

IME I PREZIME:

STIPE SPANJA

BROJ INDEKSA:

17-2-0012-2010

DATUM: 27.1.2011. VRIJEME: OD 13:15 DO 14:20

MATEMATIKA 1: Trajanje 100 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisači pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

0000

Broj ↓  
bodova

20

1. Među kompleksnim brojevima izračunati:  $\sqrt[5]{\frac{1}{1-i}}$

2. Gaussovom metodom eliminacije riješiti sustav linearnih jednačbi i provjeriti da dobiveno rješenje doista rješava sustav:

$$x + y + 2z = 2$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$2x + 4y + 2z = 3$$

$$2x + 3y + 5z = 5$$

18

3. Odrediti sve asimptote funkcije  $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ .

4. Ispitati domenu, periodičnost, parnost i prvu derivaciju funkcije  $h(x) = \ln(\cos(2x))$ .

5

5. Na temelju ispitivanja toka funkcije napraviti skicu grafa funkcije  $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ .

$$1. \quad \sqrt[5]{\frac{1}{1-i}} = \quad \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{r} \left( \cos \frac{\rho + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\rho + 2k\pi}{m} \right)$$

$$\frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \checkmark$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{2}{2} \right| = 1$$

$$\varphi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4} \quad \checkmark$$

$$z = \sqrt[5]{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right)$$

$$z = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi \right) \right]$$

I  $k=0$ 

$$w_1 = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \right) = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} (0,987 + 0,156i) \\ = 0,933(0,987 + 0,156i) = 0,920 + 0,145i \quad \checkmark$$

II  $k=1$ 

$$w_2 = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} \right) + \left( i \sin \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} \right) \right] = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20} \right) \\ = 0,933(0,156 + 0,987i) = 0,145 + 0,920i \quad \checkmark$$

III  $k=2$ 

$$w_3 = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{20} + \frac{4\pi}{5} \right) + \left( i \sin \frac{\pi}{20} + \frac{4\pi}{5} \right) \right] = 0,933(-0,891 + 0,453i) \\ = -0,831 + 0,422i \quad \checkmark$$

IV  $k=3$ 

$$w_4 = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{20} + \frac{6\pi}{5} \right) + \left( i \sin \frac{\pi}{20} + \frac{6\pi}{5} \right) \right] = 0,933 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \checkmark \\ = -0,659 - 0,659i$$

V  $k=4$ 

$$w_5 = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{20} + \frac{8\pi}{5} \right) + \left( i \sin \frac{\pi}{20} + \frac{8\pi}{5} \right) \right] = 0,933(0,453 - 0,891i) \\ = 0,422 - 0,831i \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & x + y + 2z = 2 \\ & x + 2y - z = 0 \\ & 2x + 4y + 2z = 3 \\ & 2x + 3y + 5z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{array} \\ & \sim \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \end{aligned}$$

$R(A) = R(A|B) = 3 \checkmark$

$m = n$   
 $3 = 3$

$4z = 3$   
 $z = \frac{3}{4}$

$y - 3z = -2$   
 $y - 3 \cdot \frac{3}{4} = -2$   
 $y - \frac{9}{4} = -2$   
 $y = -2 + \frac{9}{4}$   
 $y = \frac{1}{4}$

$x + y + 2z = 2$   
 $x + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = 2$   
 $x + \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = 2$   
 $x + \frac{7}{4} = 2$   
 $x = 2 - \frac{7}{4}$   
 $x = \frac{1}{4}$

Rješenja' jednadžbe  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  }  $x = \frac{1}{4}$

PROVJERA NIJE NAPRAVLJENA!

4.  $h(x) = \ln(\cos(2x))$

$\cos 2x > 0$  / arc cos

$2x > \arccos 0$

$2x > \frac{\pi}{2} \quad | :2$

$x > \frac{\pi}{4}$

ili  $x > 45$

$D_f = \langle 45, +\infty \rangle$  X

$h(-x) = \ln(\cos 2(-x))$

$= -\ln(\cos(2x))$  X

$h(-x) = -h(x)$  f-ja je neparna

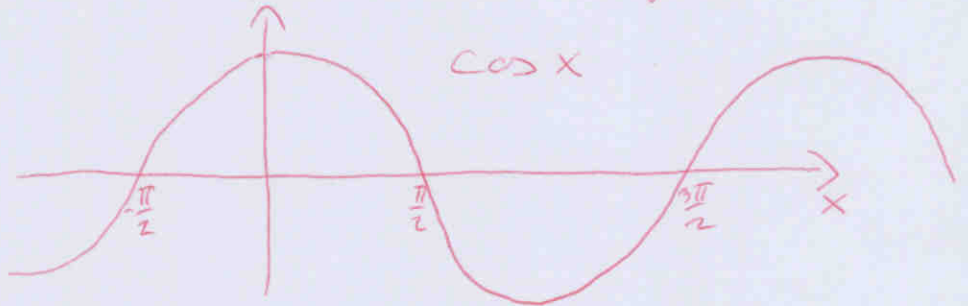
$h(x) = \ln(\cos 2x)$

$h'(x) = \frac{1}{\cos 2x} \cdot (\cos 2x)' \cdot (2x)'$

$h'(x) = \frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2$  ✓

$h'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x}$  ✓

arccos i cos su inverzne samo za cos na domeni  $[0, \pi]$ . Također arccos je padajuća po se rjeđnosti mijenja.



$D(f) = \{x : 2x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{x : x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$

ILI:  $D(f) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

NA OSNOVNOJ PERIODU, A DALJE SE PROŠIRUJE PO PERIODIČNOSTI (VIDI ISPOD)

5

Funkcija nije periodična jer je ovo logaritamska funkcija sa bazom e (loge)

VRIJEDI

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\Rightarrow \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)$

$\Rightarrow \cos(2(x + \pi)) = \cos(2x)$

$\Rightarrow \ln(\cos(2(x + \pi))) = \ln(\cos(2x))$

$\Rightarrow f(x + \pi) = f(x)$

$\Rightarrow \boxed{P = \pi}$

5.  $h(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

$D(f) = \mathbb{R}$

$x^2 + 2 \neq 0$   
 $x^2 \neq -2 \sqrt{\phantom{x}}$

$x_{1,2} \neq \pm\sqrt{2}i$

DOMENA ?

$h(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+2} = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

$h(-x) = h(x)$  Funkcija je parna. ✓

Funkcija nije periodična ✓

$h'(x) = \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2+1)}{(x^2+2)^2}$

$h'(x) = \frac{2x^3+4x - 2x^3 - 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$

$\frac{x^2+1}{x^2+2} = 0 \mid \cdot (x^2+2)$

$x^2+1 = 0$

$x^2 = -1 \sqrt{\phantom{x}}$

$x_{1,2} = \pm i$

NUZTAČKE

A(i, 0) B(-i, 0)

SJĚCIŠTE a osi y:

$x=0$

$y = \frac{0+1}{0+2}$

$y = \frac{1}{2}$

$S_y(0, \frac{1}{2})$

GRAF ?



ASIMPTOTE ?