

IME I PREZIME: HRVOJE BATUR

BROJ INDEKSA: 17-2-0006

MATEMATIKA 1: KOLOKVIJ 2. Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, kalkulator, indeks ili icksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA OVOJ STRANICI I PREDLOŠCIMA ZA PISANJE KOJE MOŽETE DOBITI OD NASTAVNIKA.

000x

45

Broj ↓ bodova

1. Istražiti konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-2n}{3n+5}\right)^n$

2. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$

3. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije).

4. Odrediti domenu i drugu derivaciju funkcije $g(x) = \ln(1-x^2)$.

5. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije).

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-2n}{3n+5}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2-2n-3n-5}{3n+5}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5n-3}{3n+5}\right)^n$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+5}{-5n-3}}\right)^n = e^{-\frac{5n-3}{3n+5}} = e^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{e^{5/3}} = 0$

CAUCHYEV UVJET:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2-2n}{3n+5}\right)^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-2n/n}{3n+5/n} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2n}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{5}{n}} = \frac{\frac{2}{n} - 2}{3 + \frac{5}{n}} = -\frac{2}{3} = -0.66$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-2n}{3n+5}\right)$ red konvergira ✓ 20

② $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$
 $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2}$

DA = $\mathbb{R} \setminus \{-5, -3\}$ ✗ $x_1 = \frac{-10}{2} = -5$

✗ $(-\infty, -5] \cup [-5, -3] \cup [-3, +\infty)$ $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

KAKO STE ODJEDNOM ODLUČILI PODJELITI SA x^2 ? TO NEMOŽE BITI ISTO LAO PRJE.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 15} = [\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} + \frac{15}{x^2}} = 1$ ✗

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(-x)^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 8x + 15} /:x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{15}{x^2}} = 1$ horizontalna asimptota $y=1$ ✗

$$\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{x^2 + 8x + 15} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 + 8x + 15} = 0$$

nema vertikalnih asimptota ✓ 5

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}{x} \stackrel{/:x}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} + \frac{15}{x^2}}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}}{1} = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 15} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 15 - x^2}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 15}{\sqrt{x^2 + 8x + 15} + x} \stackrel{/:x}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{15}{x}}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} + 1} = \frac{8}{2} = 4$$

LIJEVA?

kosa asimptota

• DESNA

KAKO MOŽEMO IMATI HORIZONTALNU I KOSU ASIMPTOTU?
 $y = kx + l$
 $y = x + 4$

$$③ f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$$

$$D(f) = \mathbb{R} / \{-5, -3\}$$

-> presjek s x osi

presjek s y osi

$$f(x) = 0$$

$$f(0) = \sqrt{15} = 3.87$$

$$\sqrt{x^2 + 8x + 15} = 0$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = -3$$

- funkcija nije periodična
- omeđena odozdo i odozgo ✓
- $f(-x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$

$f(-x) \neq f(x)$
 $f(-x) \neq -f(x)$ } niti parna niti neparna

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 15)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 8)$$

$$= \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 8}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{x^2 + 8x + 15} - (2x + 8) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 8x + 15} \cdot (2x + 8)}{x^2 + 8x + 15} \quad \times \Rightarrow$$

④ $g(x) = \ln(1-x^2)$ $D_f = \langle -1, 1 \rangle \cup \{0, 1\}$

$\ln(1-x^2) > 0$
 $1-x^2 > 0$
 $-x^2 > -1$
 $x^2 < 1$
 $x < 1$

$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ ✓
 $f''(x) = \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)' = \frac{-2(1-x^2) - (-2x)(-2x)}{(1-x^2)^2}$
 $= \frac{-2+2x^2-4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x^2-2}{(1-x^2)^2}$ ✓

⑤ $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1-x^2) = [-\infty] = \text{X}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1-x^2) = -\infty$ X

nema vertikalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1-x^2) = \ln(0) = +\infty$ X
 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(0) = +\infty$ X

horizontalne asimptote
 $y = -1$
 $y = 1$

vojstra $f(-x) = f(x)$ funkcija je parna ✓
 nije periodična
 omeđena odozgo i odozdo X

$f(x) = 0$
 $\ln(1-x^2) = 0$
 $x = 0$
 presjek s x osi

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{1-x^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

| | | | | |
|---------|------------|-----|------------|-----------|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | 0 | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | \searrow | | \searrow | |

nema ekstrema
 nema točaka infleksije

$f''(x) = 0$ nije u
 $\frac{2x^2-2}{(1-x^2)^2} = 0$ 04
 $2x^2-2 = 0$
 $2x^2 = 2$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$

$f(0) = \ln(1) = 0$
 presjek s y osi

IME I PREZIME: HR VOJE BATUR (2x+8)² BROJ INDEKSA: 17-2-0008

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{x^2+8x+15}}{x^2+8x+15} = \frac{(2x+8)^2}{2\sqrt{x^2+8x+15}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cancel{4}(x^2+8x+15) - 4x^2 - 32x - 64}{2\sqrt{x^2+8x+15}} = \frac{1}{2} \frac{-4}{2\sqrt{(x^2+8x+15)^3}} = \frac{1}{4} \frac{-4}{(\sqrt{x^2+8x+15})^3}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x+15}} = 0$$

$$2x+8 = 0$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

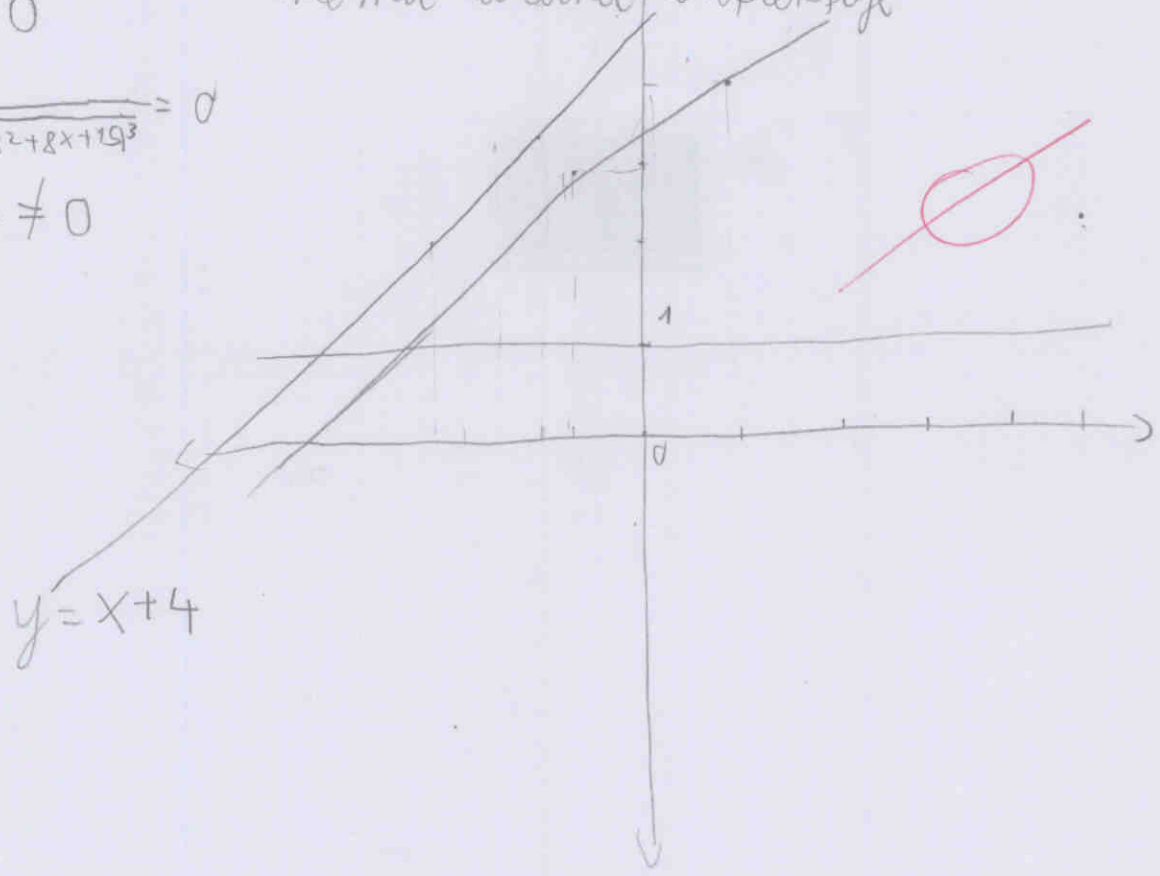
| | | | | |
|---------|-----------|------------|-----------|------------|
| | $-\infty$ | -10 | -4 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | | + |
| $f(x)$ | | \searrow | \bullet | \nearrow |
| | | | MIN | |

$$f''(x) = 0$$

$$-\frac{4}{4\sqrt{(x^2+8x+15)^3}} = 0$$

$$4 \neq 0$$

nema točaka infleksije



| | | | | |
|---|---|---|----|----|
| x | 0 | 1 | -1 | -2 |
| y | 4 | 5 | 3 | 2 |

IME I PREZIME: HRVOJE BATUR

BROJ INDEKSA: 17-2-0006

