OBAVEZNO POPUNITI VRIJEME RJEŠAVANJA ISPITA: OD DO

MATEMATIKA 1: KOLOKVIJ 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PREDLOŠKU KOJI MOŽETE DOBITI OD NASTAVNIKA. oooo

50

IME I PREZIME: Stipe Jurlina BROJ INDEKSA: 17-2-0019-2010 Broj ↓ bodova

1. Istražiti konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)$ ∅

2. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-1}{4-x^2}$ 15

3. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije). ∅

4. Odrediti domenu i drugu derivaciju funkcije $g(x)=\arctan(e^x)$. 20

5. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije). 15

Nužan uvjet:

(1.) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)=\lim \sqrt{n^2-3n}-n\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-3n}+n}{\sqrt{n^2-3n}+n}$

$=\lim \dfrac{n^2-3n-n^2}{\sqrt{n^2-3n}+n}\begin{matrix}/n\\/n\end{matrix}=\dfrac{0}{0}=0$ ×

$\boxed{\dfrac{0}{0}=\text{NEODREĐENO}}$

Dalamberov uvjet $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^2-3n+1}-n+1}{\sqrt{n^2-3n}-n}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n+1-3n+1}-\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2-3n}-\frac{n}{n}}\begin{matrix}/:n\\/:n\end{matrix}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}=0\lim_{x\to\infty}$ × $\dfrac{0}{0}=0<1$

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\Rightarrow$ konvergira

IME I PREZIME: Stipe Jurlina BROJ INDEKSA: 17-2-0019-2010

(2.) $f(x)=\frac{x^2-1}{4-x^2}$

$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$4-x^2\neq 0$

$-x^2\neq -4$

$x^2=4 \;/\sqrt{\ }$

$x\neq \pm 2$

$D(f)=\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle -2,2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$

$\lim\limits_{x\to -2_-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2_-}\frac{x^2-1}{4-x^2}=\frac{4-1}{4-4}=\frac{3}{0_-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -2_+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2_+}\frac{x^2-1}{4-x^2}=\frac{4-1}{4-4}=\frac{3}{0_+}=+\infty$

L.V.A -2

$\lim\limits_{x\to 2_-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2_-}=\frac{x^2-1}{4-x^2}=\frac{4-1}{4+4}=\frac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to 2_+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2_+}=\frac{x^2-1}{4-x^2}=\frac{4-1}{4+4}=\frac{3}{8}$

Nema D.V.A

$\lim\limits_{x\to +\infty}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{4-x^2}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]=\frac{x^2-1\;/:x^2}{4-x^2\;/:x^2}=\frac{1}{-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to -\infty}=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{-x^2-1}{4+x^2}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{-x^2-1}{4+x^2}=\frac{-1}{1}=-1$

$y=-1$

-1 je H.A.

$f(x)=0$

IME I PREZIME: Stipe Jurlina BROJ INDEKSA: 17-2-0019-2010

3. $f(x)=0$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{4-x^2}$ $\qquad f(0)=\boxed{\dfrac{-1}{4}}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{4-x^2}\right)'=\frac{(x^2-1)'\cdot(4-x^2)-(x^2-1)\cdot(4-x^2)'}{(4-x^2)^2}$$

$$=\frac{2x\cdot(4-x^2)-(x^2-1)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2}$$

$$=\frac{8x-\cancel{2x^3}+\cancel{2x^3}\overset{-}{+}2x}{(4-x^2)^2}=\frac{10x}{(4-x^2)^2} \times$$

Kritične točke $\qquad 16-2\cdot4\cdot x^2+x^4=16-8x^2+x^4$

Kad je $f'(x)=0 \Leftrightarrow 10x=0 \Rightarrow x=0 \rightarrow$ kritična točka

$$f''(x)=\left(\frac{10x}{(4-x^2)^2}\right)'=\left(\frac{10x}{16-8x^2+x^4}\right)'=\frac{10\cdot(16-8x^2+x^4)-10x\cdot(-16x+4x^3)}{(16-8x^2+x^4)^2}$$

$$=\frac{160-\cancel{80x^2}+10x^4+\cancel{160x^2}-40x^{3}}{(16-8x^2+x^4)^2}= \quad 4$$

$$=\frac{10x^4-40x^3+80x^2+160}{(16-8x^2+x^4)^2} \qquad 0$$

$f'(x)$ $\quad f'(x)$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$\searrow \quad \nearrow$

$f'(-1)$

Lokalni minimum

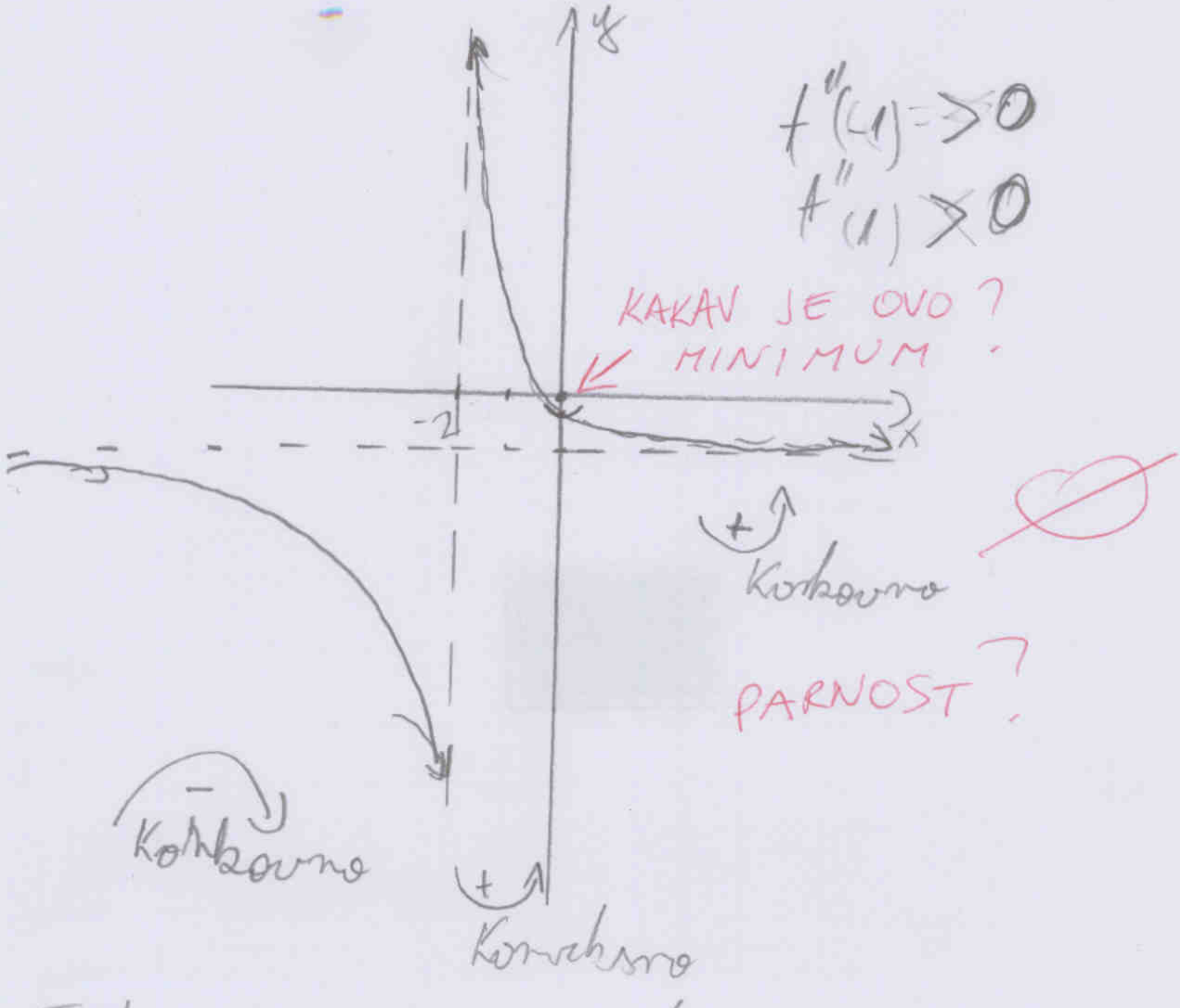
$(0,-\frac{1}{4})$

$$f(0)=\frac{-1}{4}$$

IME I PREZIME: Stipe Jurlina BROJ INDEKSA: 17-2-0013-2010

③ $f''(x)=0$

$10x^4-40x^3+30x^2+160=0$ Nema rješenja nema točaka infleksije



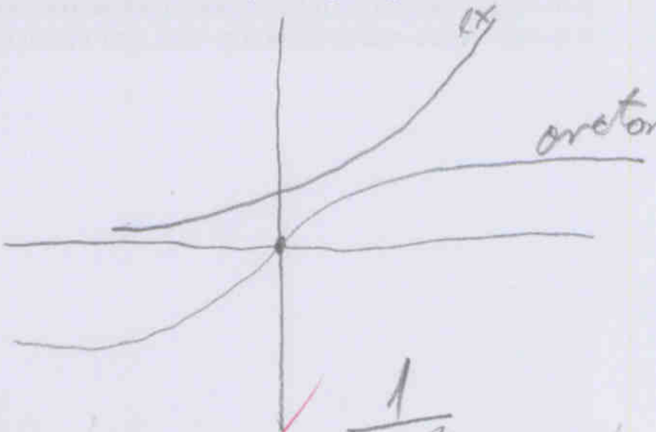
Funkcija nije periodična

Funkcija nema globalnog minimuma ni maksimuma.

IME I PREZIME: Stipe Jurlina   BROJ INDEKSA: 17-2-0019-2010

(5.) $g(x) = \underbrace{\operatorname{arctan}}_{\mathbb{R}}\underbrace{(e^x)}_{\mathbb{R}}$

$D(f) = \mathbb{R}$ ✓



$g'(x) = (\underset{f}{\operatorname{arctan}}(\underset{g(x)}{e^x}))' = \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x$ ✓ $\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{1+x^2}$ $f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ ✓

$g''(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot (1+e^{2x}) - e^x \cdot (1+e^{2x})'}{(1+e^{2x})^2}$

$= \frac{e^x \cdot (1+e^{2x}) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$g''(x) = \frac{e^x + \underbrace{e^{2x} \cdot e^x}_{=e^{3x}} \underbrace{- e^x \cdot 2e^{2x}}_{=-2e^{3x}}}{(1+e^{2x})^2}$ ✓

$= \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}$

$= \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$

20

IME I PREZIME: Stipe Jurlina BROJ INDEKSA: 17-2-0019-2010

5. Funkcija nije periodična

Nije parna niti neparna

Nema lokalnih ni globalnih ekstrema? ZAŠTO?

Nema vertikalnih asimptota → OK.

$f'(x)=0$ $\quad \frac{e^x}{1+e^{2x}} = 0$ Nikada

$e^x = 0$

Funkcija uvijek raste ✓

Nema kritičnih točaka

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{2x}\cdot e^x - e^x \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

$f''(x) = 0$ u točki $(0, \frac{\pi}{4})$ $(0, 0.785)$

Nula je točka infleksije ✓

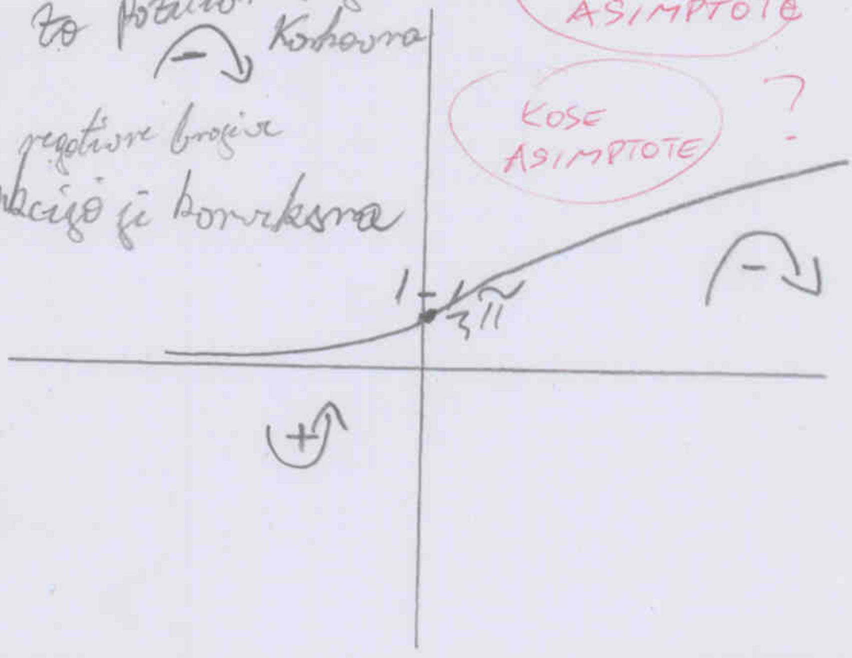
Nema horizontalne asimptote

HORIZONTALNE ASIMPTOTE ?

$f''(x) < 0$ za pozitivne brojeve konkavna

$f''(x) > 0$ za negativne brojeve funkcija je konveksna

KOSE ASIMPTOTE ?



15