

IME I PREZIME: ANTONIO KUŽANOVIC

BROJ INDEKSA: 14-2-0031-2010

DATUM: 24.1.2011. VRIJEME: OD 12:30 DO 13:45

MATEMATIKA 1: Trajanje 100 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pišaći pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

oxxo

70

Broj ↓
bodova

10

Izračunati limese:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - 2x)$

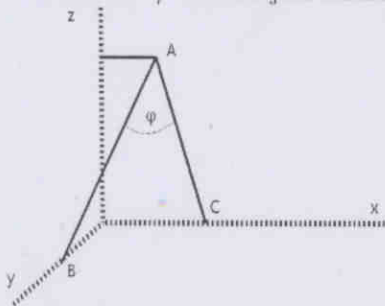
2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

Gaussovom metodom riješiti matricni sustav:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -8 & -9 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

20

Zadana je konfiguracija nosača kao na slici ispod. Točke su A(1,1,1), B(0,1,0) i C(2,0,0). Potrebno je odrediti kut φ korištenjem formule za kut između vektora.



20

Odrediti drugu derivaciju funkcije: $f(x) = e^{-x^2}$

20

Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije f iz zadatka 4.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - 2x)$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 3x} + 2x}{\sqrt{x^2 + 3x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + 2x} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{3x}{x^4}} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}} + \frac{2}{x}} = -3$$

$= -\frac{3}{0^+} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

L'HOSP.

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)'}{(1 - \tan x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

10

2)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -8 & -9 & -8 \\ 5 & 5 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 5R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \\ 0 & -10 & -10 & -12 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & -10 & -10 & -12 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \\ \\ R_3 + 10R_2 \\ R_4 + 5R_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \lambda \\ \end{array}$$

SUSTAV IMA BESKONAČNO RJEŠENJA

$$\frac{4}{1} - \frac{12}{5} = \frac{20}{5} - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{10 \cdot 6}{8} = 12$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

✓
20

3)

$$a = \frac{13}{5}$$

$$A(1, 1, 1)$$

$$B(0, 1, 0)$$

$$C(2, 0, 0)$$

$$\varphi = ?$$

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = v_1 \quad \checkmark$$

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = v_2$$

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \|v_2\| \cos \varphi (v_1, v_2) \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{2} \cos \varphi (v_1, v_2)$$

$$-1+0+1 = \sqrt{3} \sqrt{2} \cos \varphi (v_1, v_2)$$

$$\cos \varphi (v_1, v_2) = \frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \quad \checkmark$$

$$\cos \varphi (v_1, v_2) = 0 \quad \checkmark$$

$$\arccos \varphi = 1,57 \times \text{arc cos cos } \varphi = 1,57$$

$$\varphi = 1,57 // \quad \checkmark \quad = \varphi = 1,57 = \frac{\pi}{2}$$

20

$$= 90^\circ$$

OKOMICA

4.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \quad \checkmark$$

$$(-2x)' = -2$$

$$(-x^2)' = -2x$$

$$f''(x) = (-2x)' \cdot e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2x e^{-x^2}) = \checkmark$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2 + 4x^2) \quad \checkmark$$

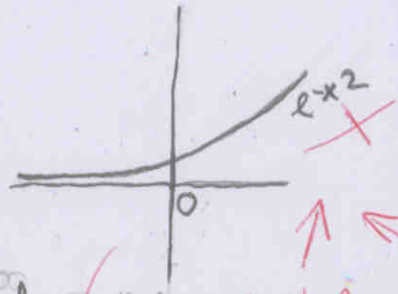
20

5.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

FUNKCIJA NEMA V.A. $(-\infty, +\infty)$

$$D_f = \mathbb{R} \quad \checkmark$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0 \quad \text{H.A.} \quad \checkmark$$

$$f(x) = 0$$

$$e^{-x^2} \neq 0 \quad \checkmark$$

NA SLICI JE $y=0$ SAMO ASIMPTOTA LIJEVO, A NIJE DESNO. KONTRADIKCIJA SA $y=0$ D.H.A.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = |x \rightarrow -x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(-x)^2} = 0 \quad \checkmark \quad \text{L.H.A.}$$

FUNKCIJA IMA H.A. \rightarrow FUNKCIJA NEMA OKOSIH I ASIMPTOTA. \checkmark

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

FUNKCIJA JE PARNA

$$f'(x) = 0$$

$$-2x e^{-x^2} = 0 \quad | \cdot (-2x) \Rightarrow \underline{x=0}$$

$e^{-x^2} \neq 0$ FUNKCIJA NEMA KRITIČNIH TOČKA, FUNKCIJA NEMA EKSTREMA.

$f'(x) > 0$ FUNKCIJA RASTE DUŽ CIJELE DOMENE. \times

$e^{-x^2} > 0 \rightarrow x \in (-\infty, \infty)$ FUNKCIJA RASTE

e^{-x^2} JE UVIJEK VEĆE OD NULE

FUNKCIJA NIJE PERIODIČNA. \checkmark

FUNKCIJA JE MONOTONA STALNO RASTE. \checkmark

FUNKCIJA JE OMEĐENA ODZGO. \checkmark

$$f''(x) = 0$$

$$e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 0$$

$$2 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

UMNOŽAK JEDNAK NULI KAD JE BAREM JEDAN OD FAKTORA NULA. \checkmark

$e^{-x^2} \neq 0 \rightarrow$ TO NIJE MOGUĆE

FUNKCIJA NEMA TOČKE INFLEKSIJE (PREGIBA)