OBAVEZNO ODMAH POPUNITI! DATUM: 20.1.2011 VRIJEME: OD DO .

IME I PREZIME: ANTONIO MUŽANOVIĆ BROJ INDEKSA: 17-2-0031-2010

MATEMATIKA 1: KOLOKVIJ 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA OVOJ STRANICI I PREDLOŠCIMA ZA PISANJE KOJE MOŽETE DOBITI OD NASTAVNIKA. ooox

25

Broj ↓ bodova

1. Istražiti konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-2n}{3n+5}\right)^n$ ~~∅~~

2. Odrediti sve asimptote funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+8x+15}$ 5

3. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije). ~~∅~~

4. Odrediti domenu i drugu derivaciju funkcije $g(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. 20

5. Za funkciju iz prethodnog zadatka napraviti skicu grafa funkcije (i izračunati sve što nedostaje u prethodnom zadatku do određivanja toka funkcije). ~~∅~~

4.

$g(x)=\ln(1-x^2)$

$g'(x)=\frac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{1-x^2}$ // → PRVA DERIVACIJA

$g'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$ ✓

$D(g)=?$

$1-x^2>0$

$-x^2>-1 \quad /\cdot(-1)$

$x^2<1 \quad /\sqrt{\ }$

$|x|<1$

$-1<x<1$ //

$D(g)=\langle -1,1\rangle$ // → DOMENA FUNKCIJE ✓

$g''(x)=\frac{(-2x)'\cdot(1-x^2)-(-2x)\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{-2\cdot(1-x^2)-(-2x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{-2+2x^2-4x^2}{(1-x^2)^2}=$

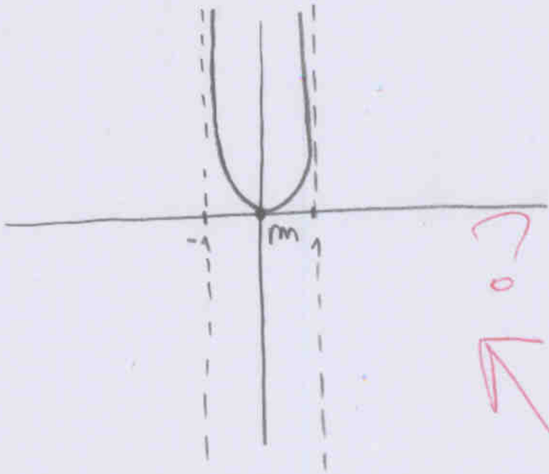
$g''(x)=\frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2}$ ✓ $=\frac{-2-2x^2}{1-2x+x^2}$ // → DRUGA DERIVACIJA ✗

20

$(1-x^2)^2=1-2x^2+x^4$

IME I PREZIME: ANTONIO MUŽANOVIĆ BROJ INDEKSA: 17-2-0031-2010

5.)



?

$g(x)=0$

$\ln(1-x^2)=0$

$1-x^2=1$

$-x^2=0$

$x^2=0$

$x=0 \rightarrow$ NULTOČKA

$g'(x)=0$

$\frac{-2x}{1-x^2}=0$

$-2x=0$

$x=0 \rightarrow$ STACIONARNA (KRITIČNA) TOČKA

$\hookrightarrow$ LOKALNI I GLOBALNI MINIMUM

$\Rightarrow$ $g'(x)>0$

$-2x>0$

$x>0 \rightarrow$ FUNKCIJA RASTE

$g'(x)<0$

$\rightarrow$ $-2x<0$

$x<0 \rightarrow$ FUNKCIJA PADA

$m(0,0)$

$g''(x)=0$

$-2-2x^2=0$

$-2x^2=2$

$\cancel{x^2=-1} \rightarrow$ FUNKCIJA NEMA TOČKE PREGIBA (INFLEKSIJE)

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ x=-1 \end{matrix}\right\}$ VERTIKALNE ASIMPTOTE

$g(0)=0$

ZAŠTO?

GDJE NA SLICI

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 $+\infty$
$\ln(1-x^2)$	/	+	+	X
$g'(x)$	−	− 0	+	+
$g(x)$	↘	↘	↗	↘

MONOTONOST

ZA $x \in \langle -1,0\rangle$ FUNKCIJA PADA

ZA $x \in \langle 0,1\rangle$ FUNKCIJA RASTE

ASIMPTOTE

$k_1 \lim_{x\to\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = 0 \rightarrow$ HORIZONTALNA ASIMPTOTA

$y=0$

FUNKCIJA NEMA KOSIH ASIMPTOTA

$g(-x)=\ln(1-(-x^2))=\ln(1-x^2)$

$g(-x)=g(x)$

FUNKCIJA JE PARNA,

FUNKCIJA JE OMEĐENA

?

IME I PREZIME: ANTONIO MUŽANOVIĆ

BROJ INDEKSA: 17-2-0031-2010

(2) ASIMPTOTE

$$\left(\sqrt{x^2+8x+15}-x\right)\left(\sqrt{x^2+8x+15}+x\right) = x^2+8x+15-x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+8x+15} \longrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+15}\right) = +\infty$$ VERTIKALNA ASIMPTOTA

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+15}\right) = +\infty$$ VERTIKALNA ASIMPTOTA

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+8x+15}\;/:x}{x\;\;/:x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}}{1} = 1 \;//$$

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+15}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+8x+15}+x}{\sqrt{x^2+8x+15}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8x+15-x^2}{\sqrt{x^2+8x+15}+x} =$$

$$l_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{8x+15\;\;/:x}{\sqrt{x^2+8x+15}+x\;/:x} = \lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{15}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}+1} = 4$$

5

$y = x+4 \rightarrow$ DESNA KOSA ASIMPTOTA

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}}{1} = 1$$

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{8+\frac{15}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}+1} = 4$$

IME I PREZIME: ANTONIO MUŽANOVIĆ

BROJ INDEKSA: 14-2-0031-2010

(3.)

$f(x) = \sqrt{x^2+8x+15}$ $\qquad f(0) = \sqrt{15}$

$(0, \sqrt{15})$

$f(x) = 0$

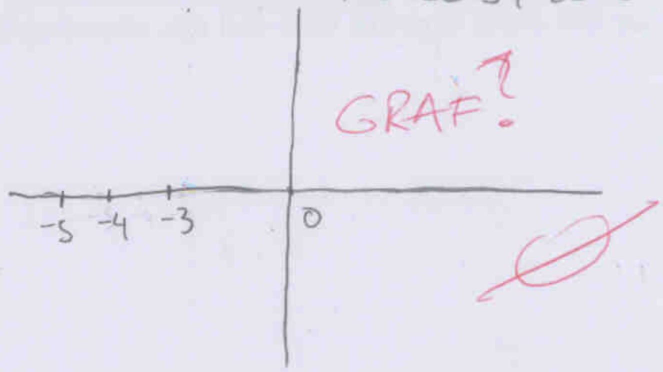
$\sqrt{x^2+8x+15} = 0$

$x^2+8x+15 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2}$

$x_1 = -5$

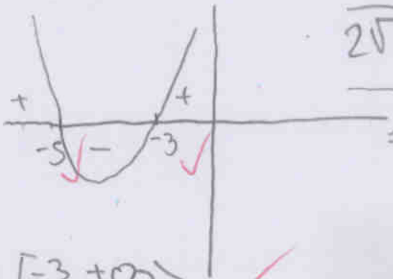
$x_2 = -3$ } NULTOČKE



$f(-x) = \sqrt{x^2-8x+15}$ FUNKCIJA NIJE NI PARNA NI NEPARNA

$x^2+8x+15 > 0$

$a > 0$ ∪



$D(f) = \langle -\infty, -5] \cup [-3, +\infty\rangle$

	$-\infty$ … -5	-5 … -4	-4 … -3	-3 … 0	0 … $+\infty$
$\sqrt{x^2+8x+15}$	+	N/D	N/D	+	+
$2x+8$	−	−	+	+	+
$2\sqrt{x^2+8x+15}$	+	−	−	+	+
$f'(x)$	− ↘	+ ↗	− ↘	+ ↗	+ ↘

$x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle -4, -3\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$ FUNKCIJA PADA

$x \in \langle -5, -4\rangle \cup \langle -3, 0\rangle$ FUNKCIJA RASTE

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+8x+15}} \cdot (2x+8) = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x+15}}$

$f'(x) = 0$

$2x+8 = 0$

$2x = -8$ $\notin D(f)$

$x_5 = -4$ → STACIONARNA (KRITIČNA) TOČKA

$f''(x) = 0$

$-4x^2+32x+68 = 0$

$x_{4,5} = \frac{-32 \pm \sqrt{1024+1088}}{-8} = \frac{-32 \pm \sqrt{2112}}{-8}$

$f''(x) = \frac{2 \cdot (2\sqrt{x^2+8x+15}) - (2x+8) \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+8x+15}} \cdot (2x+8)\right)}{(2\sqrt{x^2+8x+15})^2} = \frac{4\sqrt{x^2+8x+15} - (2x+8) \cdot \frac{(2x+8)}{\sqrt{x^2+8x+15}}}{(2\sqrt{x^2+8x+15})^2} =$

$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+8x+15} - \frac{4x^2+16x+16x+64}{\sqrt{x^2+8x+15}}}{(2\sqrt{x^2+8x+15})^2} = \frac{4\sqrt{x^2+8x+15} - \frac{4x^2+32x+64}{\sqrt{x^2+8x+15}}}{(2\sqrt{x^2+8x+15})^2} =$

$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+\cancel{8x}+15}\left(4 - \left(\frac{1}{4x^2+32x+64}\right)^{-1}\right)}{(4\sqrt{x^2+8x+15})^{\cancel{2}\,1}} = \frac{4-4x^2+32x+64}{4x^2+32x+60} = \frac{-4x^2+32x+68}{4x^2+32x+60}$ //

$f''(x) = \frac{x(-4x+32+\frac{68}{x})}{x}$

IME I PREZIME: ANTONIO MUŽANOVIĆ BROJ INDEKSA: 17-2-0031-2010

(1) $\sum_{n=1} \left(\frac{2-2n}{3n+5} \right)^n$

?

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-2n}{3n+5} \right)^n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-2\cdot+\infty}{3\cdot+\infty+5} \right)^{+\infty} = 0$ -> LIMES KONVERGIRA

0

D'LAMBERT

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-2(n+1)}{3(n+1)+5} \right)^{n+1}$

D'ALAMBERT $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ KONVERGIRA >1 DIVERGIRA

CAUCHY $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{a^n} < 1$ KONVERGIRA >1 —||—

RABE $\lim_{x\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ DIVERGIRA >1 KONVERGIRA