126

RJEŠITI!

1) $y'' - 9y = 0$

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$

3) $y'' + y' - y = 0$

4) $y'' - 2y' + 5y = 0$ VIDI STR. 134.

5) $y'' - 9y' + 9y = 0$ VIDI STR. 134.

6) $y'' - y = 0.$

Zadatak 2 Odredite partikularna rješenja sljedeći diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetima:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$

2) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$ VIDI STR. 134.

3) $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0.$

Nehomogene jednadžbe

Rješenje nehomogenih jednadžbi

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

dano je s

$$y = y_0 + Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je neko (partikularno) rješenje nehomogene jednadžbe, koje u ovisnosti od oblika funkcije $f(x)$ tražimo u sljedećem obliku:

(1) Ako je $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja:

i) u slučaju da a nije rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax}Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ neki polinom s neodređenim koeficijentima

ii) u slučaju da a jest rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = x^r e^{ax}Q_n(x)$, gdje je r kartnost a kao korijena karakteristične jednadžbe (broj koliko se puta a pojavljuje kao rješenje te jednadžbe – to može biti 1 ili 2), a $Q_n(x)$ je neki polinom s neodređenim koeficijentima

(2) Ako je $f(x) = e^{ax} \cdot [P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja, a $Q_m(x)$ polinom $m-$tog stupnja:

i) u slučaju da $a \pm bi$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima

ii) u slučaju da $a \pm bi$ jesu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = xe^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima.

Napomena:

Gornja situacija pokriva mnogo mogućnosti za $f(x)$, i to kada je f umnožak eksponencijalne funkcije i polinoma ili umnožak eksponencijalne funkcije i linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija s polinomima kao koeficijentima. Kako prepoznati radi li se o prvom ili drugom slučaju? Najjednostavnije je vidjeti sadrži li $f(x)$ neke trigonometrijske funkcije – ako sadrži, znači da je riječ o slučaju (2) opisanom gore.

Nakon što utvrdimo oblik funkcije Y, uvrštavamo Y (i sve njene derivacije koje treba) u polaznu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu te potom određujemo nepoznate koeficijente u polinomu (ili polinomima) koji se u Y pojavljuju.

Primjer 5 Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}.$$

Rješenje:

Najprije nalazimo y_0, tj. opće rješenje pripadne homogene jednadžbe. Ona glasi

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

pa je njena karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = -1$, pa je opće rješenje homogene jednadžbe dano s

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada prelazimo na traženje partikularnog rješenja, tj. Y. Kako je $f(x) = e^{2x}$, što možemo u "punom" obliku situacije (1) s prethodne stranice shvatiti kao $f(x) = e^{2 \cdot x} \cdot 1$, vidimo da je $a = 2$, $P(x) = 1$. Kako $a = 2$ nije rješenje gornje karakteristične jednadžbe, Y tražimo u obliku $2 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow r = 0$

$$Y = A \cdot e^{2x},$$

gdje je $Q(x) = A$, tj. konstantan polinom. Konstantu A određujemo uvrštavanjem Y u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Kako ta diferencijalna jednadžba sadrži y' i y'', moramo najprije izračunati Y' i Y'':

$$\begin{aligned} Y' &= 2Ae^{2x} \\ Y'' &= 4Ae^{2x}. \end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y, Y' i Y'' u polaznu jednadžbu dobivamo

$$4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 9Ae^{2x} = e^{2x}.$$

Dijeljenjem dobivene jednakosti s e^{2x} slijedi da je $9A = 1$, tj. $A = \frac{1}{9}$, pa je

$$Y = \frac{1}{9}e^{2x}.$$

Sada slijedi da je rješenje dane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{9}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 6 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = x^2 e^x.$$

Rješenje:

Pripadna homogena jednadžba je $y'' + y = 0$, a njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je

$$y_0 = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prelazimo na određivanje oblika partikularnog rješenja Y. Kako je $f(x) = x^2 e^x$, a $a = 1$ nije korijen karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje Y tražimo u obliku $1 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow r = 0$

$$Y = (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

gdje su A, B i C koeficijenti koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu. Računamo

$$\begin{aligned} Y' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x \\ Y'' &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x = \\ &= (Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = x^2 e^x.$$

Sada dijeljenjem s e^x i grupiranjem po potencijama od x dolazimo do jednakosti polinoma drugog stupnja

$$2Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + 2C = x^2,$$

što uspoređivanjem koeficijenata (uz odgovarajuće potencije od x moraju stajati isti koeficijenti kako bi polinomi bili jednaki!) lijeve i desne strane gornje jednakosti vodi na sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ 4A + 2B &= 0 \\ A + B + C &= 0. \end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje koje glasi $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$, pa je

$$Y = (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x$$

i stoga je konačno rješenje zadatka dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 7 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - y = \sin x.$$

Rješenje:

Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 1 = 0$ pripadne homogene jednadžbe $y'' - y = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pa je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe dano s

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}.$$

$\pm i \neq \lambda_{1,2}$

$\pm i \neq \pm 1 \Rightarrow r = 0$

Kako je $f(x) = \sin x = e^{0 \cdot x}(1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x)$, imamo $a = 0$, $b = 1$. Kako $a \pm bi = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ nisu korijeni gornje karakteristične jednadžbe, to partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = e^{0 \cdot x}(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = A \cos x + B \sin x,$$

gdje su A i B konstantni polinomi koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Računamo stoga

$$\begin{aligned} Y' &= -A \sin x + B \cos x \\ Y'' &= -A \cos x - B \sin x, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x - (A \cos x + B \sin x) &= \sin x \\ -2A \cos x - 2B \sin x &= \sin x. \end{aligned}$$

Sada izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i desne strane gornje jednakosti (s desne strane uz $\cos x$ stoji nula!) imamo

$$\begin{aligned} -2A &= 0 \\ -2B &= 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. Stoga je

$$Y = -\frac{1}{2} \sin x,$$

pa je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Primjer 8 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 4y = (25x + 5) \cos x.$$

Rješenje:

130

Najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - 4y = 0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 4 = 0$ ima dva različita realna rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2$, pa opće rješenje pripadne homogene jednadžbe glasi

$\lambda_1 = -2$
$\lambda_2 = 2$

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili oblik u kojem ćemo tražiti partikularno rješenje Y, potrebno je uočiti da $f(x) = (25x+5)\cos x$ sadrži trigonometrijsku funkciju, točnije da $f(x)$ možemo shvatiti kao $f(x) = e^{0 \cdot x}((25x+5) \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x)$, pa prema situaciji opisanoj pod (2) na str. 4 vidimo da (jer $a \pm bi = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe) Y treba tražiti u obliku

$\pm i \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow r = 0$

$$Y = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$$

(primijetimo da su nepoznati polinomi uz $\cos x$ i $\sin x$ ovdje **istog** stupnja, i to maksimalnog stupnja od polinoma koji se javljaju u $f(x)$). Sada još treba izračunati Y'':

$$\begin{aligned}
Y' &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x = \\
&= (Cx+A+D)\cos x + (-Ax-B+C)\sin x \\
Y'' &= C\cos x - (Cx+A+D)\sin x - A\sin x + (-Ax-B+C)\cos x = \\
&= (-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x.
\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x - 4((Ax+B)\cos x + (Cx+D)) = (25x+5)\cos x,$$

odakle grupiranjem po $\cos x$ i $\sin x$ imamo

$$(-5Ax-5B+2C)\cos x + (5Cx+5D+2A)\sin x = (25x+5)\cos x.$$

Sada izjednačavanjem polinoma uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i s desne strane gornje jednakosti (uz $\sin x$ s desne strane stoji nulpolinom!) imamo

$$\begin{aligned}
-5Ax - 5B + 2C &= 25x + 5 \\
5Cx + 5D + 2A &= 0,
\end{aligned}$$

odakle pak izjednačavanjem koeficijenata uz potencije x dolazimo do sustava

$$\begin{aligned}
-5A &= 25 \\
-5B + 2C &= 5 \\
5C &= 0 \\
5D + 2A &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenje gornjeg sustava je jedinstveno i glasi $A = -5$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, pa je partikularno rješenje dano s

$$Y = (-5x-1)\cos x + 2\sin x.$$

Stoga je rješenje polazne diferencijalne jednadžbe

$$y = y_0 + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (-5x-1)\cos x + 2\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

RIJEŠITI

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

RIJEŠITI:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$ $\Rightarrow$ VIDI STR. 135.

2) $y'' - 8y' + 7y = 14$

3) $y'' - y = e^x$

4) $y'' + y = \cos x$

5) $y'' + y' - 2y8\sin 2x$ $\quad y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$ $\Rightarrow$ VIDI STR. 136.

6) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$

JOŠ NEKOLIKO RIJEŠENIH ZADATAKA:

PRIMJER 9

$$4y'' - 4y' = 2x + 3$$

1. korak homogena ODJ

$$4y'' - 4y' = 0$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

$$y_H(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1x} = C_1 + C_2 e^x$$

2. korak TRAŽIM PARTIKULARNO RJEŠENJE Y

BUDUĆI JE FUNKCIJA NA DESNOJ STRANI OBLIKA $f = e^{ax}(P_n(x))$

TOČNIJE $f = e^{0x} \cdot (2x+3)$

$\Rightarrow a = 0, n = 1$, ZBOG $a = \lambda_1 \Rightarrow r = 1$

TRAŽIMO Y U OBLIKU

$$Y = x^r e^{ax} S_n(x)$$

$$Y = x \underbrace{e^{0x}}_{=1} S_1(x)$$

$$Y = x \cdot 1 \cdot (Ax + B)$$

$$Y = Ax^2 + Bx$$

$$Y' = 2Ax + B$$

$$Y'' = 2A$$

UVRSTITI U POLAZNU ODJ

$$4Y'' - 4Y' = 2x + 3$$

$$4 \cdot 2A - 4(2Ax + B) = 2x + 3$$

$$8A - 8Ax - 4B = 2x + 3$$

članovi uz x : $-8A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

članovi bez x : $8A - 4B = 3$

$\Rightarrow -4B = 3 - 8A = 3 + 2$

$\Rightarrow B = -\frac{5}{4}$

PARTIKULARNO RJEŠENJE:

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x$$

RJEŠENJE POLAZNE JEDNADŽBE

$$y(x) = y_H(x) + Y(x)$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x$$

PRIMJER 10

$$y'' - 4y' + 4y = 3x e^{2x}$$

1. korak

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

$$y_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

2. korak

$$f(x) = 3x e^{2x}$$

$$= P_n(x) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow n = 1, \; a = 2$$

$$a = \lambda_1, \; a = \lambda_2 \Rightarrow r = 2$$

TRAŽIMO Y U OBLIKU

$$\Rightarrow Y = x^r S_n(x) \cdot e^{ax}$$

$$Y = x^2 \cdot (Ax + B) \cdot e^{2x}$$

$$Y = Ax^3 e^{2x} + Bx^2 e^{2x}$$

$$Y' = 2Ax^3 e^{2x} + (3A + 2B)x^2 e^{2x} + 2Bx e^{2x}$$

$$Y'' = 4Ax^3 e^{2x} + (6A + 6A + 4B)x^2 e^{2x} + (6A + 4B + 4B)x e^{2x} + 2B e^{2x}$$

UVRSTITI U POLAZNU JEDNADŽBU

$$Y'' - 4Y' + 4Y = 3x e^{2x}$$

$$\left[4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B - 8Ax^3 - (12A + 8B)x^2 - 8Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2\right] \cancel{e^{2x}} = 3x \cancel{e^{2x}}$$

RASTAVIMO NA 4 JEDNADŽBE:

uz x^3: $4A - 8A + 4A = 0$

$0 = 0$ ✓

uz x^2: $12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0$

$0 = 0$ ✓

uz x^1: $6A + 8B - 8B = 3$

$6A = 3$

$A = \frac{1}{2}$

uz x^0: $2B = 0$

$B = 0$

PARTIKULARNO RJEŠENJE $Y(x) = \frac{1}{2} x^3 e^{2x}$ $\Rightarrow$ RJEŠENJE POLAZNE ODJ $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{1}{2} x^3 e^{2x}$

PRIMJER 11

$$y'' + 4y = 2\sin 2x$$

1. korak HOMOGENA JEDNADŽBA:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_H(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

2. korak TRAŽIMO PARTIKULARNO RJEŠENJE POLAZNE (ODJ).

ZBOG $f(x) = 2\sin 2x$

$$= e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0,\ b=2,\ 0\pm 2i = \lambda_{1,2} \Rightarrow r=1 \\ P_n(x)=0 \\ Q_0(x)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_0(x)=A \\ T_0(x)=B \end{cases}$$

TRAŽIMO PARTIKULARNO RJEŠENJE U OBLIKU

$$Y(x) = x^r e^{ax}(S_0(x)\cos bx + T_0(x)\sin bx)$$

$$Y(x) = x \cdot 1 \cdot (A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

$$Y(x) = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$$

$$Y'(x) = (2Bx + A)\cos 2x + (-2Ax + B)\sin 2x$$

$$Y''(x) = (-4Ax + 4B)\cos 2x + (-4Bx - 4A)\sin 2x$$

UVRSTIMO U POLAZNU (ODJ)

$$Y'' + 4Y = 2\sin 2x$$

$$(\underbrace{-4Ax + 4B + 4Ax}_{=4B})\cos 2x + (\underbrace{-4Bx - 4A + 4Bx}_{-4A})\sin 2x = 2\sin 2x$$

RASTAVIMO NA 2 JEDNADŽBE

uz $\sin 2x$: $-4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

uz $\cos 2x$: $4B = 0 \Rightarrow B = 0$

PARTIKULARNO RJEŠENJE: $\Rightarrow Y(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x$

$$y(x) = y_H(x) + Y(x) \Rightarrow y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{1}{2}x\cos(2x)$$

ZADATAK 3. 1) NA STRANI 131.

$$y''-4y'+4y=x^2$$

<u>1. korak</u> riješiti homogenu jednadžbu

$$y''-4y'+4y=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$$

$$\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_H(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$$

<u>2. korak</u> riješiti polaznu jednadžbu za jedno partikularno rješenje Y

DESNA STRANA POLAZNE ODJ:

$$f=x^2$$
$$=e^{ax}P_n(x)$$

$$\Rightarrow a=0,\ n=2,\ P_2(x)=x^2$$

Zbog $a\neq\lambda_1,\lambda_2$ tražimo Y u obliku:

$$Y=e^{ax}Q_n(x)$$

$$Y=\underbrace{e^{0x}}_{=1}\cdot Q_2(x)$$

$$Y=Ax^2+Bx+C$$

$$Y'=2Ax+B$$

$$Y''=2A$$

Dalje uvrstimo u polaznu jednadžbu

$$Y''-4Y'+4Y=x^2$$

$$2A-4(2Ax+B)+4(Ax^2+Bx+C)=x^2$$

$$2A-8Ax-4B+4Ax^2+4Bx+4C=x^2$$

$$(2A-4B+4C)+(-8A+4B)x+4Ax^2=x^2$$

Rastavimo na 3 jednadžbe:

uz x^2: $4A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

uz x: $-8A+4B=0 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$

bez x: $2A-4B+4C=0 \Rightarrow C=\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow Y(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$$

Opće rješenje polazne ODJ

$$y(x)=y_H(x)+Y(x)$$

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$$

ZADATAK 3.6) NA STRANI 131

$$y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$$

1. korak HOMOGENA JEDNADŽBA

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 1$$

$$y_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$$

2. korak JEDNO PARTIKULARNO RJEŠENJE POLAZNE ODJ

ZBOG D.S. $f = 8\sin(2x)$

$$= e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=2 \\ n=0 \\ P_0(x)=0 \\ m=0 \\ Q_0=8 \end{array}\right\} \quad = \underbrace{e^{0x}}_{=1}\left[0\cdot\cos 2x + 8\sin 2x\right]$$

TRAŽIMO PARTIKULARNO RJEŠENJE U OBLIKU

$$\Rightarrow Y = \underbrace{e^{0x}}_{=1}\left[S_N(x)\cos 2x + T_N(x)\sin 2x\right]$$

$a \pm bi \ne \lambda_1, \lambda_2$

$\pm 2i \ne -2, 1$

$N = 0$, UZMIMO $S_0(x) = A$, $T_0(x) = B$

$$Y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

UVRSTIMO U POLAZNU ODJ:

$$Y'' + Y' - 2Y = 8\sin 2x$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x = 8\sin 2x$$

uz $\cos 2x$: $-4A + 2B - 2A = 0$

uz $\sin 2x$: $-4B - 2A - 2B = 8$

TO SU 2 JEDNADŽBE S 2 NEPOZNANICE:

$$-6A + 2B = 0$$
$$-6B - 2A = 8$$

$$\begin{array}{l} -6A + 2B = 0 \\ 6A + 18B = -24 \\ \hline 20B = -24 \end{array}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow A = 2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{6} = -\frac{2}{5}$$

UVRSTIMO U Y:

$$Y(x) = -\frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x$$

NAPIŠIMO OPĆE RJEŠENJE POLAZNE (ODJ)

$$y(x) = y_H(x) + Y(x)$$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x$$