OBAVEZNO POPUNITI VRIJEME RJEŠAVANJA ISPITA: OD DO

MATEMATIKA 3: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, tablica Laplaceovih transformacija, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA. M3

25

IME I PREZIME: Ante Šimićević BROJ INDEKSA: 53527

1. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$x'''(t) + 3x'(t) = t, \quad x'(0) = x''(0) = 0, \; x(0) = 1.$$

10

2. Neka je C cilindar zadan sa $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 1, \, 2 \leq y \leq 3\}$. Izračunati plošni integral

$$\iint_{\widehat{\partial C}} xy \, dydz + z^2 \, dxdz + \sin^2(x) \, dxdy$$

3. Zadana je kružna uzvojnica (spirala) s jednadžbama $x = \cos t$, $y = \sin t$ i $z = t$. Izračunati duljinu jednog namotaja ove krivulje ($t \in [0, 2\pi]$).

4. Zadan je dio stošca (oznaka Y) omeđen plohama $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$ i $z = 2$. Izračunati $\int_Y z \, dxdydz$ prijelazom na cilindrične koordinate.

5. Odrediti integral funkcije $f(x, y) = -y$ na trokutu zadanom vrhovima $A(0, 0)$, $B(1, 3)$ i $C(3, 1)$.

15

1) $x'''(t) + 3x'(t) = t \to \frac{1}{s^2}$

$x'(0) = x''(0)$

$x(0) = 1$

$f' = sF(s) - f(0)$

$f'' = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

$t = \frac{1}{s^2}$

$s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0) + 3(sX(s) - x(0)) = \frac{1}{s^2}$

$s^3X(s) - s^2 + 3sX(s) - 3 = \frac{1}{s^2}$

$sX(s)(s^2 + 3s) - s^2 - 3 = \frac{1}{s^2}$

$X(s)(s^3 + 3s) = \frac{1}{s^2} + s^2 + 3$

$X(s)(s^3 + 3s) = \frac{1 + s^4 + 3s^2}{s^2} \; / : (s^3 + 3s)$

$X(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^3(s^2 + 3)}$

IME I PREZIME: Ante Šimićević BROJ INDEKSA: 53527

$$\frac{s^4+3s^2+1}{s^3(s^2+3)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{(s^2+3)}$$

$$s^4+3s^2+1 = A(s^2+3) + Bs(s^2+3) + Cs^2(s^2+3) + (Ds+E)s^3$$

$$s^4+3s^2+1 = As^2+3A+Bs^3+3Bs+Cs^4+3Cs^2+Ds^4+Es^3$$

$0 = 0$

$1 = C+D$

$0 = B+E \rightarrow \boxed{E=0}$ ✓

$3 = A+3C \rightarrow 3 = \frac{1}{3} + 3C$

$0 = 3B \rightarrow 3B = 0 \,/\, \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{B=0}$ ✓

$1 = 3A \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}}$ ✓

$1 = C+D \rightarrow 1 = \frac{8}{9} + D$

$1 - \frac{8}{9} = D$

$\boxed{D = -7}$

$3 - \frac{1}{3} = 3C$

$\frac{8}{3} = 3C \rightarrow 3C = \frac{8}{3} \,/\, :3$

$\boxed{C = \frac{8}{9}}$

$C = \frac{8}{9} \quad D = \frac{1}{9}$

$$x(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{7s}{(s^2+3)}$$

$$f(t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\} + \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 7\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9} - \frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\sqrt{3}t}$$

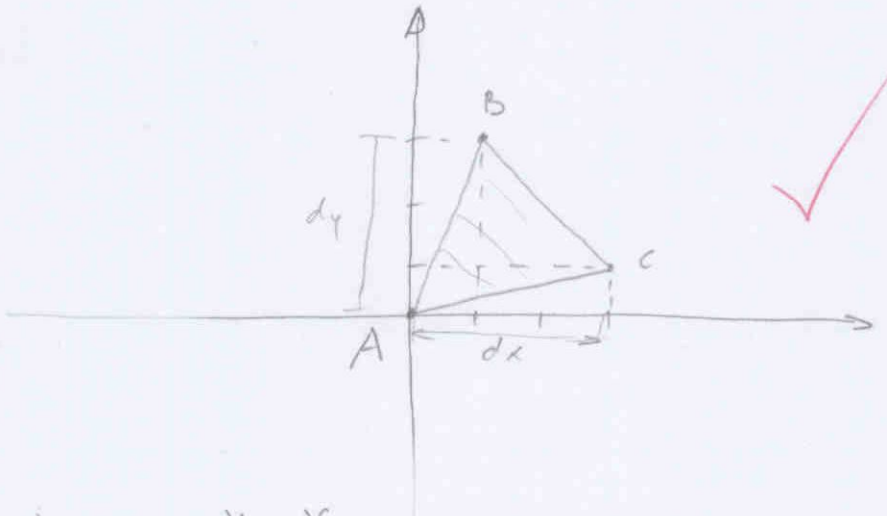
NE MOŽE SE OVAKO SAMO DODATI MNOŽENJE BROJEM

10

IME I PREZIME: Ante Šimičević BROJ INDEKSA: 53527

5) $f(x,y) = -y$

$A(0,0), B(1,3), C(3,1)$



✓

$I = I_1 + I_2$

BC: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{1-3}{3-1}(x-1)$ $\quad \frac{1-3}{3-1} = -\frac{2}{3}$

$y - 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ✗

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 3$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x = -y + \frac{11}{3} \mid \cdot \frac{3}{2}$

$x = -\frac{3}{2}y + \frac{11}{2}$

AB: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{3-0}{1-0}(x-0)$

$y = 3x \mid \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}y$

AC: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{1-0}{3-0}(x-0)$

$y = \frac{1}{3}x \mid \cdot 3 \rightarrow x = 3y$

$I_1 = \int_1^3 \int_{\frac{1}{3}y}^{-\frac{3}{2}y + \frac{11}{2}} y^2 \, dx \, dy = \int_1^3 y^2 \left(-\frac{3}{2}y + \frac{11}{2} - \frac{1}{3}y \right) dy$

$= \int_1^3 y^2 \left(-\frac{11}{6}y + \frac{11}{2} \right) dy$

$= \int_1^3 \left(-\frac{11}{6}y^3 + \frac{11}{2}y^2 \right) dy$

GORNJA GRANICA JE POGREŠNO IZRAČUNATA

OSTALI POSTUPAK JE U REDU.

nastavak 3. zadatka

IME I PREZIME: Ante Šimičević BROJ INDEKSA: 53527

$$= \frac{11}{6}\cdot\frac{y^4}{4} + \frac{11}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_1^3$$

$$= \frac{11}{6}\cdot\frac{3^4}{4} + \frac{11}{2}\cdot\frac{3^3}{3} - \left(\frac{11}{6}\cdot\frac{1^4}{4} + \frac{11}{2}\cdot\frac{1^3}{3}\right)$$

$$= \frac{891}{24} + \frac{297}{6} - \left(\frac{11}{24} + \frac{11}{6}\right)$$

$$= \frac{891+1188}{24} - \frac{11+44}{24}$$

$$= \frac{2079}{24} - \frac{55}{24}$$

$$= \boxed{\frac{2024}{24}}$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{\frac{1}{3}y}^{3y} y^2\,dx\,dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{1}{3}y - 3y\right)dy$$

$$= \int_0^1 y^2\left(\frac{y-9y}{3}\right)dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{8}{3}y^3\,dy$$ ✓

$$= -\frac{8}{3}\frac{y^4}{4}$$

$$= -\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{2}{3}$$ ✓

15