MATEMATIKA 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljavanje s ispita. ooxo

~~65~~

ZADATKE RIJEŠAVATE NA OVAJ PAPIR.

IME I PREZIME: IGOR BRAJICA **BROJ INDEKSA:** 52803

Broj ↓ bodova

~~0~~

STUDENT JE ZAMOLJEN DA SE IDENTIFICIRA NEKIM DOKUMENTOM ALI KOD SEBE NIJE IMAO NIKAKAV OSOBNI DOKUMENT

1. Riješiti integrale:

10 (a) $\int x\cos x\,dx$

10 (b) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+1}dx$

20 2. Izračunati površinu lika omeđenog pravcem $y = x+1$ i parabolom $y = x^2 - x - 2$.

5 3. Istražiti domenu i ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y + \frac{1}{y}$.

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' + y = \cos x$

20 5. Razviti funkciju $f(x) = \frac{1}{x-2}$ u Taylorov red oko točke $x_0 = 1$. Izračunati i izraziti barem aproksimaciju sa prva 4 člana.

1. a) $\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = 1dx \\ dv = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx =$

$= x\sin x - \cos x + C$ ✓

b.) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+1}dx = (*) = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \int\frac{1}{x+1}dx + \int\frac{1}{(x+1)^2}dx$ ✓

$= \ln(x+1) + \left(-\frac{1}{x+1}\right) + C$

$= \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + C$ ✓

$x^2+2x+1 = (x+1)^2$

$\frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \quad / (x+1)^2$

$x+2 = A(x+1) + B$

$x+2 = Ax + (A+B)$

$\Rightarrow A = 1 \quad A+B = 2$

$\Rightarrow 1+B = 2$

$B = 1$ ✓

$\boxed{\frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}\ (*)$

Provjera:

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{x^2+2x+1}$ ✓ ✓

Ime i prezime: IGOR BRAJICA **Broj indeksa:** 52803

(2) $y = x + 1$

$y = x^2 - x - 2$

$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot1\cdot(-2)}}{2}$

$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$x_{12} = \frac{1 \pm 3}{2}$

$x_1 = -1$ $x_2 = 2$ - nultočke

$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$T\left(\frac{1}{2}, \frac{4\cdot1\cdot(-2) - (-1)^2}{4\cdot1}\right)$

$T\left(\frac{1}{2}, \frac{-8-1}{4}\right)$

$T\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$ - tjeme

$x^2 - x - 2 = x + 1$

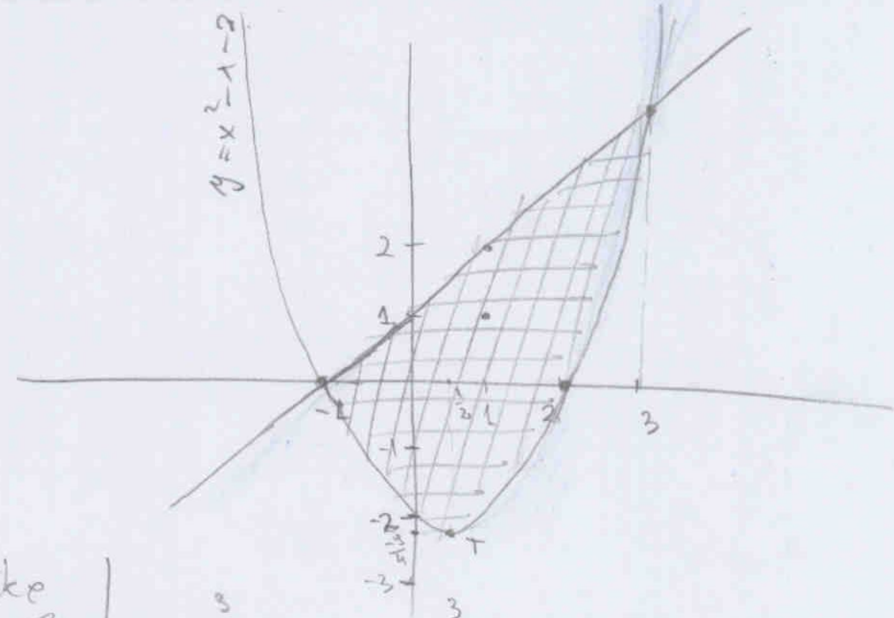
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot1\cdot(-3)}}{2}$

$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$x_{12} = \frac{2 \pm 4}{2}$

$x_1 = -1$ $x_2 = 3$ - sjecišta krivulja



$P = \int_{-1}^{3}(x+1)\,dx - \int_{-1}^{3}(x^2 - x - 2)\,dx$

$= \int_{-1}^{3} x\,dx + \int_{-1}^{3} dx - \left[\int_{-1}^{3} x^2\,dx - \int_{-1}^{3} x\,dx - 2\int_{-1}^{3} dx\right]$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3} + x\Big|_{-1}^{3} - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3} - 2x\Big|_{-1}^{3}\right)$

$= \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + (3+1) - \left[\left(\frac{27}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2(3+1)\right]$

$= 4 + 4 - \left(9 + \frac{1}{3} - 4 - 8\right)$

$= 8 - 9 - \frac{1}{3} + 12$

$= 10\frac{2}{3} = 10.66\dot{6}$

20

IME I PREZIME: IGOR BRAJICA BROJ INDEKSA: 52803

(3.) $f(x,y) = x^2 + y + \frac{1}{y}$

Funkcija je ~~kompozicija~~ potenciranja, zbrajanja i dijeljenja. Jedino dijeljenje ima uvjet da nazivnik mora biti različit od 0. Dakle:

$D(f) = \{(x,y) \mid y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = 0\}$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} \partial x = 2x = 0 \\ \partial y = 1 - \frac{1}{y^2} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{točke}]{\text{Stacionarne}} \left\{\begin{array}{l} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 - \frac{1}{y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{array}\right.$$

Stacionarne točke su

$\underline{T_1(0,1) \quad T_2(0,-1)}$ ✓

5

$$\left.\begin{array}{ll} \partial xx = 2 & \partial xy = 0 \\ \partial yx = 0 & \partial yy = \frac{2}{y^3} \end{array}\right\} \text{drugi diferencijal} \quad |\partial xx|, \begin{vmatrix} \partial xx & \partial xy \\ \partial yx & \partial yy \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow T_1(0,1) \Rightarrow |2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{1^3} \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0$$

T_1 je sedlasta točka! ✗ MINIMUM

$$\Rightarrow T_2(0,-1) \Rightarrow |2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(-1)^3} \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4 < 0$$

$\underline{T_2(0,-1) \text{ je lokalni maksimum!}}$ ✗ SEDLASTA TOČKA

IME I PREZIME: IGOR BRAJICA BROJ INDEKSA: 52803

(5) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 1$

$f(1) = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$ ✓

$f''(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{(x-2)} \cdot 1}{(x-2)^{\cancel{4}}} = \frac{2}{(x-2)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2$ ✓

$f'''(x) = \frac{-2 \cdot 3 \cancel{(x-2)^2} \cdot 1}{(x-2)^{\cancel{6}}} = \frac{-6}{(x-2)^4} \Rightarrow f'''(1) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6$ ✓

$f^{IV}(x) = \frac{6 \cdot 4 \cancel{(x-2)^3} \cdot 1}{(x-2)^{\cancel{8}}} = \frac{24}{(x-2)^5} \Rightarrow f^{IV}(1) = \frac{24}{(-1)^5} = -24$ ✓

$f(x) = -1 - \frac{1}{1!}(x-x_0) - \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{2}{3!}(x-x_0)^3 - \frac{6}{4!}(x-x_0)^4 - \frac{24}{5!}(x-x_0)^5$

$= -1 - 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{5}(x-1)^5$ ✓

20