

IME I PREZIME: Tony Cr

DATUM: VRIJEME: OD

DO

BROJ INDEKSA: 17-2-0045-2010

30

MATEMATIKA 1: Trajanje 100 minuta. Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

xoxoo

Broj ↓

bodova

1. Pravec p prolazi točkama A i B , a pravac q točkama A i C . Koliko iznosi kut između pravaca $\angle(p, q)$ ako je $A(2, -2, 1)$, $B(-1, 2, -3)$ i $C(1, -1, -2)$?

20

2. Među kompleksnim brojevima riješiti jednačbu: $z^3 - (\overline{i-1})^2 = 0$.

~~0~~

3. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \arctan(e^x)$.

10

4. Odrediti drugu derivaciju funkcije $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$.

~~0~~

5. Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.

~~0~~

1. $A(2, -2, 1)$ $B(-1, 2, -3)$ $C(1, -1, -2)$

$$\vec{AB} = \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$$

$$\cos \varphi = \frac{(-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{11}} = \frac{3 + 4 + 12}{\sqrt{451}} = \frac{19}{\sqrt{451}}$$

$$\cos \varphi = 0,8946750578$$

$$\varphi = 26^{\circ}31' \quad \checkmark$$

20

2. $z^3 - (\overline{i-1})^2 = 0$

$$(x+yi)^3 - (\overline{i-1})^2 = 0$$

~~0~~

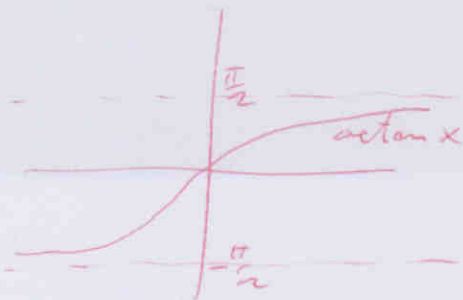
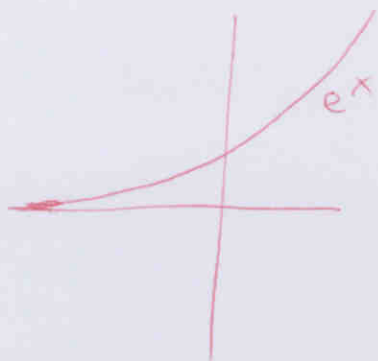
3) $f(x) = \arctan(e^x)$

$D(f) = \mathbb{R}$ ✓

- 1. Vertikalnih asimptota nema jer je $D(f) = \mathbb{R}$ ✓
- 2. Horizontalne asimptote

10

$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(e^x) = ?$



D.H.A.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(e^x) = \arctan(\lim_{x \rightarrow \infty} e^x)$$

$$= \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$y = \frac{\pi}{2}$

L.H.A.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(e^x) = \arctan(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x)$$

$$= \arctan 0 = 0$$

$y = 0$

5. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

1) Domena

$x+1=0$

$x = -1$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ✓ 2) Parnost

$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x+1} = \frac{x^2+1}{-x+1} \neq f(x) \neq -f(x)$

Funkcija nije ni parna ni neparna

3) Periodičnost

Funkcija nije periodična jer nije trigonometrijska

4) Nultočke

$x^2+1=0$

$x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-1}$

$x = \pm i$ → nema realnih nultočka

5) Asimptote

V.A.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{(-1)^2+1}{-1+1} = \frac{1+1}{0} = \infty$

$x = -1$ → Vertikalna asimptota ✓

H.A.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1} / :x^2 = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$

nema horizontalnih asimptota

K.A.

$y = kx + l$

$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} / :x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ $k=1$

$l = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{x}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1 - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x+1} / :x$

$y = 1 \cdot x + (-1)$

$y = x - 1$ ✓ DESKA K.A.

$y = x - 1$

$l = -1$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}} = -1$

6. Ekstremi

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot (x+1) - (x^2+1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - (x^2 + 1)}{x^2 + 2x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x(2x+1) - 1 = 0$$

3. $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} (x \rightarrow -x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$

$k=1$ ✓

$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x \right) (x \rightarrow -x)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{-x+1} + x \right) = \frac{x^2+1+x(-x+1)}{-x+1}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{-x+1} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-1+\frac{1}{x}} = -1$

$l = -1$

$y = kx + l$

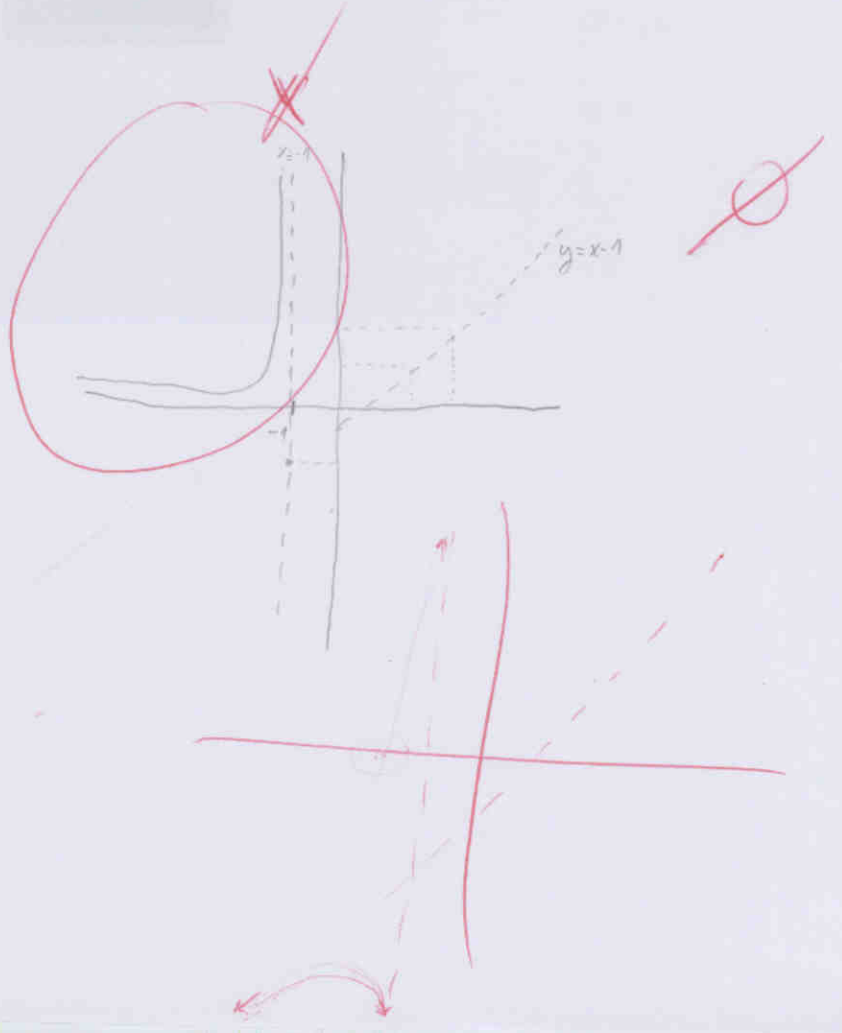
$y = x - 1$ - lijeva KA ✓

7. Intervali monotonosti

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)		+	+
f(x)		↗	↗

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^2 + (-2) - (-2)^3}{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1} = 14 > 0$$

$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 2^3}{2^2 + 2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{9} > 0$$



4.

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - x} \cdot \left(\frac{1}{x} - x\right)'$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} - x} \cdot \left(\frac{-x}{x^2} - 1\right) \quad \times$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1 \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-\frac{x}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} - x} = \frac{\frac{-x - x^2}{x^2}}{\frac{1 - x^2}{x}} = \frac{-x^2 - x^3}{x^2 - x^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-x^2 - x^3)' \cdot (x^2 - x^4) - (-x^2 - x^3) \cdot (x^2 - x^4)'}{(x^2 - x^4)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(-2x - 3x^2) \cdot (x^2 - x^4) - (-x^2 - x^3) \cdot (2x - 4x^3)}{(x^2 - x^4)^2}$$

$$= \frac{(-2x^3 + 2x^5 - 3x^4 - 3x^6) - (-2x^3 + 4x^5 - 2x^4 + 4x^6)}{(x^2 - x^4)^2}$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x^5 - 3x^4 - 3x^6 - 2x^3 - 4x^5 + 2x^4 - 4x^6}{(x^2 - x^4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^3 - 2x^5 - x^4 - 7x^6}{(x^2 - x^4)^2}$$

MATEMATIKA 1: Trajanje 100 minuta. Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

1. Pravac p prolazi točkama A i B , a pravac q točkama A i C . Koliko iznosi kut između pravaca $\angle(p, q)$ ako je $A(2, -2, 1)$, $B(-1, 2, -3)$ i $C(1, -1, -2)$?
2. Među kompleksnim brojevima riješiti jednadžbu: $z^3 - (i-1)^2 = 0$.
3. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \arctan(e^x)$.
4. Odrediti drugu derivaciju funkcije $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$.
5. Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

1) B A

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ +2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{3 + 4 + 12}{\sqrt{9 + 16 + 16} \cdot \sqrt{1 + 1 + 9}}$$

C A

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ +2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{19}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{11}} = \frac{19}{\sqrt{451}} = \frac{19}{21.23676058}$$

$$= 0.894675057$$

$$= 26^\circ 31' 60'' \checkmark$$

20

4.) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$

$$g'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - x\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

$$g''(x) = \frac{(1-x^2)' \cdot x - (1-x^2) \cdot x'}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{1 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2}{x^4}$$

$$g''(x) = \frac{-2x \cdot x - 1 + x^2}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{0 - 2x}{x^4}$$

$$g''(x) = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

$$g''(x) = \frac{-2x^2 - 1 + x^2}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{0 - 2x}{x^4}$$

$$g''(x) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

$$g''(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot \frac{2x}{x^4}$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{x} - x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1+x^2}{x^2}\right)}{\frac{1-x^2}{x}} = -\frac{\frac{1+x^2}{x^2}}{\frac{1-x^2}{x}}$$

$$= \frac{x \cdot (1+x^2)}{x^2 \cdot (1-x^2)} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \frac{1+x^2}{x-x^3}$$

3. $f(x) = \arctan(e^x)$? TOTAL 100%

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} - x \right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x} - x \right)'$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{x}{x^2} \right)}$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\frac{-1}{1}$$

$$\frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{x}{1} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1-x^2}{x}$$

IME I PREZIME:

DOMURAN TUTA

BRJ INDEKSA:

$$5) \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

DOMENA

$$D_f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \checkmark$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

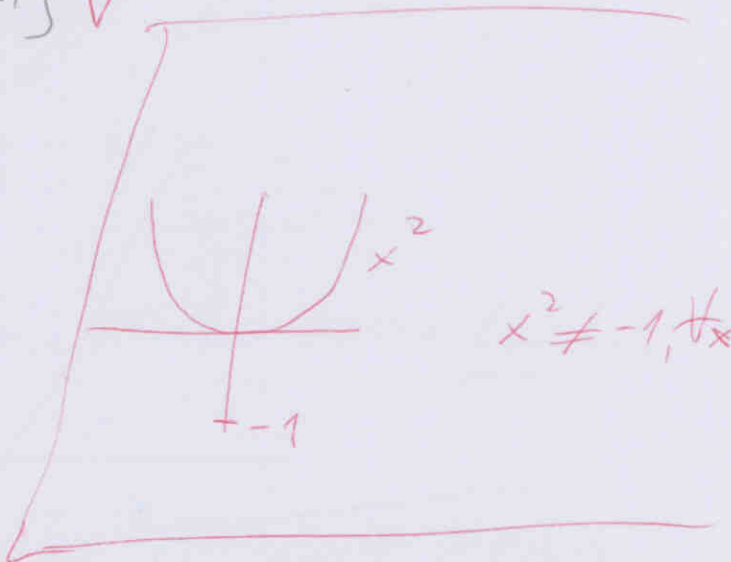
NUL TOČKE

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x_{1,2} = \pm i \quad \times$$

VIDI CAR



$$f(0) = \frac{0^2 + 1}{0 + 1} = 1 \quad y = 1$$

PARNOST

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} = f(x) = \frac{x^2 + 1}{-x + 1} = \text{NITI PARAN NITI NEPARAN}$$

V. A.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-1)^2 + 1}{-1 + 1} = \frac{1 + 1}{0} = \frac{2}{0} = \infty \quad \checkmark \checkmark$$

$$\text{H. A.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \stackrel{\cdot 1/x^2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \pm \frac{1}{x^2}}{\frac{x^1}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \rightarrow \text{REMA H. A.}$$

ISTRAŽI K. A. VIDI CAR

Popunite odman!

IME I PREZIME: Toni Mika

BROJ INDEKSA: 57277

DATUM: _____ VRIJEME: OD _____ DO _____

MATEMATIKA I: Trajanje 100 minuta. Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

~~0~~
xoxoo
Broj ↓
bodova

1. Pravac p prolazi točkama A i B , a pravac q točkama A i C . Koliko iznosi kut između pravaca $\angle(p, q)$ ako je $A(2, -2, 1)$, $B(-1, 2, -3)$ i $C(1, -1, -2)$?
2. Među kompleksnim brojevima riješiti jednadžbu: $z^3 - (i-1)^2 = 0$.
3. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \arctan(e^x)$.
4. Odrediti drugu derivaciju funkcije $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$.
5. Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

4) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$

$y' = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - x\right)} \cdot (-x^{-2} - 1)$ ✓

$y'' = (-x^{-2} - 1) \cdot (2x^{-3})$ ✗

$f' = \frac{1}{\left(\frac{1-x^2}{x}\right)} \cdot \left(\frac{-1-x^2}{x^2}\right) = -\frac{\frac{1+x^2}{x}}{\frac{1-x^2}{x}}$

$= -\frac{1+x^2}{x-x^3}$

$\Rightarrow y'' = -\frac{(1+x^2)'(x-x^3) - (1+x)(x-x^3)'}{(x-x^3)^2} = \dots$

5) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

$y' = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$ ✓

~~0~~ **BOLJE SE SAO GRAF**

2)

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z^3 - (i-1)^2 = 0$

$z = \sqrt{(x+i)^2 + i^2}$

=

Popuniti odmah!

IME I PREZIME: BORIS KREŠIĆ

BROJ INDEKSA:

DATUM: 15.09.2011. VRIJEME: OD 08:15 DO

MATEMATIKA 1: Trajanje 100 minuta. Ispit se održava sukladno objavljenim pravilima. Na snazi je Pravilnik o stegovnoj odgovornosti studenata.

xoxoo
Broj ↓
bodova

1. Pravac p prolazi točkama A i B , a pravac q točkama A i C . Koliko iznosi kut između pravaca $\angle(p, q)$ ako je $A(2, -2, 1)$, $B(-1, 2, -3)$ i $C(1, -1, -2)$?
2. Među kompleksnim brojevima riješiti jednadžbu: $z^3 - (\overline{i-1})^2 = 0$.
3. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \arctan(e^x)$.
4. Odrediti drugu derivaciju funkcije $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$.
5. Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

① $A(2, -2, 1)$
 $B(-1, 2, -3)$
 $C(1, -1, -2)$