

MATEMATIKA 2: Trajanje 120 minuta. Zabranjen je razgovor sa drugim studentima. Na klupama je dozvoljen samo pisaći pribor, tablica osnovnih integrala, kalkulator, indeks ili iksica i prazni papiri koji nose ime studenta. Sav ostali pribor, formule, uređaji, bilješke i nepotpisane prazne papire zabranjeno je koristiti i trebaju ostati u torbi ili pohranjeni kod nastavnika (elektronički uređaji trebaju biti isključeni) tokom cijelog trajanja ispita. Studenti koji primijete zabranjene predmete dužni su ih prijaviti nastavniku. Nije dozvoljeno međusobno posuđivanje pribora tijekom trajanja ispita. Povreda ovih pravila može za posljedicu imati udaljšavanje s ispita. ZADATKE RIJEŠAVATE JEDNOSTRANO NA PAPIRE KOJE DOBIJETE OD NASTAVNIKA.

70

IME I PREZIME: Poko Bureul

BROJ INDEKSA: 55820-2008

1. Riješiti integrale:

(a) $\int x \sin x dx$

10

(b) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+1} dx$

10

2. Izračunati površinu lika omeđenog pravcem $y = x$ i parabolom $y = x^2 - x - 3$.

20

3. Istražiti domenu i ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y + \frac{1}{y}$.

20

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' + y = \sin x$

~~10~~

5. Razviti funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ u Taylorov red oko točke $x_0 = 1$. Izračunati i izraziti barem aproksimaciju sa prva 4 člana.

10

1. a) $\int x \sin x dx = u \cdot v - \int u'v dx$

$u = x$	$du = dx$	$dv = \sin x dx$	$v = -\cos x + C$
---------	-----------	------------------	-------------------

$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx$

$= -x \cos x + \sin x + C$

10

2. b) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{x+1+1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

$= \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$

$= \ln t + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$

$= \ln(x+1) + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$

$\begin{cases} x+1 = t \\ dx = dt \end{cases}$

$= \ln(x+1) + \int \frac{dt}{t^2}$

$= \ln(x+1) + \int t^{-2}$

$= \ln(x+1) + \frac{t^{-1}}{-1} + C$

$= \ln(x+1) - \frac{1}{t} + C = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + C$

✓

10

② $y=x$

$y=x^2-x-3$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 2,3$

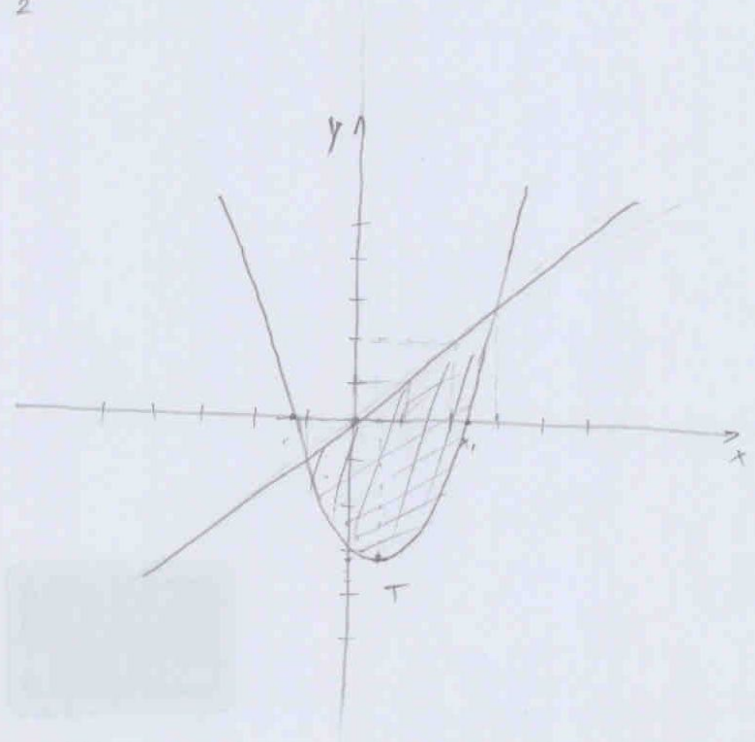
$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} = -1,3$

$T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$

$T(-\frac{-1}{2}, \frac{4 \cdot (-3) - 1^2}{4})$

$T(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$

x	0	1	2
y	0	1	2



$y=y$
 $x^2 - x - 3 = x$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$

$x_1 = 3$
 $x_2 = -1$

$P = \int_{-1}^3 x dx - \int_{-1}^3 (x^2 - x - 3) dx$

$P = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^3 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^3 + 3x \Big|_{-1}^3$

$P = \frac{1}{2}(9-1) - \frac{1}{3}(27+1) + \frac{1}{2}(9-1) + 3(3+1)$

$P = 4 - \frac{28}{3} + 4 + 12$

$P = 4 + 6,666$

$P = 10,666$

20



③ $f(x,y) = x^2 + y + \frac{1}{y}$

$z_x = 2x$

$z_y = 1 - \frac{1}{y^2}$

$2x = 0$
 $x = 0$

$1 - \frac{1}{y^2} = 0$

$\frac{1}{y^2} = 1$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

$T_1(0,1)$ $T_2(0,-1)$ ✓

$2x = 2$ | $A = 2$
 $2xy = 0$ | $B = 0$
 $2/y^3 = 2$ | $C = -2$

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot (-2) - 0 = -4$

$z = z_0 = 0^2 + 1 + \frac{1}{1} = 2$

$\Delta = -4$
 $A > 0$ - minimum
 $T(0,1,2) \rightarrow$ minimum

$A = 2, B = 0, C = -2$

$\Delta = -4$ never ekstremo ✓

↖ $T(0,1)$

↖ $T(0,-1)$

20

④ $y'' + y = \sin x$

$r^2 + 1 = 0$

$r^2 =$

✓

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 1$
 22 pna 14 c6ro

$$f(x) = \frac{1}{x} = 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{1^2} = (-1)$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot x^2 - (-1) \cdot x^2}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \left(\frac{2}{x^3}\right) \Rightarrow f''(x_0) = \frac{2}{1^3} = (2) \quad \checkmark$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2}{(x^3)^2} = \frac{-6x^2}{(x^3)^2} = \left(-\frac{6}{x^3}\right) \Rightarrow f'''(x_0) = -\frac{6}{1^3} = (-6)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6 \cdot x^2 - (-6) \cdot x^2}{(x^3)^2} = \frac{12x^2}{(x^3)^2} = \left(\frac{12}{x^2}\right) \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = \frac{12}{1^2} = (12) \quad \times$$

10

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$$

$$f(x) = 1 + (-1)(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{-6}{-6}(x-1)^3 + \frac{12}{24}(x-1)^4$$

$$f(x) = 1 - x + 1 + 1(x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^4$$

$$f(x) = 2 - x + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^4$$