

MATEMATIKA 3: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, tablica Laplaceovih transformacija, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljšavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

M3

50

IME I PREZIME: **ANTE ZUBČIĆ**

BROJ INDEKSA: **54933**

1. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$x'''(t) + 3x'(t) = t, \quad x'(0) = x''(0) = 0, \quad x(0) = 1.$$

20

2. Neka je C cilindar zadan sa $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$. Izračunati plošni integral

$$\iint_{\partial C} xy \, dydz + z^2 \, dx dz + \sin^2(x) \, dx dy$$

3. Zadana je kružna uzvojnica (spirala) s jednadžbama $x = \cos t, y = \sin t$ i $z = t$. Izračunati duljinu jednog namotaja ove krivulje $t \in (0, 2\pi]$.

20

4. Zadan je dio stošca (oznaka Y) omeđen plohama $x^2 + y^2 = z^2, z = 1$ i $z = 2$. Izračunati $\int_Y z \, dx dy dz$ prijelazom na cilindrične koordinate.

10

5. Odrediti integral funkcije $f(x, y) = -y$ na trokutu zadanom vrhovima $A(0, 0), B(1, 3)$ i $C(3, 1)$.

4. $x^2 + y^2 = z^2$

$\int_Y z \, dx dy dz = ?$

$z^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi$

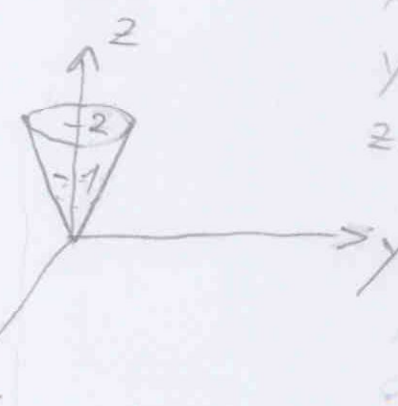
$\Rightarrow z = r$ ← samo na granici

$z=1$

$z=2$

CILINDRIČNE KOORDINATE

$x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
 $z = z$



Jakobijan

$J = r$

$\Rightarrow \int_Y z \, dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \int_0^z r \cdot r \, dr \, dz$

$= 2\pi \cdot \left. \frac{r^3}{3} \right|_1^2 \cdot (2-1) = \frac{14}{3} \pi$

← pogreška je postavljena donja granica $r=0$

10

$$1. \quad x'''(t) + 3x'(t) \quad x' = 0 = x''(0) = 0$$

$$x(0) = 1$$

AVIL ZÜRBER

$$x'''(t) \rightarrow s^3 x(s) - s^2 x(0) - s x'(0) - x''(0) = s^3 x(s) - s^2$$

$$x'(t) \rightarrow s x(s) - x(0) = s x(s) - 1$$

$$t \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

DEJAVO DBA POKLADI U.

$$s^3 x(s) - s^2 + 3s x(s) - 3 = \frac{1}{s^2}$$

$$x(s) \cdot [s^3 + 3s] = \frac{1}{s^2} + s^2 + 3 \quad \checkmark$$

$$x(s) = \frac{1 + s^4 + 3s^2}{s^3(s^2 + 3)} = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^3(s^2 + 3)} \quad \checkmark$$

$$\frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^3(s^2 + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 + 3} \quad \checkmark \quad \text{NAZIVAK}$$

$$s^4 + 3s^2 + 1 = As^2(s^2 + 3) + Bs(s^2 + 3) + C(s^2 + 3) + (Ds + E)s^3$$

$$C = \frac{1}{3} \quad \checkmark \quad B = 0 \quad \checkmark \quad C + 3A = 3 \Rightarrow A = \frac{8}{9} \quad \checkmark$$

$$A + D = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{9} \quad \checkmark \quad E = 0 \quad \checkmark$$

$$x(s) = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{s}{s^2 + 3} \quad \checkmark$$

$$x(t) = \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{9} \cdot \cos(\sqrt{3}t) \right) \quad \checkmark \quad M(t)$$

20

$$3. \quad \begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi = 2\sqrt{2}\pi \checkmark$$

20