

MATEMATIKA 1: KOLOKVIJ 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PREDLOŠKU KOJI MOŽETE DOBITI OD NASTAVNIKA.

oooo

10

Broj bodova ↓

IME I PREZIME: VANJA HRASČIĆ - CAR

BROJ INDEKSA: 17-1-0036-2010

1. Istražiti konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 - 3n} - n)$

2. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$

10

3. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije).

10

4. Odrediti domenu i drugu derivaciju funkcije $g(x) = \arctan(e^x)$.

5. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije).

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$

$4 - x^2 \neq 0$
 $x^2 \neq 4 \quad | \sqrt{\quad}$
 $(x = \pm 2)$ ✓

H.A.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \text{brj naze } 0$

10

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1 \cdot x^2}{1 \cdot x^2} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$ ✓

KOSA

$y = kx + e$

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \text{brj (ne } 0)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{4 - x^2}}{\frac{x}{1}} = \frac{x^2 - 1}{x \cdot (4 - x^2)} = \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0$ nema kosu asimptotu ✓

V.A

$\lim_{x \rightarrow a} y = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \frac{3}{0} = \pm\infty$

-2, 2 = vertikalne asimptote ✓

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \frac{3}{0} = \pm\infty$

AKO POSTOJI HORIZONTALNA ASIMPTOTA TADA NE MOŽE POSTOJATI KOSA NA ISTOJ STRANI, A VI JE IPAK TRAŽITE. ZAŠTO?

KAKO STE MOGLI ZAKLJUČITI DA JE RIJEČ O VERTIKALNIM ASIMTOTAMA KADA NE ZNATE DA JE $\lim f(x) = \pm\infty$?



① zadatka

D'ALAMBERTOV KRITERIJ: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ konvergira
 > 1 nekonvergira
 ZA ~~RED~~ S POZITIVNIM ČLANOVIMA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2-3n} - n) = \frac{\sqrt{n^2-3n+1} - n+1}{\sqrt{n^2-3n} - n} = \frac{\sqrt{n^2-2n} + n}{\sqrt{n^2-3n} - n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} - \frac{1}{n^2}} - 1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1} = \frac{\sqrt{1} + 1}{-1} = -2$$

$= \frac{2}{-1} = -2 < 1$ konvergira

OVO NIJE RED S POZITIVNIM ČLANOVIMA, TREBALO JE PROMATRATI $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2 > 1$
 PROVJERI (VIDI) TAKODER NUŽAN UVJET KONVERGENCIJE

③ zadatka

$f(x) = \frac{x^2-1}{4-x^2}$

① domena $4-x^2 > 0$
 $-x^2 = -4 / (-1)$
 $x^2 = 4 / \sqrt{\quad}$
 $x = \pm 2$
 $D(f) = x \in]-2, 2[$ ✓

② NUL TOČKE

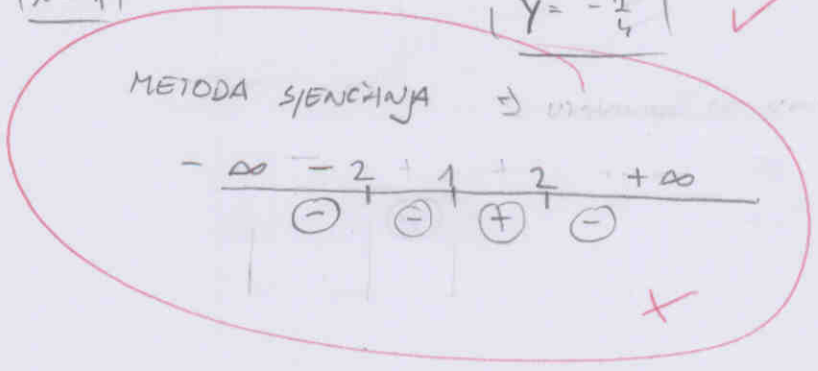
a) za x os (y=0)

$\frac{x^2-1}{4-x^2} = 0 / : (4-x^2)$
 $x^2-1=0$
 $\rightarrow x^2 = 1 / \sqrt{\quad}$
 $x = \pm 1$

za y os (x=0)

$f(x) = \frac{x^2-1}{4-x^2} = 0$ ✗
 $f(0) = \frac{0^2-1}{4-0^2} = -\frac{1}{4} (= -0.25)$
 $y = -\frac{1}{4}$ ✓

KVADRAT I DRUGI KORJEN NISU INVERZNE ZATO STE DOBILI SAMO JEDNO RJEŠENJE OD DVA $x = \pm 1$.



3) Ekstremi

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \frac{(x^2 - 1) \cdot (4 - x^2) - (x^2 - 1) \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 - (-2x^3 + 2x)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{8x - 2x^3 + 2x^3 - 2x}{(16 - x^4)} = \frac{6x}{(16 - x^4)}$$

(16 - x^4) = 16 - 8x^2 + x^4

6x = 0
x = 0

PAD I RAST

$y_0 = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = - < 0$ $T_{max} (0, -\frac{1}{4})$

KAKO ZNATE DA JE OVDJE MAX

4)

PARNOST I NEPARNOST

a) $f(x) = f(-x)$
 $\frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \frac{-x^2 - 1}{4 + x^2}$ - nije parna

b) $f(-x) = -f(x)$
 $\frac{-x^2 + 1}{4 + x^2} = -\frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$ = nije neparna

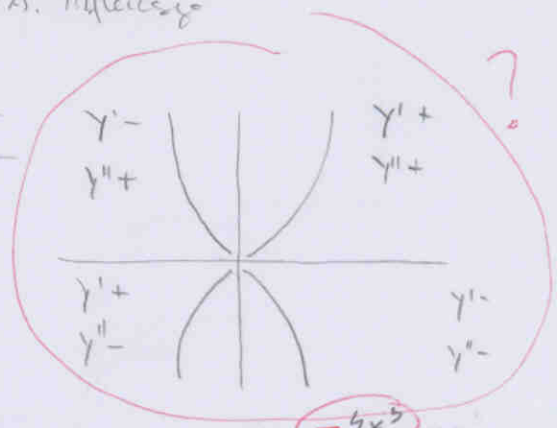
5)

KONKAVNOST I KONVEKSNOST

D, ex, v.A. infleksije

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	-	•	•	•	+
y''					

$y'' = ?$



6) TOČNE INFLEKSIJE

$y'' = \left(\frac{6x}{(4-x^2)^2} \right)'$

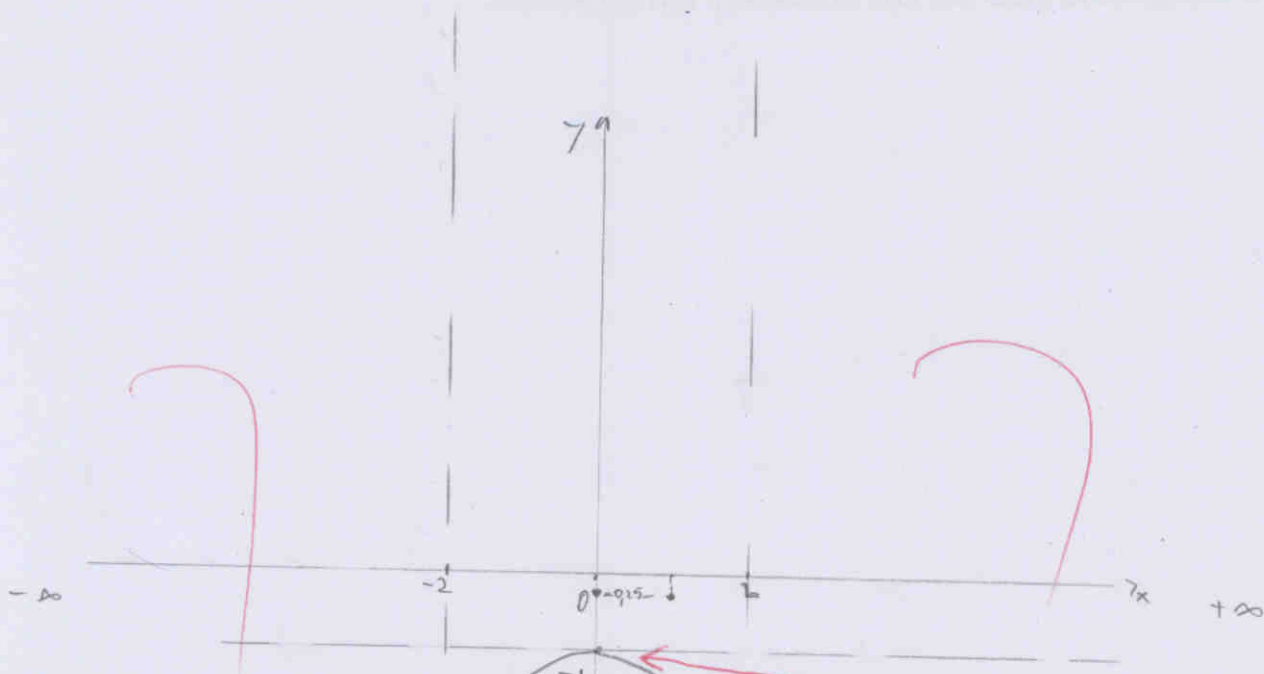
$$y'' = \frac{6x}{(16-x^4)} = \frac{(6x)' \cdot (16-x^4) - (6x) \cdot (-4x^3)}{(16-x^4)^2}$$

$$= \frac{96 - 6x^5 - (24x^4)}{16-x^4} = \frac{96 - 6x^5 - 24x^4}{16-x^4}$$

-4x^3

IME I PREZIME: VANJA HRASTIĆ - ČAČ

BROJ INDEKSA: 17-1-0056-2010



OVDJE
ISPADA
LOKALNI
MAKSIMUM
U TOČKI
 $T(0, -1)$

GDJE STE
TO IZRAČUNATI?

PO OVOME ISPADA

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty ?$$

OVO ZNANJE TOKA FUNKCIJE JE
NA RAZINI VRLO DOBROG SREDNJO-
ŠKOLSKOG, ČINI MI SE DA

TREBATE JOŠ UČITI GRADIVO OBRADENO NA SEMINARU
U ZADNJA 3 TJEDNA NASTAVE. POKUŠAJTE SAMI RIJEŠITI
NEKE SLOŽENIJE PRIMJERE.

