Matematika 3 - kolokvij #4 (28.01.2010.)

Dopušteno je služiti se jedino pisaćim priborom. Ostalo maknuti s klupe. Na papire koje predajete upišite ime, prezime i matični broj studenta (MBS). Neka je n zadnja znamenka tvog MBS (bez godine upisa) i m predzadnja znamenka tvog MBS.
Prvi zadatak nosi 4 boda, a ostali zadaci — svaki po 7 bodova.

1. Koristeći tablicu Laplaceovih transformacija odrediti original funkcije
$$F(s) = \frac{s+m}{s^2 + (m+n+1)s}\,.$$

2. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu:
$$x''(t) + (m+n+1)\,x(t) = 1, \quad x(0) = 0,\, x'(0) = 0.$$

3. Koristeći Laplaceovu transformaciju riješiti diferencijalnu jednadžbu:
$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = (m+n+1).$$

4. Služeći se Laplaceovom transformacijom izračunati $f(t)$ ako je poznato:
$$f'''(t) + f'(t) = 1, \quad f''(0) = 1,\, f'(0) = 1,\, f(0) = 1.$$

Tablica Laplaceovih transformacija:

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s)$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
c	$\frac{c}{s}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at}\,f(t)$	$F(s+a)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$f(a\,t)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$t^n\,f(t)$	$(-1)^n\,F^{(n)}(s)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$
$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$(1-at)\,e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$f'''(t)$	$s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

Rješenja za $m = 2$, $n = 3$

Zadatak 1.

$F(s) = \frac{s+2}{s^2+6s} = \frac{s+2}{s(s+6)}$ treba rastaviti pomoću parcijalnih razlomaka na elemente koji se nalaze u priloženoj tablici. $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+6} \Rightarrow A(s+6) + Bs = s+2 \Rightarrow A + B = 1$, $6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$. Prema tablici računamo traženi original

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+6}\right] = \frac{1}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{=1} + \frac{2}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+6}\right]}_{=e^{-6t}} = \frac{1+2e^{-6t}}{3}$$

Zadatak 2.

Diferencijalnu jednadžbu prvo pretvorimo u algebarsku i riješimo:

$$\left(s^2X(s) - s\underbrace{x(0)}_{=0} - \underbrace{x'(0)}_{=0}\right) + 6\,X(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s\,(s^2+6)}.$$

Zatim riješimo za original od X primjenjujući inverznu transformaciju $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{(s^2+6)} = \frac{1}{6}\frac{1}{s} - \frac{1}{6}\frac{s}{s^2+6} \\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\right] = \frac{1-\cos\left(\sqrt{6}t\right)}{6} \end{aligned}$$

Zadatak 3.

Diferencijalnu jednadžbu prvo pretvorimo u algebarsku i riješimo:

$$\left(s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=6}\right) + 2\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}\right) + 2\,Y(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{6}{s^2+2s+2}.$$

Y zapišemo u pogodnom obliku i računamo $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{6}{(s+1)^2+1} \quad \Rightarrow \quad Y(s-1) = \frac{6}{s^2+1} \\ \mathcal{L}^{-1}[Y(s-1)] &= e^t\,y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^2+1}\right] = 6e^{-t}\sin t \end{aligned}$$

Zadatak 4.

Primijenimo Laplaceovu transformaciju na danu jednadžbu: $\mathcal{L}\left[f'''(t) + f'(t)\right] = \mathcal{L}\left[1\right]$. Slijedi

$$\begin{aligned} s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) + sF(s) - f(0) &= \frac{1}{s} \\ F(s) &= \frac{\frac{1}{s} + s^2 + s + 2}{s^3+s} \\ F(s) &= \frac{1+2s+s^2+s^3}{s^2(s^2+1)} \end{aligned}$$

Dalje rastavljamo na parcijalne razlomke

$$\frac{1+2s+s^2+s^3}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C+Ds}{s^2+1} = \ldots = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-s}{s^2+1}$$

Na kraju primjenimo operator $\mathcal{L}^{-1}$ i čitamo iz tablice

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-s}{s^2+1}\right] = 2 + t - \cos t$$