123

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

U ovoj lekciji vježbamo rješavanje jedne klase običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda – radi se o **linearnim** običnim diferencijalnim jednadžbama 2. reda **s konstantnim koeficijentima**. To su jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

gdje su p i q realni brojevi, a $f(x)$ neka funkcija varijable x. Nepoznanica ove jednadžbe je $y = y(x)$, a riješiti jednadžbu znači dobiti eksplicitan izraz za funkciju y.

Kao i inače, razlikujemo dvije situacije:

(a) Ako je $f(x) = 0$, gornja jednadžba ima oblik

$$y'' + py' + qy = 0$$

i zovemo je **homogena** jednadžba.

(b) Ako je $f(x) \neq 0$, gornja jednadžba ima općeniti oblik (gdje je s desne strane neka nenul funkcija varijable x). U tom slučaju jednadžbu zovemo **nehomogena** jednadžba.

U sljedećem odlomku opisujemo kako se rješavaju homogene jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Homogene jednadžbe

Homogene jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = 0$$

rješavaju se pomoću tzv. **karakteristične jednadžbe**, koju iz diferencijalne jednadžbe dobijemo uvođenjem parametra λ po sljedećem principu

$$\begin{array}{rcl} y & \rightarrow & 1 \\ y' & \rightarrow & \lambda \\ y'' & \rightarrow & \lambda^2. \end{array}$$

Tako gornjoj jednadžbi pripada sljedeća karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Kao i kod svake kvadratne jednadžbe, njena rješenja $\lambda_{1,2}$ mogu biti:

(a) realni i različiti brojevi – u tom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

gdje su C_1 i C_2 realne konstante.

(b) realni i jednaki brojevi ($\lambda_1 = \lambda_2$) – ovdje je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano s

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(c) kompleksni brojevi – u tom slučaju vrijedi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, jer znamo da su kompleksna rješenja kvadratne jednadžbe međusobno konjugirana. U ovom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Riješimo nekoliko primjera.

Primjer 1 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba koja pripada ovoj diferencijalnoj jednadžbi glasi

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

a njena su rješenja $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Kako su rješenja različiti realni brojevi, imamo da je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Rješenje: U ovom slučaju karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Njeni korijeni su jednaki realni brojevi $\lambda_{1,2} = -2$, pa rješenje glasi

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3 Riješite

$$y'' + y = 0.$$

Rješenje: Ovoj jednadžbi pripada karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa vidimo da je $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (to su realni i imaginarni dio jednog od ovih korijena!). Stoga je rješenje dano s

$$y(x) = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos 1 \cdot x + C_2 \sin 1 \cdot x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Napomena:

Ako želimo zadati Cauchyjev problem (diferencijalna jednadžba s jednim ili više početnih uvjeta) čija je diferencijalna jednadžba drugog reda, prirodno je zadati ne jedan (kao što je to bilo kod običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda), već **dva** početna uvjeta. Naime, vidimo već iz gore opisanih rješenja da postoje dvije neodređene realne konstante C_1 i C_2. Tek zadavanjem **dva** početna uvjeta dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, čijim rješavanjem potom u potpunosti fiksiramo konstante C_1 i C_2, tj. dolazimo do jedinstvenog rješenja. Najčešće se ti početni uvjeti odnose na neke vrijednosti same funkcije i njene prve derivacije.

Primjer 4 Riješite sljedeći Cauchyjev problem (nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava zadane početne uvjete):

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Rješenje: Najprije rješavamo diferencijalnu jednadžbu. Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

a rješenja te jednadžbe dana su s $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe dano s

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili partikularno rješenje, koristimo početne uvjete:

$$\begin{aligned} y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y'(0) = -2C_1 - C_2 = -1. \end{aligned}$$

Dolazimo do sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 - C_2 &= -1, \end{aligned}$$

odakle izlazi $C_1 = 0, C_2 = 1$. Uvrštavanjem u opće rješenje dolazimo do partikularnog rješenja (rješenja zadanog Cauchyjevog problema):

$$y(x) = e^{-x}.$$

Zadatak 1 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

RIJEŠITI

126

RIJEŠITI!

1) $y'' - 9y = 0$

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$

3) $y'' + y' - y = 0$

4) $y'' - 2y' + 5y = 0$ → VIDI STR. 134.

5) $y'' - 9y' + 9y = 0$ → VIDI STR. 134.

6) $y'' - y = 0$.

Zadatak 2 Odredite partikularna rješenja sljedeći diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetima:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$

2) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$ → VIDI STR. 134.

3) $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0$.

Nehomogene jednadžbe

Rješenje nehomogenih jednadžbi

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

dano je s

$$y = y_0 + Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je neko (partikularno) rješenje nehomogene jednadžbe, koje u ovisnosti od oblika funkcije $f(x)$ tražimo u sljedećem obliku:

(1) Ako je $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja:

  i) u slučaju da a nije rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax}Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ neki polinom s neodređenim koeficijentima

  ii) u slučaju da a jest rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = x^r e^{ax}Q_n(x)$, gdje je r kartnost a kao korijena karakteristične jednadžbe (broj koliko se puta a pojavljuje kao rješenje te jednadžbe – to može biti 1 ili 2), a $Q_n(x)$ je neki polinom s neodređenim koeficijentima

(2) Ako je $f(x) = e^{ax} \cdot [P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja, a $Q_m(x)$ polinom $m-$tog stupnja:

  i) u slučaju da $a \pm bi$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima

ZADATAK 1.4. STRANA 126.

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$y(x) = e^{x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$

ZADATAK 1.5 STRANA 126

$$y'' - 9y' + 9y = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-36}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9 \cdot 5}}{2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}x}$$

ZADATAK 2.2. STRANA 126.

$$y'' + 4y = 0, \quad \underset{(*)}{y(0) = 0}, \quad \underset{(**)}{y'(0) = 2}$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y(x) = \underbrace{e^{0x}}_{=1}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

UVRŠTAVAMO U UVJETE (*) i (**)

$$y(0) = C_1 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos(0)}_{=1}$$

$$y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1$$

$$y(0) = C_2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \underline{\underline{C_2 = 0}}$$

$$y'(x) = 2C_1 \cos 2x + 2C_2 \cdot (-\sin 2x)$$

$$y'(0) = 2C_1 \underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{=\cos 0 = 1} + \underbrace{2C_2 \cdot \underbrace{(-\sin(2\cdot 0))}_{=-\sin 0 = 0}}_{=0} \Rightarrow y'(0) = 2C_1 \overset{(**)}{\Longrightarrow} 2C_1 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_1 = 1}}$$

RJEŠENJE (ODJ) + (*) + (**):

$$\boxed{y(x) = \sin 2x}$$