IME I PREZIME: Ćvrt Sikuljan BROJ INDEKSA: 17-2-0066-2010

DATUM: VRIJEME: OD 17:40 DO 14:20

MATEMATIKA 1: Trajanje 100 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

ooox

10

Broj ↓ bodova

1. Među kompleksnim brojevima izračunati: $\sqrt[5]{\dfrac{1}{1-i}}$.

2. Gaussovom metodom eliminacije riješiti sustav linearnih jednadžbi i provjeriti da dobiveno rješenje doista rješava sustav:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 2 \\ x+2y-z &= 0 \\ 2x+4y+2z &= 3 \\ 2x+3y+5z &= 5 \end{aligned}$$

3. Odrediti sve asimptote funkcije $g(x)=\sqrt{x^2-x}$.

4. Ispitati domenu, periodičnost, parnost i prvu derivaciju funkcije $h(x)=\ln(\cos(2x))$.

10

5. Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$.

ŠTETA!

sustav nema rješenja zbog nule na lijevoj strani.

PROVJERA

IME I PREZIME: Ivan Silvijan BROJ INDEKSA: 17-2-0066-2010

3) ASIMPTOTE

$g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

$x^2 - x \geq 0$

$x^2 \geq x \;/^2$ ⇯ ✗

$x \geq \pm x$

$D_f: x \in \mathbb{R}$

NEJEDNADŽBA SE MOŽE RIJEŠITI TAKO DA SE PRVO RIJEŠI JEDNADŽBA, A ZATIM ODREDIMO PREDZNAKE NA INTERVALIMA IZMEĐU NULTOČAKA (I PREKIDA DOMENE)

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ili $x = 1$

$x^2 - x$: $-\infty$ ⊕ 0 ⊖ 1 ⊕ $+\infty$ $\Rightarrow \mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty \rangle$

H.A.

$\lim_{x\to\infty} g(x)\sqrt{x^2-x} = \left| \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}\right)/:x \right| = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1} = \boxed{1}$ ✗ ($\frac{x^2}{x^2}$)

$\lim_{x\to-\infty} (g(x)\sqrt{x^2-x} = \left| x \to (-x) \right| = \lim_{x\to\infty} \sqrt{(-x)^2 - (-x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}\right)/:x$

$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \boxed{1}$ ✗ ($\frac{x}{x}$)

H.A. $y = 1$ ✗

$\boxed{\lim \sqrt{x^2-x} \neq \lim \frac{\sqrt{x^2-x}}{x}}$

V.A.

$\lim_{x\to 0_+} \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to 0_+} \sqrt{0^2-0} = 0_+$

$\lim_{x\to 0_-} \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to 0_-} \sqrt{0_-^2-0} = 0_-$ } N.V.A.

KAKO MOŽEMO IMATI I HORIZONTALNE I KOSE ASIMPTOTE.

NEMOGUĆE. OVO TREBA ZNATI

U.A.

$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} /:x = \lim_{/:x \; x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$

$l_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} /:x = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1}+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y_1 = k_1 x + l_2$ $\boxed{y_1 = x - \frac{1}{2}}$ D.K.A. ✓

$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \left| x \to (-x) \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2-(-x)}}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-x} /:x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{-1}$

$k_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{-1} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

$l_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x} + x\right) = \left| x \to (-x) \right| = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(-x)^2-(-x)} + (-x)\right)$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} /:x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\boxed{y_2 = -x + \frac{1}{2}}$ ✓

IME I PREZIME: Cvar Silvijan BROJ INDEKSA: 17.2-0068-2010

IDER/DOMĆ./PERIOD./PARNOST

(h) a) $h(x) = \ln(\cos(2x))$

$h'(x) = [\ln(\cos(2x))]'$

$h'(x) = \frac{1}{\cos(2x)} \cdot \underbrace{(\cos 2x)'}_{=(-\sin 2x)2 = -2\sin 2x}$ //

$h'(x) = \frac{1}{\cos(2x)} \cdot -2\sin 2x$

$h'(x) \quad \frac{-2\sin 2x}{\cos(2x)}$ // ✓ 5

b) DOMENA

$h(x) = \ln(\cos(2x))$

$\cos 2x > 0$ X

$D_f: x \in \mathbb{R} > 0$

VIDI ŠPANJA

c) - FUNKCIJA JE PERIODIČNA (zbog trigonom. f.) KOJI PERIOD?

d) P/N $\cos(-x) = \cos x$ P

$h(-x) = \ln(\cos(2 \cdot (-x)))$

$h(-x) = \ln(\cos(-2x))$

$h(-x) = \ln(\cos(2x)) = h(x)$ → f. parna ✓ 5

$\neq -h(x)$

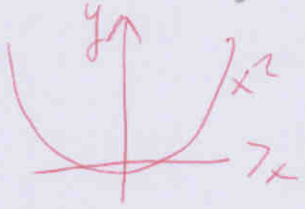
IME I PREZIME: Ivan Silvijan BROJ INDEKSA: 17-2-0066-2010

5. $h(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

$x^2+2 \neq 0$ $\quad$ $Df: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ✗

$x^2 \neq -2 \,/^2$

$x \neq \pm 2$



$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x^2 \neq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

P/N

$h(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+2} = \frac{x^2+1}{x^2+2} = h(x)$ → funkcija parna ✓

$\neq -h(x)$

- Nije periodična (nema trigo. f.) ✓

H.A

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} \,/:x^2 = \lim_{x\to\infty} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = \boxed{1}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = |x \to (-x)| = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1\,/:x}{x^2+2\,/:x} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \boxed{1}$ } H.A. ✓ $\boxed{y=1}$

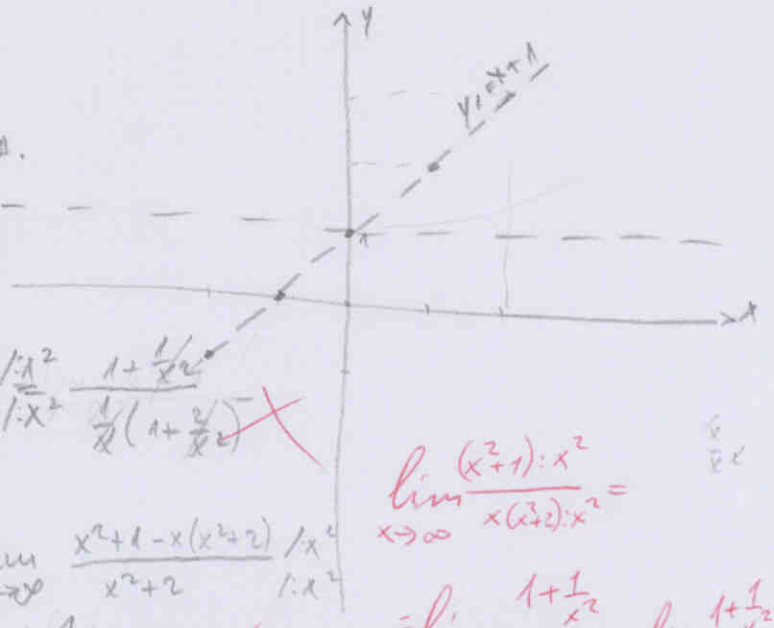
V.A

TOČKE PREKIDA V.A $\Rightarrow x=-2$

$x=2$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{2^2+1}{2^2+2} = \frac{5}{6}$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{(2)^2+1}{(2)^2+2} = \frac{5}{6}$ } N.V.A.



K.A

$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2+2}}{x}$) $= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x^2+2)} \,/:x^2 \,/:x^2 \quad \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$ ✗

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow k_1 = 1$

$\lim_{x\to\infty} (x^2+1) : x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{x(x^2+2)}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{2}{x}} =$

$= \frac{1}{+\infty} = 0$

$n_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2} - \frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x(x^2+2)}{x^2+2} \,/:x^2 \,/:x^2$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1$ ✗

$y_1 = x+1$ D.K.A

NE MOŽE BITI ~~VERTIKALNA~~ HORIZONTALNA I KOSA ASIMPTOTA NA ISTOJ STRANI

IME I PREZIME: Ćwer Silijaca BROJ INDEKSA: 17-2-0068-2010

⑤

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2+2}}{x} = |x\to(-x)| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+2}}{-x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2+2}}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{-x(x^2+2)} \Big/ x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2} - x\right) = |x\to(-x)| = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+2} - (-x)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1+x(x^2+2)}{x^2+2} \Big/ x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \qquad y_2 = k_2 x + l_2$$

$y_2 = x + 1$, L.K.O.

DERIVACIJE $(2x+0)^2 = 4x$,

$$h(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$$

$$h'(x) = \frac{(x^2+1)'\cdot x^2+2 - x^2+1\cdot(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} \qquad 2x+0 \qquad 2x+0$$

$$h'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+2) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^3+4x-2x^3+2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$$

$$h''(x) = \frac{(6x)'\cdot[(x^2+2)^2] - 6x\cdot[(x^2+2)^2]'}{[(x^2+2)^2]^2} \qquad 6$$

$$h''(x) = \frac{6\cdot(x^2+2)^2 - 6x\cdot 4x}{(x^2+2)^4}$$

$$h''(x) = \frac{6(x^2+2)^2 - 24x^2}{(x^2+2)^4}$$

$h'(x) > 0$ → funkcija rastuća

- Nema Mf
- Nema m G

$h''(x) \geq 0$ - funkcija konveksna

GRAF ?

$$f(0) = \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2},$$

IMATE DOSTA ZNANJA, ALI TREBA POPUNITI PRAZNINE.
VJEŽBATI ODREĐIVANJE DOMENE I LIMESE, TE CRTANJE GRAFA.
NAUČITI KOMPLEKSNE BROJEVE. VIDI ŠPANJA.