Popuniti odmah!

Ime i prezime: IVAN GRZUNOV **Broj indeksa:** 57294

Datum: 22.8.2011. **Vrijeme:** od do

40

MATEMATIKA 2: Trajanje 120 minuta. Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

Broj ↓ bodova

1. Odrediti $\int x^3 \ln x \, dx$. 15
2. Zadano je $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Odrediti $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$. Skicirati graf funkcije f i površinu koja je određena integralom. 15
3. Grafički prikazati funkciju $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ pomoću razinskih krivulja. Koja je domena i kodomena ove funkcije? Strelicama označiti smjer rasta funkcije. Da li i zašto postoji limes $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? 15
4. Istražiti domenu i ekstreme funkcije $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y) - xy - (x-1)^2$. 20 5
5. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ 20 5
6. Riješiti $x^2 + yy' = 1$, uz početni uvjet $y(0) = 1$. 15

1. $$\int x^3 \ln x \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 & v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right\} = u \cdot v - \int v \cdot du =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^{\cancel{4}\,3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{x}_1} dx = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16} + c$$

15

4. $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y) - xy - (x-1)^2$

$D_f = \{(x,y) : x>0, y>0, x y \in \mathbb{R}\}$

$\partial_x f = \frac{1}{x} - y - 2x$ $= \frac{1}{x} - y - 2(x-1)$

$\partial_y f = \frac{1}{y} - x$

IME I PREZIME: IVAN GRZUNOV BROJ INDEKSA:

4.

$0 = \frac{1}{x} - y - 2x$

$0 = \frac{1}{y} - x \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$0 = \frac{1}{\frac{1}{y}} - y - 2 \cdot \frac{1}{y}$

$0 = y - y - \frac{2}{y}$

$0 = \frac{2}{y}$

$0 = 2 \cdot \frac{1}{y}$

$\frac{1}{y} = \frac{-2}{0}$

$y = 0$

$0 = \frac{1}{0} - x$

$0 = -x$

$x = 0$

$T(0,0)$

5

$\partial_{xx} f = -x^{-2} - 2$ ✓

$\partial_{yy} f = -y^{-2}$ ✓

$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 1$ ✗ $= -1$

$\partial_{xx} f_{(0,0)} = -0^{-2} - 2 = -2$

$\partial_{yy} f_{(0,0)} = -0^{-2} = 0$

$\partial_{xy} f(0,0) = 1$

$\Delta_1 = |-2| = -2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 0) - (1 \cdot 1) = 0 - 1 = -1$

SEDLASTA TOČKA U TOČKI T jer je zadovoljen uvjet da je barem jedna pozitivna det. negativna.

IME I PREZIME: IVAN GRZUNOV

BROJ INDEKSA:

6. $x^2 - yy' = 1$

$-yy' = 1 - x^2$

$-y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - x^2$

$-y \cdot dy = 1 - x^2 dx$ ✓

$\int -y\, dy = \int 1 - x^2 dx$ ✓

$\boxed{-\frac{y^2}{2} = x - \frac{x^3}{3} + c}$ ✓

$y(x) = 1$

$y(0) = 1$

$y = 1$

$x = 0$

$-\frac{1^2}{2} = 0 - \frac{0^3}{3} + c$

$-\frac{1}{2} = c$ ✓

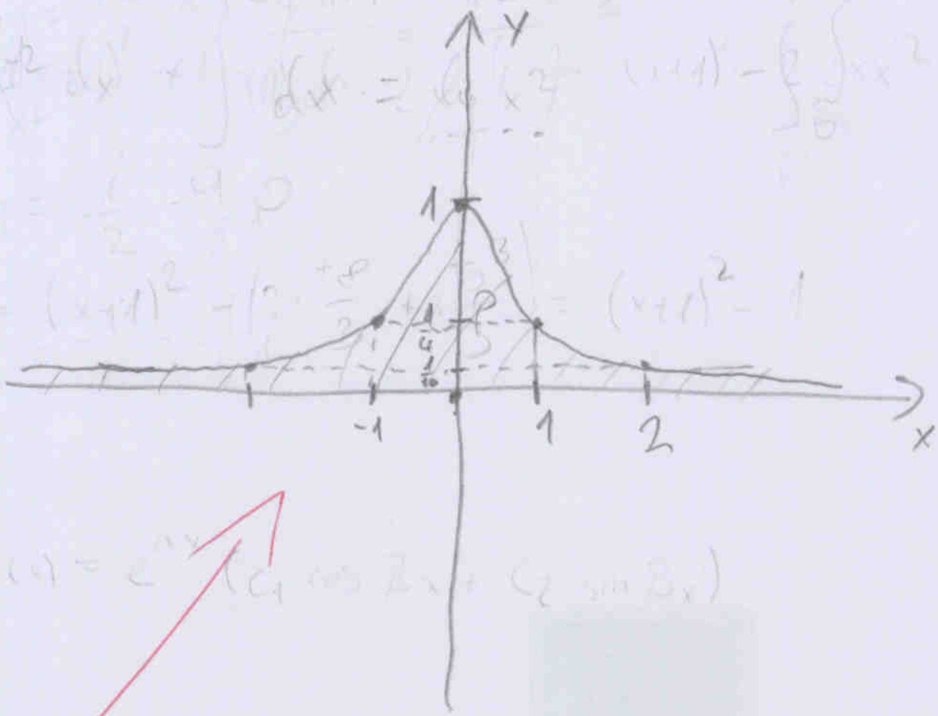
$c = -\frac{1}{2}$ ✓

$\boxed{-\frac{y^2}{2} = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}}$ ✓

15

Ime i prezime: IVAN GRZUNOV Broj indeksa:

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \arctan +\infty - \arctan 0 = 1$



$\frac{1}{x^2+1}$

$\cancel{0}$

IME I PREZIME: IVAN GRZUNOV BROJ INDEKSA:

5. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ ⇒ NEHOMOGENA

DA BISMO DOBILI RJEŠENJE NEHOMOGENE JEDNADŽBE NAJPRIJE TREBAMO ~~ŠE TREBAMO~~ RIJEŠITI (PARTIKULARNU) HOMOGENU JEDNADŽBU y_0.

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\lambda_1 = \frac{-2}{2} = -1$$

$f(x) = y_0 + Y$

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$$

$$\boxed{y = e^{-x}(c_1 + c_2 x)}$$

RJEŠENJE HOMOGENE

RJEŠENJE NEHOMOGENE?

$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x)$

5