALNA SVOJSTVA

- funkcija je neomeđena
- $f(-x) = \sqrt{x^2-2x+8}$
- ni parna, ni neparna
- nije periodična

4) SJECIŠTA S KOORDINATNIM OSIMA

$\sqrt{x^2+2x+8} = 0$

– funkcija nema $\mathbb{R}$ nultočke

5. DERIVACIJE

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+2x+8)' =$

$= \frac{1}{2}(x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2)$

$= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

$f''(x) = \frac{2\left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right) - (2x+2)\cdot\left(\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}\right)}{\left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right)^2}$

2. Taylorov razvoj funkcije omogućuje da se funkcija aproksimira polinomom. Izračunati petu parcijalnu sumu u Taylorovom razvoju funkcije kosinus oko nule pa kalkulatorom provjeriti kolika greška nastaje ovom aproksimacijom kod računanja funkcije kosinus za argument $x = 1$. ~~4~~

3. Riješiti: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$ 2

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{2}(6+x)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{2\sqrt{6+x}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

4. Koja je definicija derivacije funkcije f u točki x_0? 3

Derivacija funkcije f u nekoj točki odgovara nagibu tangente grafa u toj točki.

IME I PREZIME:

5. Ispitati lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (\ln x)^2$.

7

$f'(x) = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

$\ln x = 0$

$x = e^0$

$x = 1$

$f(1) = 0$

DOMENA

$\ln x > 0$

$\langle 0, +\infty \rangle$

	0	$0{,}5$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

LOK. MINIMUM $(1,0)$

6. Ispitati konvergenciju reda $\sum_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

5

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n \cdot (-1)}$$

$$= e^{-1} \neq 0$$

RED DIVERGIRA

Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

$\boxed{1}$ 6. KRITIČNE TOČKE

$f'(x) = 0$

$\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}} = 0$

$2x+2=0$

$2x = -2 \quad /:2$

$x = -\frac{2}{2}$

$\boxed{x=-1}$

$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 2 + 8}$

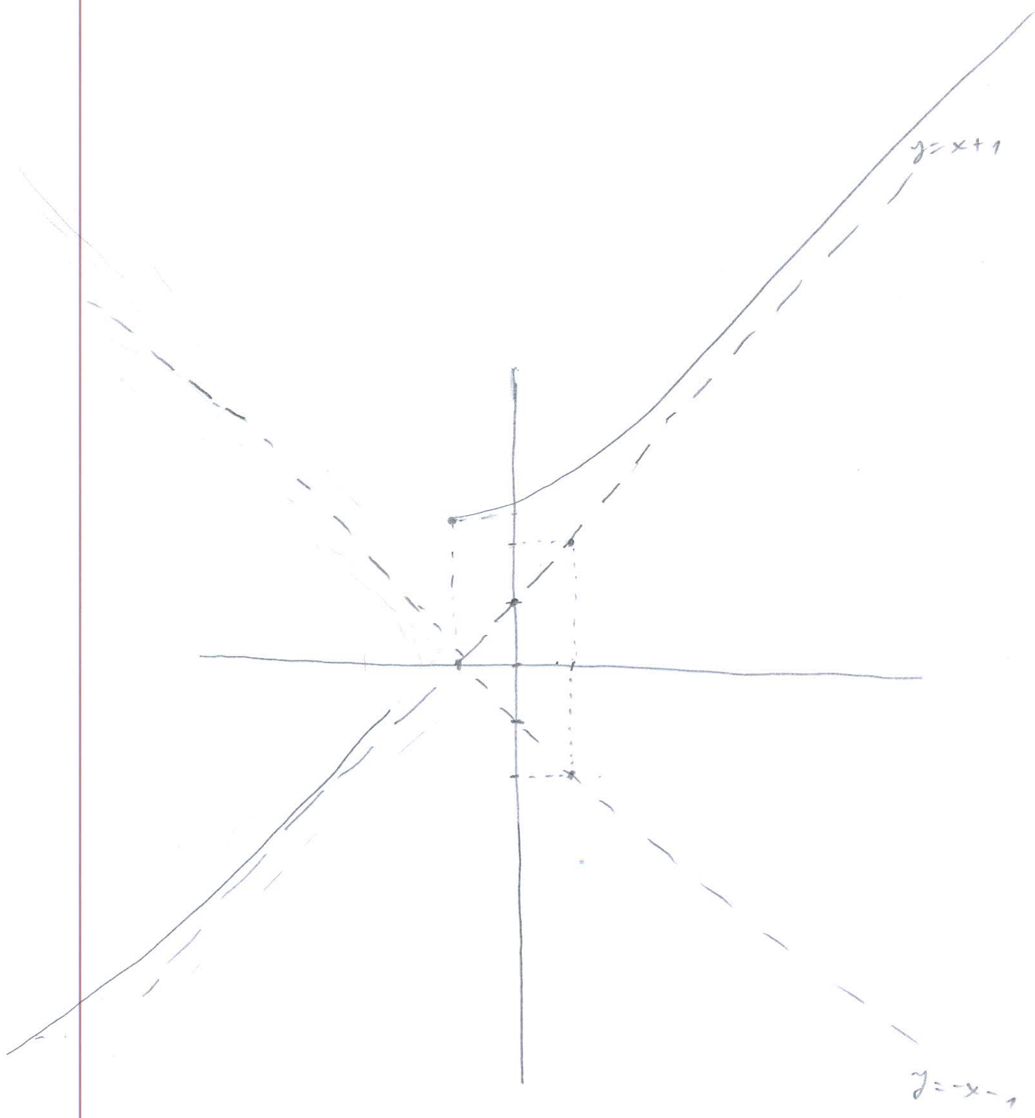
$f(-1) = \sqrt{1-2+8}$

$f(-1) = 2{,}64$

K.T $(-1, 2{,}64)$

	$-\infty$ -2 -1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	↗	↗	

f raste na čitavoj domeni



y=x+1

x	0	1
y	1	2

y=-x-1

x	0	1
y	-1	-2

MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:
Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.
TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO! Obavezno popuniti sva polja ispod⇊. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.
IME I PREZIME: TIN LOBOREC **BROJ INDEKSA:**
VRIJEME POČETKA: **VRIJEME ZAVRŠETKA:**

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova
Ukupno:
19

1. Ispitati tok funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$ i na temelju toga skicirati njen graf. 13

2

① Domena $x^2+2x+8 \geq 0$

$x^2+2x+8=0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4-32}}{2}$

$D_f : \mathbb{R}$ //

$(\sqrt{x^2+2x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot (x^2+2x+3)' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{2(x+1)}{2(\sqrt{x^2+2x+3}}$

② ASIMPTOTE
iz domene vidimo da nema V.A, H.A ni K.A

PARNOST/NEPARNOST
③ $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2x + 8}$ funkcija nije periodična

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$

funkcija nije niti parna ni neparna

④ sjecište s X osi ⇒ $x=0$ ⇒ $f(x) = \sqrt{0+0+8} = \sqrt{8}$ //

-||- s y osi ⇒ $f(x)=0$ ↳ $\sqrt{x^2+2x+8} = 0 \;/^2$

$x^2+2x+8=0$ ne može biti

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4-32}}{2}$ //

0: nema sjecišta s y osi //

$(-x-1)(x+1)$

$= -x^2 - x - x - 1$

$= -x^2 - 2x - 1$

⑤ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+8}} (x^2+2x+8)'$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot (2x+2)$

$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ //

$f''(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x^2+2x+8) - (x+1) \cdot (\sqrt{x^2+2x+3})'}{(\sqrt{x^2+2x+3})^2}$

$f''(x) = \frac{(x^2+2x+8) - (x+1) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}\right)}{x^2+2x+8}$

$f''(x) = \frac{(x^2+2x+8) - x^2}{x^2+2x+8}$

$f''(x) = \frac{\frac{-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+8}}}{(x^2+2x+8)} = \frac{-x^2-2x-1}{}$

f''(x) je na prvom novom papiru //

2. Taylorov razvoj funkcije omogućuje da se funkcija aproksimira polinomom. Izračunati petu parcijalnu sumu u Taylorovom razvoju funkcije kosinus oko nule pa kalkulatorom provjeriti kolika greška nastaje ovom aproksimacijom kod računanja funkcije kosinus za argument $x = 1$. 4

$$\left(\sqrt{6+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} \cdot (6+x)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6+x}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{6+x}}$$

3. Riješiti: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right)$ 2

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right) = \cancel{\lim_{x\to 3}}\left[\left(\frac{\sqrt{6+3}-3}{3-3}\right)\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

imamo neodređeni oblik pa možemo koristit L'HOPITALOVO PRAVILO

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 3}\left(\frac{\left(\sqrt{6+x}-3\right)'}{(x-3)'}\right)$$
$$= \lim_{x\to 3}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{6+x}}}{1}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2\sqrt{6+x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

4. Koja je definicija derivacije funkcije f u točki x_0? 3

derivacija funkcije f u točki x_0 odgovara nagibu tangente grafa u toj točki

jedn. tang.

$$\boxed{y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

1) zadatak

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)' = \frac{(x+1)'\sqrt{x^2+2x+3} - (x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)'}{x^2+2x+3}$$

$$\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot 2x+2 = \frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Tim Laborec

$$= \frac{x^2+2x+3 - (x+1)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}}{x^2+2x+3}$$

$$= \frac{x^2+2x+3 + \frac{-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}}}{(x^2+2x+3)}$$

$$(-x-1)(x+1) = -x^2-x-x-1$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot\cancel{(x^2+2x+3)} - \cancel{x^2}-\cancel{2x}-\cancel{1}}{\cancel{\sqrt{x^2+2x+3}}}}{\cancel{x^2+2x+3}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{x^2+2x+3}$$

Kritične točke

6) $f'(x)=0$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = 0 \quad / \cdot \sqrt{x^2+2x+3}$$

$$K(-1, f(-1)) \Rightarrow \boxed{K(-1, \sqrt{7})}$$

$x+1=0$

$\boxed{x=-1}$

$$\frac{0{,}5}{}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{25-10+3}}$$

7) $-\infty \quad -5 \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

lok. min

$m(-1, \sqrt{7})$

8.) 9.)

//

$m(-1, \sqrt{7}) \Rightarrow$ lok i glob. minimum

//

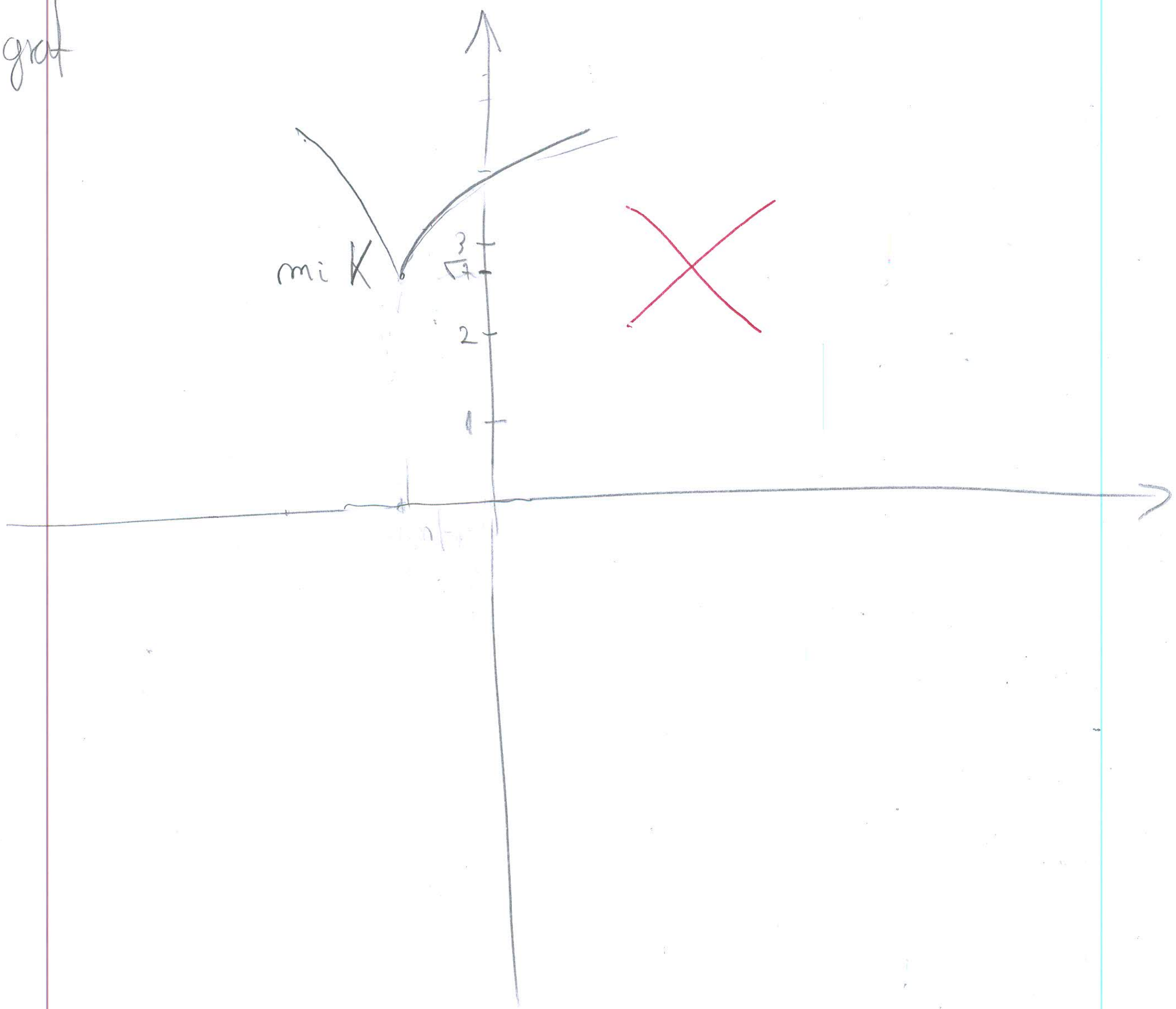
10. $f''(x)=0$

NEMA točke infleksije

$$\frac{7}{x^2+2x+8}=0 \quad / x^2+2x+8$$

$$7 \neq 0$$

graf



Ime i prezime:

7

5. Ispitati lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (\ln x)^2$.

$$f'(x) = 2\ln x \cdot (\ln x)'$$
$$= 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{2\ln x}{x} = 0 \quad / \cdot x$$
$$2\ln x = 0 \quad / : 2$$
$$\ln x = 0 \quad / e$$
$$x = e^0 = 1$$

Lokalni ekstrem

$$f(1) = (\ln 1)^2$$
$$f(1) = (0)^2 = 0$$

lokalni ekstrem je u tochi $\underbrace{m(1,0)}_{\text{lok. minimum}}$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	0,5	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	N/D		−		+		
$f(x)$	N/D		↘		↗		

m(1,0) lokalni minimum imamo u ovoj funkciji

TOČKI

6. Ispitati konvergenciju reda $\sum_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

5

Nužan uvjet konvergencije reda;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n} + \frac{-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}_{e}\Big)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

Nije ispunjen nužan uvjet za konvergenciju

red ne konvergira ✓

Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

$$\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)\cdot\left(-x^2-2x-1\right)$$

MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:

Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO! Obavezno popuniti sva polja ispod⇊. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: JOSIP FEŠTINI **BROJ INDEKSA:**

VRIJEME POČETKA: **VRIJEME ZAVRŠETKA:**

POPUNJAVA NASTAVNIK

Broj ↓ bodova
Ukupno: 18

1. Ispitati tok funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$ i na temelju toga skicirati njen graf. ~~13~~ 9

① DOMENA

uvjet $x^2+2x+8 \geq 0$

$x^2+2x+8=0$

$x_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot 8}}{2}$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{4-32}}{2}$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{-28}}{2} \Rightarrow$ nemoguće

$Df: R$

⑥ KRITIČNE TOČKE

$Df = Df'$

$f'(x) = 0$

$\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}} = 0$

$2x+2=0$

$2x=-2$

$x = \frac{-2}{2} = -1$ $T_k(-1, \sqrt{7})$

$f(-1) = \sqrt{1-2+8} = \sqrt{7} = 2,64$

H.A.

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+8} = [+\infty] =$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+8} \Rightarrow [x \to -x] \Rightarrow$

KOSE I VERTIKALNE NEMA

MONOTONOST

$f'(x) > 0$

$f'(x) < 0$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
	↘		↗

lok. minimum

Lokalni minimum je u točki $T_k(-1, \sqrt{7})$ ujedno i globalni.

② Nultočke

$f(x) = 0 \Rightarrow$ nema sjecišta x osi

$f(0) = \sqrt{0^2+2\cdot 0+8} = \sqrt{8} \approx 2,82 \Rightarrow T_0(0, \sqrt{8})$

④ PARNOST $\Rightarrow f(-x) = \sqrt{x^2-2x+8} \Rightarrow$ niti parna niti neparna

nije periodična i omeđena odozdo

⑤ I. i II. derivacija

$f'(x) = (x^2+2x+8)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+2x+8)'$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2)$

$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

$f''(x) = \frac{(2x+2)' \cdot 2\sqrt{x^2+2x+8} - (2x+2) \cdot (2\cdot(x^2+2x+8)^{\frac{1}{2}})'}{(2\sqrt{x^2+2x+8})^2}$

$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+2x+8} - (2x+2) \cdot (x^2+2x+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+2x+8)'}{(2\sqrt{x^2+2x+8})^2}$

$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+2x+8} - (2x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+8}} \cdot (2x+2)}{(2\sqrt{x^2+2x+8})^2} \Rightarrow$ na zadnjoj strani

2. Taylorov razvoj funkcije omogućuje da se funkcija aproksimira polinomom. Izračunati petu parcijalnu sumu u Taylorovom razvoju funkcije kosinus oko nule pa kalkulatorom provjeriti kolika greška nastaje ovom aproksimacijom kod računanja funkcije kosinus za argument $x = 1$. 4

L.H.

3. Riješiti: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right) = \frac{\sqrt{6+3}-3}{3-3} = \frac{3-3}{3-3} = \left[\frac{0}{0}\right]$ 2

L.H.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{6+x}-3)'}{(x-3)'} = \frac{1}{2}(6+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6+x)' = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{6+x}} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{6+3}} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

4. Koja je definicija derivacije funkcije f u točki x_0? 3

Ime i prezime:

5. Ispitati lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (\ln x)^2$. $\Rightarrow$ funkcija $f(x) = (\ln x)^2$ ima LOKALNI MINIMUM u točki $T(1,0)$. 7

$f'(x) = 2(\ln x) \cdot (\ln x)'$

$= 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

KRITIČNA TOČKA

$D_f = D_{f'}$

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
	$\searrow$	$\nearrow$	

lok. minimum

$f'(x) = 0$

$2\ln x = 0 \,/\, e^x$

$x = 1 \Rightarrow$ kritična točka

$f(1) = 0 \qquad T(1,0)$

6. Ispitati konvergenciju reda $\sum_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. 5

Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

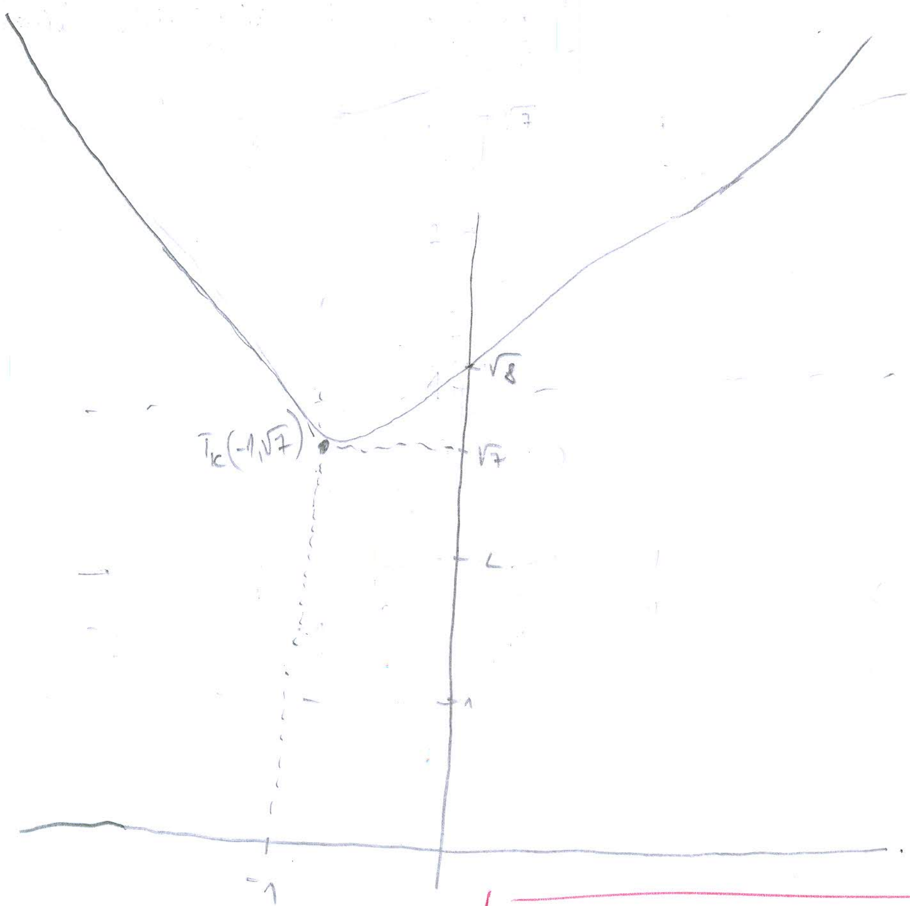
$$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+2x+8} - (2x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+8}} \cdot (2x+2)}{\left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+2x+8} - \frac{(4x^2-4x-4x+4)}{2\sqrt{x^2+2x+8}}}{\left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+2x+8} - 4x^2 - 48x - 4}{2\sqrt{x^2+2x+8} \cdot \left(2\sqrt{x^2+2x+8}\right)^2}$$

ZAKRIVLJENOST

Funkcija je presloženo tj. II. derivacija za ispitivanje konveksnosti i konkavnosti



NA USMENOM POSEBNO PITANJE RIJEŠAVANJE LIMESA KAO ONI KOJE DO SADA NISTE ISPRAVNO RIJEŠILI.

MATEMATIKA I - KOLOKVIJ #3:
Studentima koji posjeduju mobitel treba biti ugašen. Nisu dopuštene nikakve formule, niti posuđivanje pribora. U vrijeme trajanja ispita studenti ne mogu izlaziti van bez predaje ispita. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

TRAJANJE: 75 MINUTA. PIŠITE DVOSTRANO! Obavezno popuniti sva polja ispod⇊. U pitanjima s višestrukim ponuđenim odgovorima može biti više točnih.

IME I PREZIME: TENA KRMPOTIĆ **BROJ INDEKSA:**

VRIJEME POČETKA: **VRIJEME ZAVRŠETKA:**

POPUNJAVA NASTAVNIK
Broj ↓ bodova
Ukupno:
14

1. Ispitati tok funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$ i na temelju toga skicirati njen graf. ~~13~~

① DOMENA

$\sqrt{x^2+2x-8} > 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$

$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$ $x_2 = \frac{-2-6}{2}$, $x_2 = -4$ ⇒ ne ulazi u uvjet

② ASIMPTOTE V.A

$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x^2+2x-8} = 2{,}45$
$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2+2x-8} = 2{,}45$ > nema vertikalnih asimptota

H.A.

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-8}/x = \sqrt{\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{+2}{x}\right)\left(\frac{-8}{x}\right)} = 1$ > nema horizontalnih asimptota.

③ GL. SVOJSTVA
- nije omeđena
- nije periodična
- $f(x) = f(-x)$
$\sqrt{x^2-2x-8}$ > funkcija niti parna niti neparna

⑤ SJECIŠTA SA KOORDINATNIM OSIMA

$\sqrt{x^2+2x-8} = 0 \Rightarrow$

① DERIVACIJE

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-8}} \cdot 2x+2$

$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-8}} = \frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2x-8}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$

$f''(x) = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-8}} \cdot 2x+2} = \frac{1}{\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-8}}} = \frac{1}{\frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2x-8}}}$

$= \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}}}{1}$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}}(x+1)$

⑥ KRITIČNE TOČKE

$f'(x) = 0$

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}} = 0$

$x+1 = 0$

$x = -1$

GRAF ?

$k = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2x+8}}{x} \stackrel{L'H}{=} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+8}} \cdot 2x+2}{1}$

$= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}} = \frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2x+8}} = \frac{(x+1)\,/x}{\sqrt{x^2+2x+8}\,/x} = 1$

$l = f(x) + k \cdot x$

$l = \sqrt{x^2+2x+8} + x$

2. Taylorov razvoj funkcije omogućuje da se funkcija aproksimira polinomom. Izračunati petu parcijalnu sumu u Taylorovom razvoju funkcije kosinus oko nule pa kalkulatorom provjeriti kolika greška nastaje ovom aproksimacijom kod računanja funkcije kosinus za argument $x = 1$. 4

$f(x) = \cos x = 0$ $\quad x = 1$ $\quad f(1) = \cos 1 = 0{,}999$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f'(1) = -\sin 1 = -0{,}0175$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(1) = -\cos 1 = -0{,}999$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad f'''(1) = \sin 1 = 0{,}0174$

$f^{IV}(x) = \cos x$ $\quad f^{IV}(1) = \cos 1 = 0{,}999$

$f^{V}(x) = -\sin x$ $\quad f^{V}(1) = -\sin 1 = -0{,}0175$

$$f(x) = f(0)(x - x_0) - f'(0)\left(\frac{x-x_0}{2}\right)^2 - f''(0)\left(\frac{x-x_0}{4}\right)^3 - f'''(0)\left(\frac{x-x_0}{6}\right) - f^{IV}(0)\left(\frac{x-x_0}{8}\right)^5 - f^{V}\left(\frac{x-x_0}{10}\right)^6$$

$$\cos x = 0{,}99\,(x-1) + 0{,}0175\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 0{,}999\left(\frac{x-1}{4}\right)^3 - 0{,}0174\left(\frac{x-1}{6}\right)^4 - 0{,}999\left(\frac{x-1}{8}\right)^5 + 0{,}0175\left(\frac{x-1}{10}\right)^6$$

Nastaju dvije greške jer se od svake parcijalne sume, sume ponavljaju.

3. Riješiti: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}\right)$ $= \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+3}-3}{3-3}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \frac{\frac{1}{2\sqrt{6+x}}\cdot 1}{1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{6+x}}}{1} =$ 2

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{6+3}}}{1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}}{1} = \frac{\frac{1}{2\cdot 3}}{1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{6}$$

4. Koja je definicija derivacije funkcije f u točki x_0? 3

Derivacija funkcije u točki odgovara nagibu tangente na graf funkcije u toj točki.

Ime i prezime:

5. Ispitati lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (\ln x)^2$.

7

PROVJERA:

$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{2\ln x}{x}$ //

$\frac{2\ln x}{x} = 0$

$2\ln x = 0 \,/ : 2$

$\ln x = 0 \,/ : e$

$e^0 = 1$

$\frac{2\ln 1}{1} =$

$\frac{2 \cdot 0}{1} = \frac{0}{1} = 0$ //

	0	$\left(\frac{1}{2}\right)$ 1	(2) $+\infty$
$f'(x)$	NIJE	$-$	$+$
$f(x)$	DEF.	$\searrow$	$\nearrow$

LOK. MIN.

FUNKCIJA U TOČKI 1 DOBIVA SVOJ LOKALNI MINIMUM KOJI JE UJEDNO I GLOBALNI MINIMUM!

6. Ispitati konvergenciju reda $\sum_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. $= \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\frac{n}{1}}\right)^{n \cdot n}$ 5 X

$= e^{\lim_{x \to 0} n} = e^0 = 1 \neq 0$

2

RED DIVERGIRA

Ako vam nedostaje mjesta za neki zadatak slobodno nastavite pisati ovdje (istaknite broj zadatka)...

NA USMENOM POSEBNO PITANJE:

1. TAYLOROV RAZVOJ FUNKCIJE
2. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ IZ ZADANIH SVOJSTAVA FUNKCIJE (KAO DA NETKO ZA VAS RIJEŠI TIJEK) SKICIRATI GRAF.