

MATEMATIKA 3: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, tablica Laplaceovih transformacija, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posledicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

25

IME I PREZIME: Alen Čunčović

BROJ INDEKSA:

1. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$f y'''(t) - 2y''(t) = \cos(2t), \quad f(0) = f''(0) = 0, \quad f'(0) = -1.$$

~~Ø~~

2. Zadana je kružnica u prostoru: $K = \{(\cos t, 2 + \sin t, -\cos t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 2\pi]\}$ i vektorska funkcija $w(x, y, z) = (0, 3z - 3x, 3x - 3y)$. Izračunati $\oint_K (w|dr)$.

3. Izračunati

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} (x^2 dx + y dy + 2z dz)$$

10

4. Izračunati volumen područja između plašta stošca $x^2 + y^2 = z^2$ i plašta paraboloida $x^2 + y^2 = 3z$.

15

5. Odrediti duljinu 10 navoja zavojnice s parametrizacijom $x = \frac{1}{2} \cos(2t)$, $y = \frac{1}{2} \sin(2t)$ i $z = \frac{t}{10}$. ($t \in [0, 10\pi]$).

~~Ø~~

$$1. (s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)) - 2(s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^3 F(s) - s^2 \cdot 0 - s \cdot (-1) - 0) - 2(s^2 F(s) - s \cdot 0 - (-1)) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^3 F(s) + s - (2s^2 F(s))) + 1 = \frac{s}{s^2+4} \quad / \cdot s^3$$

$$s^3 F(s) - 2s^2 F(s) = \frac{s}{s^2+4} - s - 1$$

$$s^3 F(s) - 2s^2 F(s) = \frac{s - (s^2+4) - (s^2+4)}{s^2+4}$$

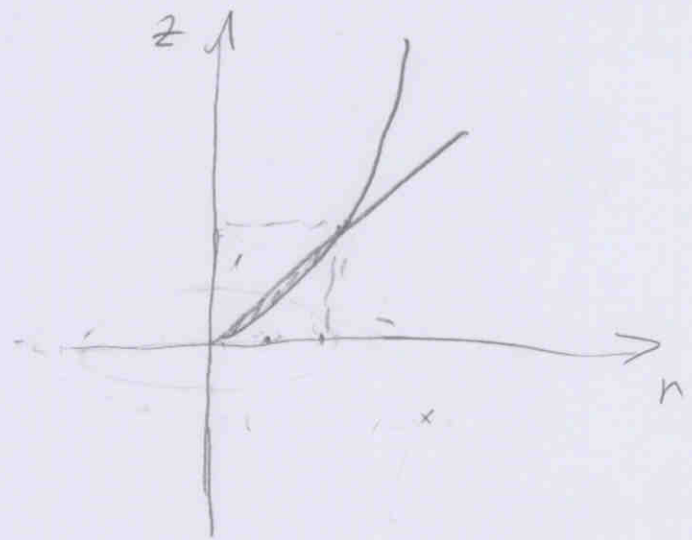
$$F(s) (s^3 - 2s^2) = \frac{s - (s^2+4) - (s^2+4)}{(s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{s - (s^2+4) - (s^2+4)}{(s^2+4)(s^3-2s^2)} = \frac{A}{3} + \frac{B}{s-2} + \dots$$

VIDI ANTE BARIČEVIĆ

4. $x^2 + y^2 = z^2$ $z = \pm r$
 PARABOLOID
 $x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow y^2 = 3z - x^2 / \sqrt{}$

\Downarrow
 $z = \frac{r^2}{2}$ $\frac{2}{3}$
 prijel. u cil.
 $x = r \cos \rho$ $\rho \in [0, 2\pi]$
 $y = r \sin \rho$ $z \in [\frac{r^2}{2}, r]$
 $z = z$ $r \in [0, 2]$



$$(r \cos \rho)^2 + (r \sin \rho)^2 = z^2$$

$$r^2 \cos^2 \rho + r^2 \sin^2 \rho = z^2$$

$$r^2 (\cos^2 \rho + \sin^2 \rho) = z^2$$

$$r^2 = z^2$$

$$\int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} d\rho \int_{\frac{r^2}{2}}^r dz = \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} d\rho \left(r - \frac{r^2}{2} \right) =$$

$$= \int_0^2 r dr \left(r - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \int_0^2 r dr \cdot 2\pi \left(r - \frac{r^2}{2} \right) =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r dr \left(r - \frac{r^2}{2} \right) = 2\pi \int_0^2 \left(r^2 - \frac{r^3}{2} \right) dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{3} \pi //$$

OSIM ŠTO JE NA NAZNAČENOM MJESTU ZAMIJENIO BROJ 3 U BROJ 2 CIJELA PROCEDURA I RAČUN JE TOČAN.

r	0	1	2
z	0	2	2

15

IME I PREZIME: Alen Čarković

BROJ INDEKSA:

5. $x = \frac{1}{2} \cos(2t)$, $y = \frac{1}{2} \sin(2t)$, $z = \frac{t}{10}$

$$\int_r f dr = \int_a^b (f \circ r) \cdot \|r'\| dt$$

$$x'(t) = -\sin(2t) \quad z'(t) = \frac{1}{10}$$
$$y'(t) = \cos(2t)$$

$$r' = \begin{bmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|r'\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$\|r'\| = \sqrt{(-\sin(2t))^2 + (\cos(2t))^2 + 0}$$

7 $t \in [0, 10\pi]$

8 $f \in [0, 10\pi]$

$$\|r'\| = \sqrt{-\sin^2 4t + \cos^2 4t} = \sqrt{8}$$

$$\sqrt{8} \int_0^{10\pi} dt = \sqrt{8} (10\pi - 0) = 10\sqrt{8}\pi$$

$$(\sin(2t))^2 = \sin^2(2t) \neq \sin^2(4t)$$

$$\sin^2(4t) + \cos^2(4t) = 1 \neq 8$$



POTREBNO JE JOŠ VJEŽBATI (SAMOSTALNO)
KAKO BI STEKLI RUTINU I IZBJEGLI
SITNE GREŠKE NA PISMENOM ISPITU.

3. $\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ (1, 0, 1) \end{matrix}$

$$\int_{\begin{matrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ (0, 1, 0) \end{matrix}} (x^2 dx + y dy + 2z dz) = (*) = f(0, 1, 0) - f(1, 0, 1)$$

UZ OVAJ ODABIR MINUSA

$$W = \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ 2z \end{bmatrix} = -\text{grad } f$$

A UZ ODABIR $W = \text{grad } f$

$$dx f = x^2 \int dx$$

$$f = \frac{x^3}{3} + c(y, z)$$

$$dy \left(\frac{x^3}{3} + c(y, z) \right) = y$$

$$\frac{dc(y, z)}{dy} = y \int dy$$

$$c(y, z) = \frac{y^2}{2}$$

$$dz (f) = 2z$$

$$dz \left(\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + c(z) \right) = 2z$$

$$\frac{dc(z)}{dz} = 2z \int dz$$

$$c(z) = z^2$$

$$f(1) - f(0)$$

$$\left(\frac{1^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 0 \right) = \left(\frac{1}{3} + 2 \right) - \frac{1}{2} = \frac{25}{6} - \frac{1}{2} = \frac{24}{6} - \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$$

10

VIDI BARIČEVIĆ