

MATEMATIKA 1: KOLOKVIJ 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaci pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PREDLOŠKU KOJI MOŽETE DOBITI OD NASTAVNIKA.

0000

45

Broj ↓ bodova

IME I PREZIME: **MARIN MAGAŠ**

BROJ INDEKSA: **17-2-0061-2010**

1. Istražiti konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 - 3n} - n)$

2. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$

3. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije).

4. Odrediti domenu i drugu derivaciju funkcije $g(x) = \arctan(e^x)$.

5. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije).

0
20
20
5
0

3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$

$4 - x^2 = 0$
 $-x^2 = -4$ $x = 2$
 $x^2 = 4$ $x = -2$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$ vertikalne

$(1, 0)$ $(-1, 0)$

$x = 0$
 $y = -\frac{1}{4}$ $(0, -\frac{1}{4})$

$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(4 - x^2) - (x^2 - 1)(4 - x^2)'}{(4 - x^2)^2} = \frac{2x(4 - x^2) - (x^2 - 1)(-2x)}{(4 - x^2)^2}$

$= \frac{8x - 2x^3 - (-2x^3 + 2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3 - 2x}{(4 - x^2)^2} = \frac{6x}{(4 - x^2)^2}$

$6x = 0$
 $x = 0$

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$					
	-	-	+	+	
	↘	↘	↗	↗	
		m			

m $(0, -\frac{1}{4})$

LOKALNI MINIMUM

IME I PREZIME: MARIN MAGAŠ

BROJ INDEKSA: 17-2-0061-2010

$$10 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n} - n \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 3n} + 4}{\sqrt{n^2 - 3n} + 4}$$

NUŽAN UVJET
KONVERGENCIJE
REDA

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n} + 4} = \frac{-3n}{\sqrt{n^2 - 3n} + 4} \quad | : n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{1 + 1} = -\frac{3}{2} \leq 0$$

ZAKLJUČAK?

~~⊙~~

30

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{4 - x^2} \cdot \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x}} = \text{neima}$$

kose asimptote

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = -1 \quad \text{H.A.} = y = -1$$

PRVO SE TRAZE ~~KOSE~~ ~~ASIMPTOTE~~ HORIZONTALNE ASIMPTOTE. TAMO GDJE POSTOJI HORIZONTALNA NEMA KOSE.

$$f''(x) = \left(\frac{6x}{(4-x^2)^2} \right)' = \frac{(6x)'(4-x^2)^2 - 6x(4-x^2) \cdot 2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4}$$

$$= \frac{6(4-x^2)^2 - 6x \cdot 2(4-x^2) \cdot (-4x)}{(4-x^2)^4} = \frac{6(4-x^2)^2 + 24x^2(4-x^2)}{(4-x^2)^4}$$

$$= \frac{(4-x^2)(6(4-x^2) + 24x^2)}{(4-x^2)^4} = \frac{24 - 6x^2 + 24x^2}{(4-x^2)^3} = \frac{24 + 18x^2}{(4-x^2)^3}$$

$$\Rightarrow 24 + 18x^2 = 0$$

$$-18x^2 = -24$$

$$x^2 = -\frac{24}{-18}$$

\times ~~neima~~ tačka infleksije

$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

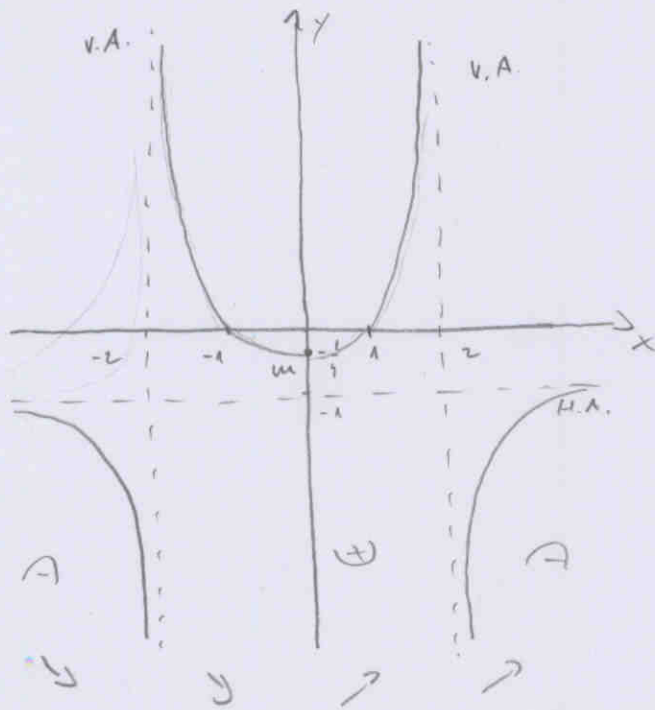
$f''(x)$	-	+	-
	A	U	A

$$f(-x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$$

funkcija je parna ✓

funkcija nije periodična (eliptična je)

3.



$$2. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{4 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{4 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \frac{x - 1}{4 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = \frac{x - 1}{4 - x} = +\infty$$

V.A. $x = 2$
 $x = -2$

4. $g(x) = \arctan(e^x)$ $D(g) = \mathbb{R}$ ✓ 5

$g'(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ ✗

$g'(x) = \frac{e^x \cdot (1+e^x)^2 - e^x \cdot 2(1+e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(e^x)^2(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

$= \frac{(1+e^x)(e^x(1+e^x) - 2(e^x)^2)}{(1+e^x)^4}$

$= \frac{e^x + (e^x)^2 - 2(e^x)^2}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - (e^x)^2}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$

5. nema vertikalne asimptote jer je podnocije definicije \mathbb{R}

$e^x > 0$ x nema nul tačaka

$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geq 0$ funkcija je stalno rastuća

$1 - e^x = 0$
 $e^x = 1$
 $x = \ln 1$
 $x = 0$

$T_1(0, 0 + \pi)$

