Diferencijalni račun skalarnih funkcija

Matematika II, Predavanje 8

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

24. travnja 2013.

Sadržaj predavanja

Parcijalna derivacija

Sjeti se da je derivacija kod funkcije jedne varijable:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$

Činjenica

Ako označimo točku $\mathbf{a} = (\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}}^{fix}, \overset{x_i}{a_i}, \overbrace{a_{i+1}, \ldots, a_n}^{fix})$ *i prirast i-te varijable* $\underline{\triangle x_i = x_i - a_i} \in \mathbb{R}$ *tada je po definiciji:*

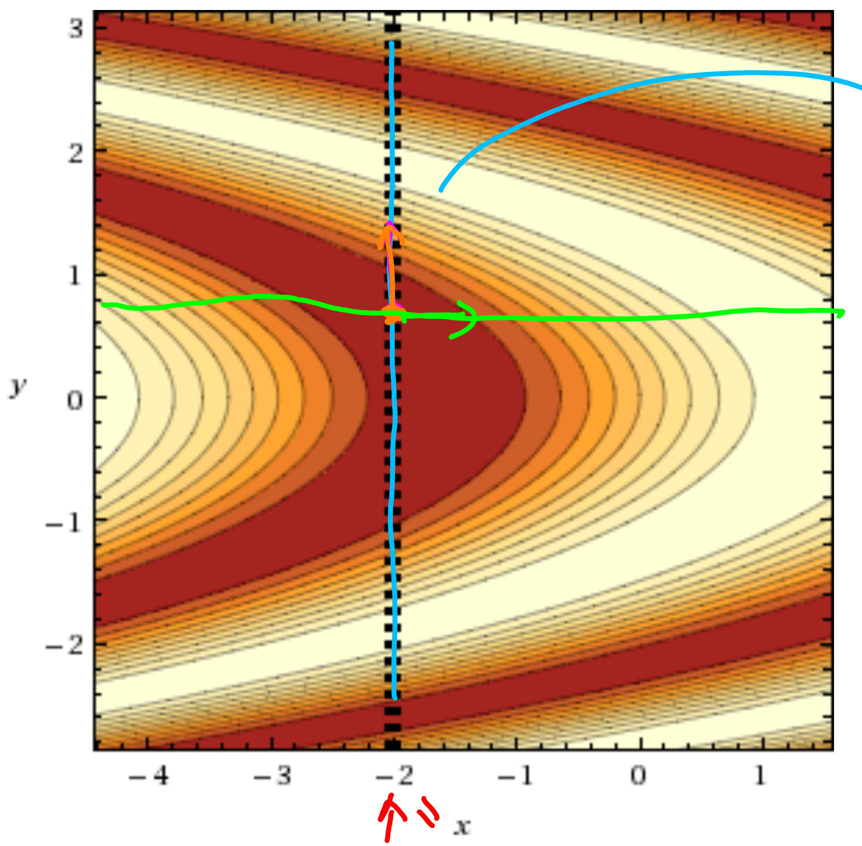
$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \lim_{\triangle x_i \to 0} \frac{\overbrace{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \triangle x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}^{x} - \overbrace{f(\mathbf{a})}^{a}}{\triangle x_i}$$

Parcijalno deriviranje po odabranoj varijabli skalarne funkcije svodi se na standardno deriviranje držeći konstantnima sve varijable osim one odabrane.

Nužan uvjet za lokalni ekstrem

Sjeti se kako je kod funkcija jedne varijable nužan uvjet za lokalni ekstrem bio da je derivacija jednaka nulu. Točnije, ako derivacija nije jednaka nuli onda postoji smjer rasta i suprotno pada funkcije. Sjeti se da je parcijalna derivacija funkcije obična derivacija funkcije jedne varijable PO SVIM i VARIJABLAMA

$\boxed{\partial_i f(T) = 0}$



Nužan uvjet za lokalni ekstrem

Teorem

Ako skalarna funkcija ima u točki T lokalni ekstrem i ako je u T derivabilna tada sve parcijalne derivacije u T iznose nula.

Činjenica

Derivabilna skalarna funkcija f može imati lokalne ekstreme samo u točkama T gdje su sve parcijalne derivacije $\boxed{\frac{\partial f(T)}{\partial x_i} = 0.}$

Parcijalna derivacija 2. reda

Zamislimo:

- skalarna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$
- f derivabilna na skupu A: postoje $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$
- ako je $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ derivabilna u točki x_0:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)}{\partial x_j} \overset{\text{oznaka}}{=} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$$ naziva se parcijalna derivacija 2. reda

- parcijalna derivacija 2. reda po istoj varijabli dvaput označava se kraće:

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_i} \overset{\text{oznaka}}{=} \frac{\partial^2 f(x_0)}{(\partial x_i)^2} \overset{\text{oznaka}}{=} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2}$$

- ako postoje sve parcijalne derivacije 2. reda kažemo da je funkcija dvaput derivabilna

Parcijalne derivacije još viših redova

Slično se definiraju više derivacije:

- ako još jednom možemo parcijalno derivirati sve parcijalne derivacije n-tog reda funkcije f tada se

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}}\right)(x_0)}{\partial x_j} \overset{\text{oznaka}}{=} \frac{\partial^{n+1} f\,(x_0)}{\partial x_j \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}}$$

naziva parcijalna derivacija$(n+1)$-vog reda po varijablama x_j, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$.

Primjer: $f(x,y) = x^2y + x\ln y$

- Domena je $\{(x,y) : y > 0\}$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \ln y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{x}{y}$
- $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + \frac{1}{y}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = -\frac{x}{y^2}$
- $\frac{\partial^3 f}{(\partial x)^3} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial y (\partial x)^2} = 2}$ ✓
- $\boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 2}$ ✓ $\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}$
- ...
- Primjeti da su neke mješovite derivacije jednake: npr. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots$ To nije slučajnost!

Schwartzov teorem

Kod neprekidnih mješovitih derivacija nije bitan redoslijed deriviranja varijabli

$\cdot (x_0, y_0)$

(x, y)

Teorem 5.2.4 *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, *derivabilna na nekoj* ϵ*-kugli* $K((x_0, y_0); \epsilon) \subseteq X$ *i neka* f *ima na toj kugli i parcijalnu derivaciju drugoga reda po* x *i* y *redom,* $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$. *Ako je funkcija*

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{K((x_0,y_0);\epsilon)} : K((x_0, y_0); \epsilon) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0), *onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije* f *po* y *i* x *redom u točki* (x_0, y_0) *i pritom je*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}.$$

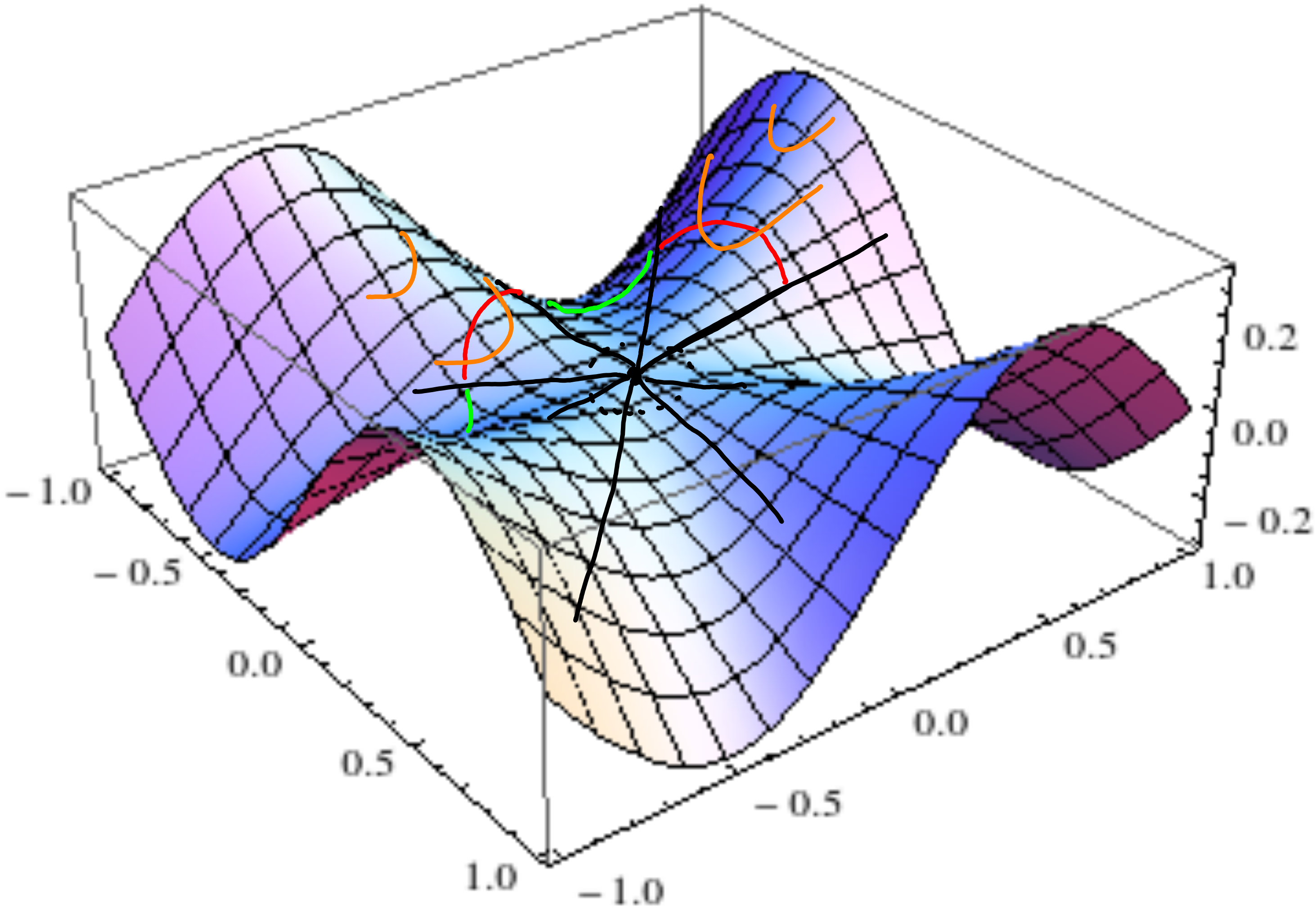
Schwartzov teorem za više derivacije

Kod neprekidnih mješovitih derivacija nije bitan redoslijed deriviranja varijabli

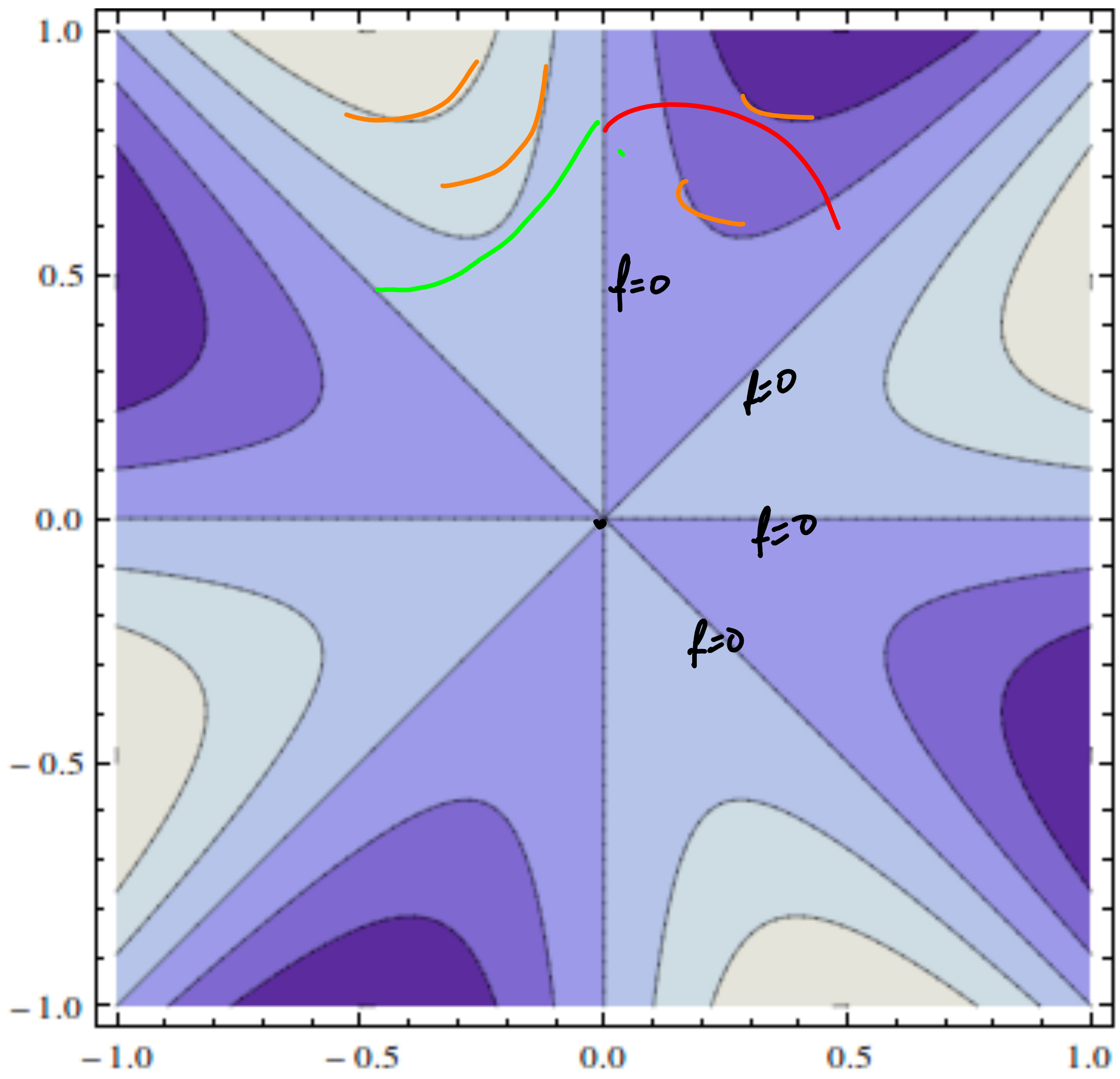
Teorem 5.2.5 *Neka su funkciji $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, na nekoj ϵ-kugli $K(x_0; \epsilon) \subseteq X$ neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo r-tog reda. Ako na toj ϵ-kugli f ima i sve parcijalne derivacije $(r+1)$-vog reda i ako su sve one neprekidne u točki x_0, onda vrijednosti parcijalnih derivacija $(r+1)$-vog reda funkcije f u točki x_0 ne ovise o redoslijedu deriviranja po pojedinim varijablama.*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$$

Primjer: $f(x,y) = \begin{cases} \underline{xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



Primjer: $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



Primjer: $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ $\partial_x f =$

koji pokazuje da parcijalne derivacije ovise o redosljedu deriviranja ako nije zadovoljen uvjet *Schwartzovog teorema*: neprekidnost mješovitih derivacija

NIJE DEF U (0,0)

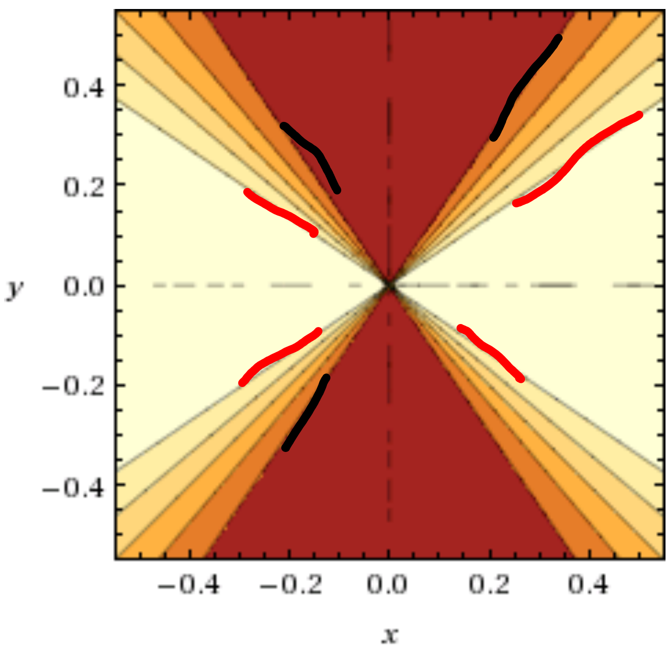
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \text{van ishodišta}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = -1} \quad \text{(Primjer 5.2.9 u knjizi)}$$

$4 0 y^2$

$\partial_y \partial_x f = y \cdot \dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2} + 0 y \cdot \dfrac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$

$\partial_y(-y) = -1$



Uzrok da su mješovite parcijalne derivacije u ishodištu različite jest da $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tamo nije neprekidna!

$\partial_y f = x \cdot \dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2} + x 0$

$\partial_x(x) = 1$

Tangencijalna ravnina $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T(\underset{x_0}{-2}, \underset{y_0}{1})$

$f(x) = \sin(x+1)$

$z = f(-2,1) + f'(y_0)(y - y_0)$

$\partial_x f(-2,1)$

$\partial_y f(-2,1)$

Ako fiksiramo $y = 1$ tada se f svodi na funkciju jedne varijable. Tangenta za $x = -2$ glasi

$$z = f(-2,1) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial x}(x+2)$$

$$\approx -0.84 + 0.54 \cdot (x+2)$$

$x = t$

Parametarski oblik:

$$x = t$$
$$y = 1$$
$$z = f(-2,1) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial x}(t+2)$$

Ako fiksiramo $x = -2$ tada se f svodi na funkciju jedne varijable. Tangenta za $y = 1$ glasi

$$z = f(-2,1) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial y}(y-1)$$

$$\approx -0.84 + 1.08 \cdot (y-1)$$

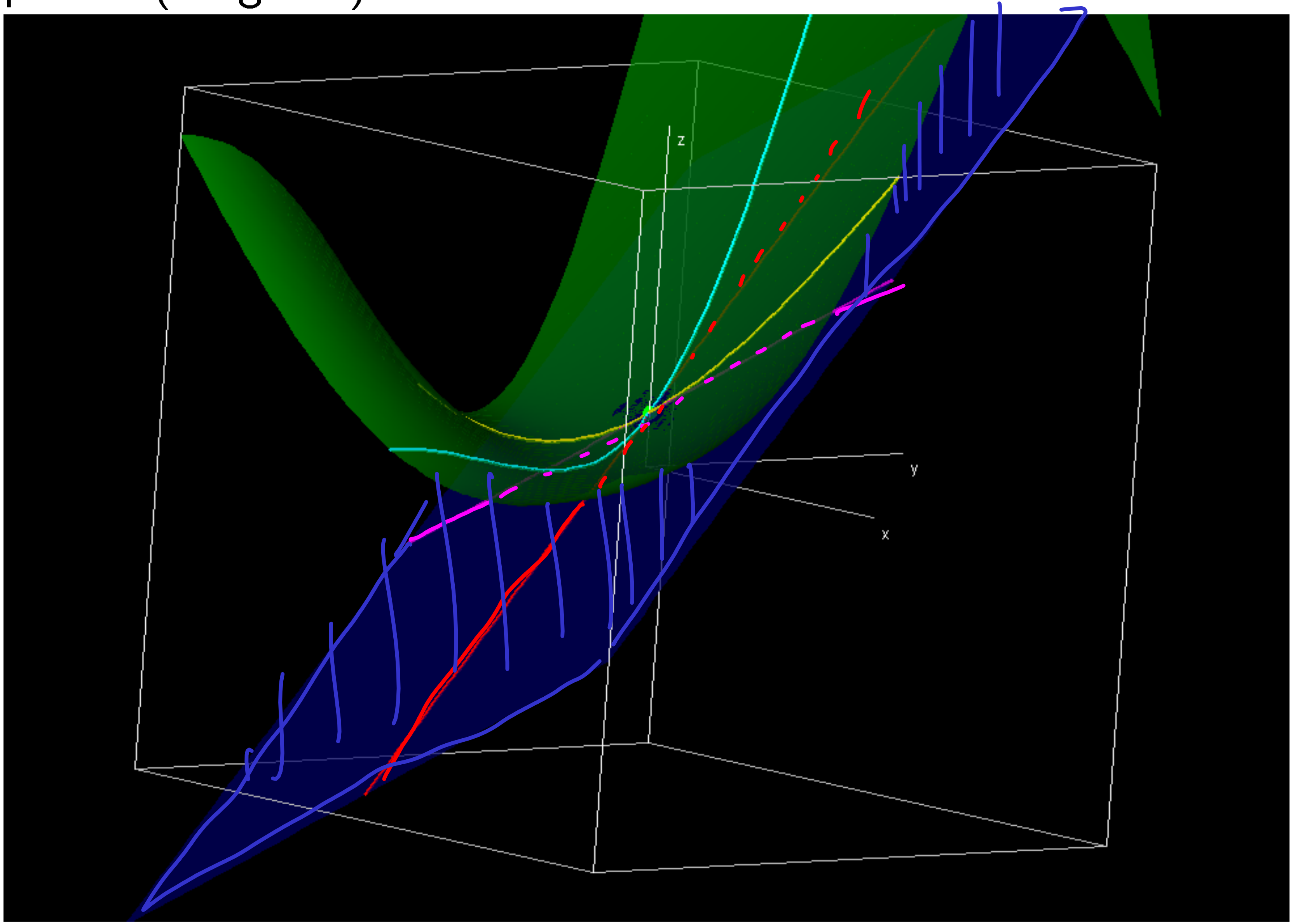
$y = t$

Parametarski oblik:

$$x = -2$$
$$y = t$$
$$z = f(-2,1) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial y}(t-1)$$

Tangencijalna ravnina $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T(-2,1)$

Primijeti: tangencijalna ravnina je određena sa dva navedena pravca (tangente)!



Tangencijalna ravnina $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T(-2,1)$

Prvi pravac (tangenta)

PARAMETARSKI ZAPIS:

$x = 1t$

$y = \cancel{1}$

$z = f(-2,1) + \partial_x f(-2,1)(t+2)$

ima vektor smjera

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(-2,1) \end{bmatrix}$$

Drugi pravac (tangenta)

$x = \cancel{0} -2 + 0t$ ✓

$y = 1t$ ✓

$z = f(-2,1) + \partial_y f(-2,1)(t-1)$ ✓

ima vektor smjera

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(-2,1) \end{bmatrix}$$

Tangencijalna ravnina $f(x,y) = \sin\left(x+y^2\right)$ u $T(-2,1)$

Prvi pravac (tangenta) ima vektor smjera

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(-2,1) \end{bmatrix} \checkmark$$

Drugi pravac (tangenta)ima vektor smjera

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(-2,1) \end{bmatrix} \checkmark$$

Vektor normale tangencijalne ravnine okomit na vektore smjera tih pravaca

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \cancel{1} & & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \times & \cancel{1} \\ \cancel{\partial_x f(-2,1)} & & \cancel{\partial_y f(-2,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_x f(-2,1) \\ -\partial_y f(-2,1) \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{matrix}$$

Tangencijalna ravnina $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T(-2,1)$

Prvi pravac (tangenta) ima vektor smjera

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(-2,1) \end{bmatrix}$$

Drugi pravac (tangenta)ima vektor smjera

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(-2,1) \end{bmatrix}$$

Normala i točka $T(-2, 1, f(-2,1))$ određuju ravninu

$$-\partial_x f(-2,1)\,(x+2) - \partial_y f(-2,1)\,(y-1) + 1\,(z - f(-2,1)) = 0 \checkmark$$

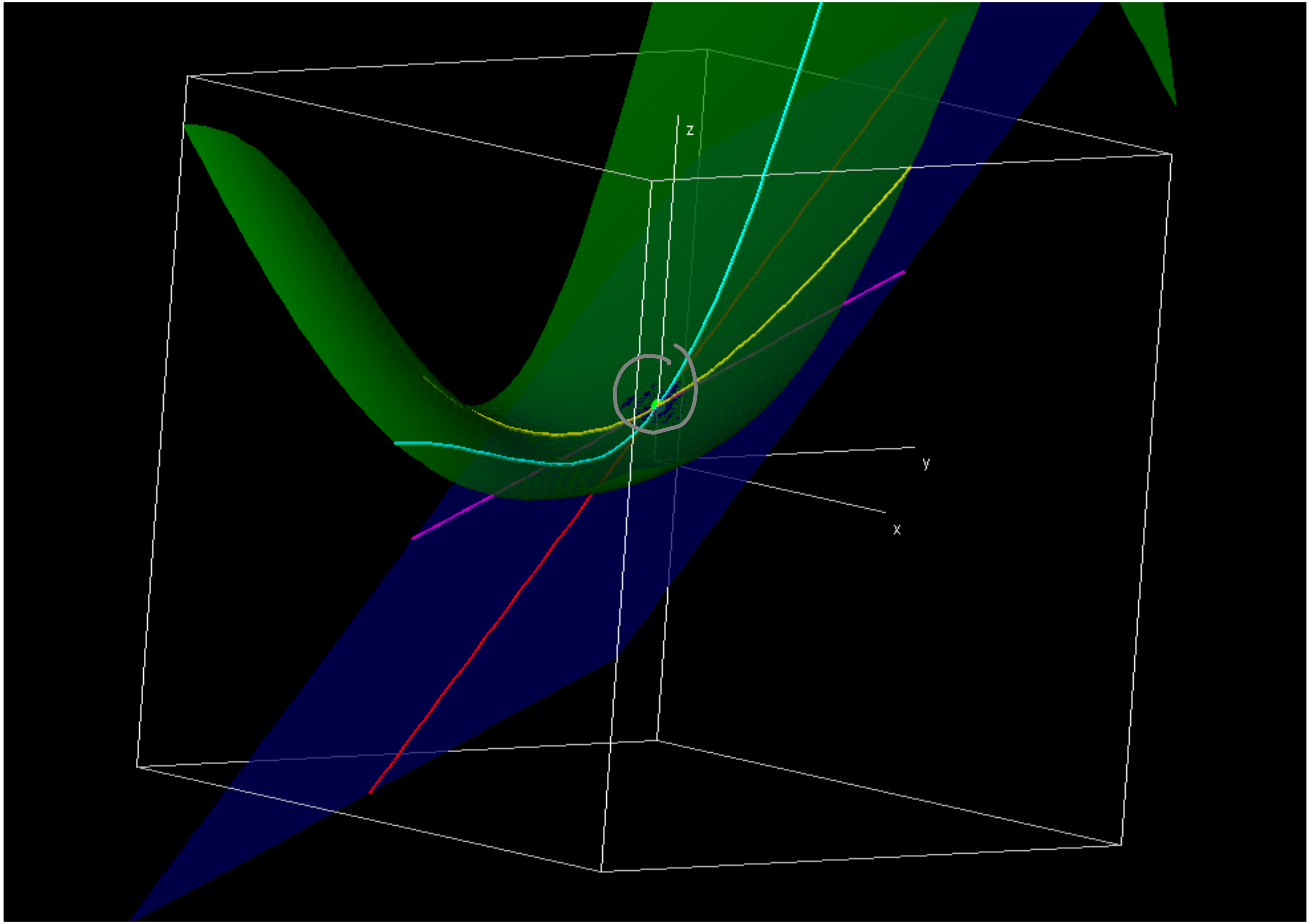
Kada se sve osim z prebaci na drugu stranu jednakosti

$$z = f(-2,1) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial x}(x+2) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial y}(y-1)$$
$$\approx -0.84 + 0.54 \cdot (x+2) + 1.08 \cdot (y-1) \checkmark$$

Ova ravnina naziva se *tangencijalna ravnina* jer “jako dobro” opisuje (tangira) graf funkcije oko dirališta. Pogledajmo slike. . .

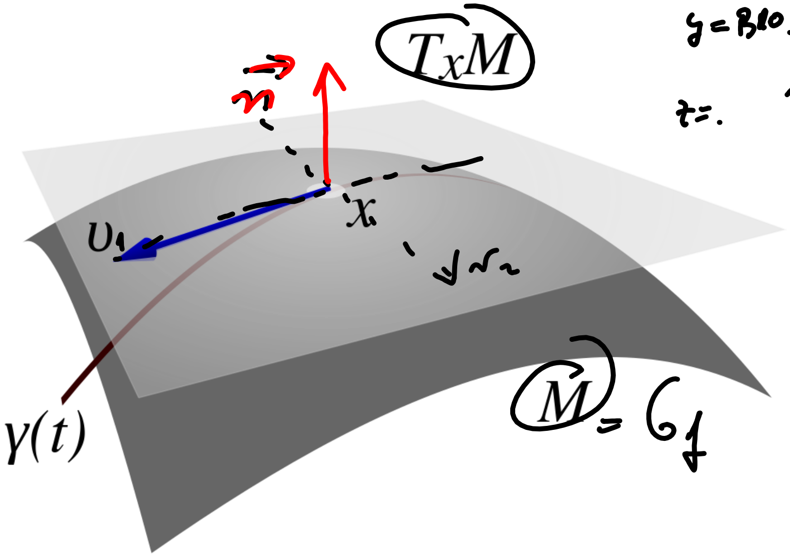
Tangencijalna ravnina $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$

Tangencijalna ravnina jako dobro aproksimira f oko dirališta!



Tangencijalna ravnina

$f(x,y)$ $\qquad \partial_x f(x_0,y_0)$ $\qquad \partial_y f(x_0,y_0)$



$x = t$

$y = y_0$

$t = .$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{bmatrix} = V_1 \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{bmatrix}$$

$= G_f$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{n}$$

$$T(x_0, y_0, \underbrace{\boxed{f(x_0,y_0)}}_{z_0})$$

$$-\partial_x f(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \partial_y f(x_0,y_0)\,(y-y_0) + 1\,\big(z - f(x_0,y_0)\big) = 0$$

$$z = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

Ravnina dobivena preko dane formule ne aproksimira uvijek dobro graf funkcije u okolini dirališta

Ravnina koju smo dobili preko formule za tangencijalna ravninu na graf funkcije f u točki (x_0, y_0)

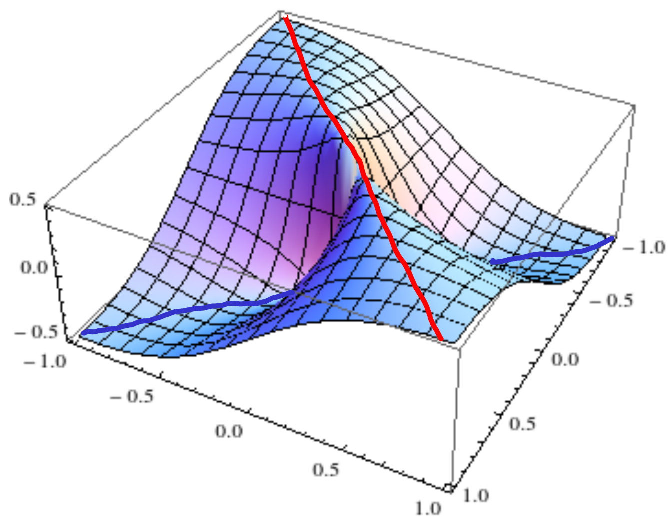
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

<u>ne</u> aproksimira **<u>uvijek</u>** dobro graf funkcije.

Npr. funkcija

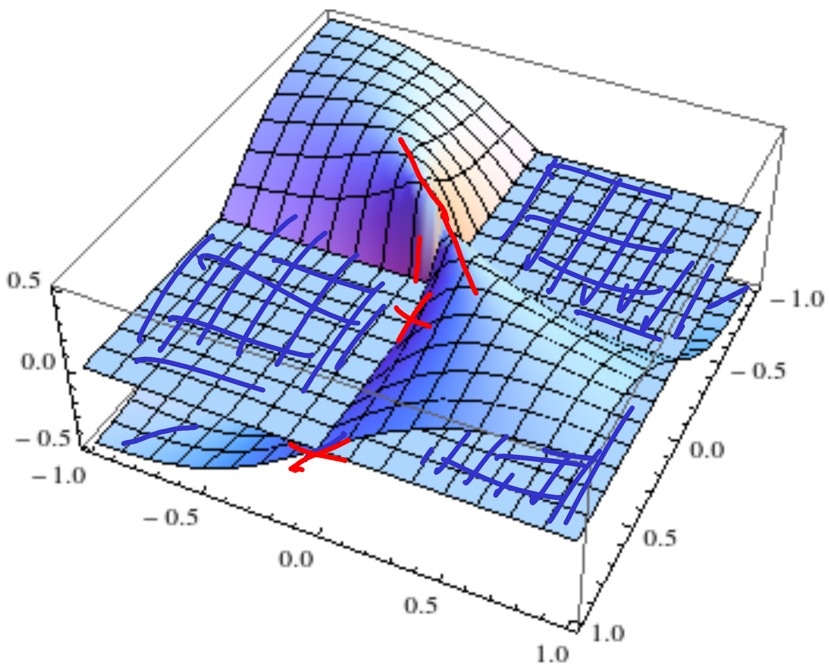
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

nije dobro aproksimirana ravninom oko ishodišta (parcijalne derivacije na sljedećem slajdu) zbog činjenice da nije neprekidna.



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Primjer funkcije koji pokazuje da formula za tangencijalnu ravninu može dati ravninu koja ne aproksimira dobro graf funkcije — ovu ravninu nećemo zvati tangencijalna



Restrikcija na pravac $y = 0$ daje funkciju

$f(x,0) = \frac{0 \cdot x}{x^2 + 0} = 0$ tako da je

$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = 0.$ ✓

Slično je $\frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = 0.$ ✓

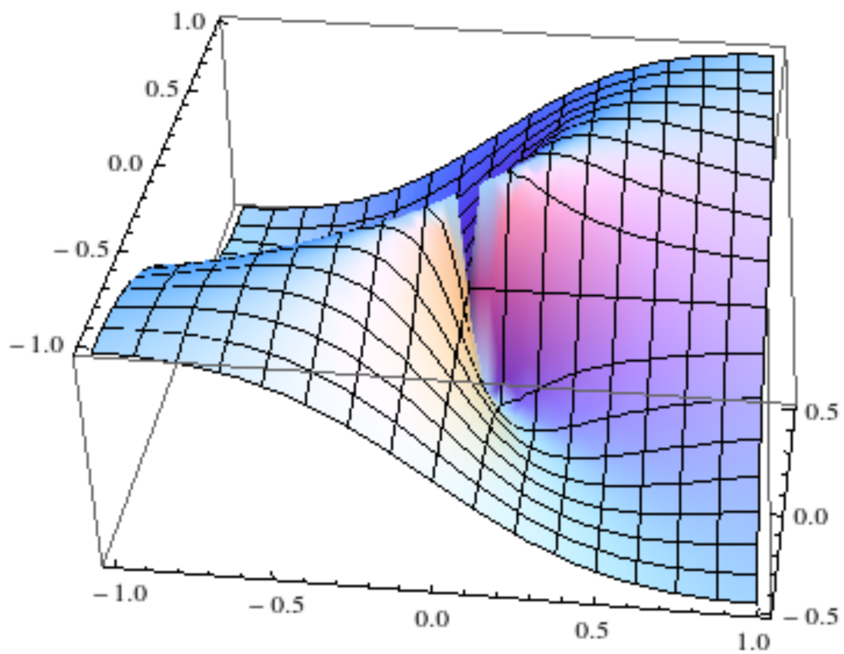
Još iz definicije $\underline{f(0,0) = 0}$

Formula za ~~tangencijalnu~~ ravninu na graf funkcije f u točki $(0,0)$

$$z = \cancel{f(0,0)}^{0} + \cancel{\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}^{0}(x-0) + \cancel{\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}^{0}(y-0) = 0$$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

Primjer funkcije koji pokazuje da parcijalne derivacije mogu postojati čak i na mjestu gdje funkcija ima prekid



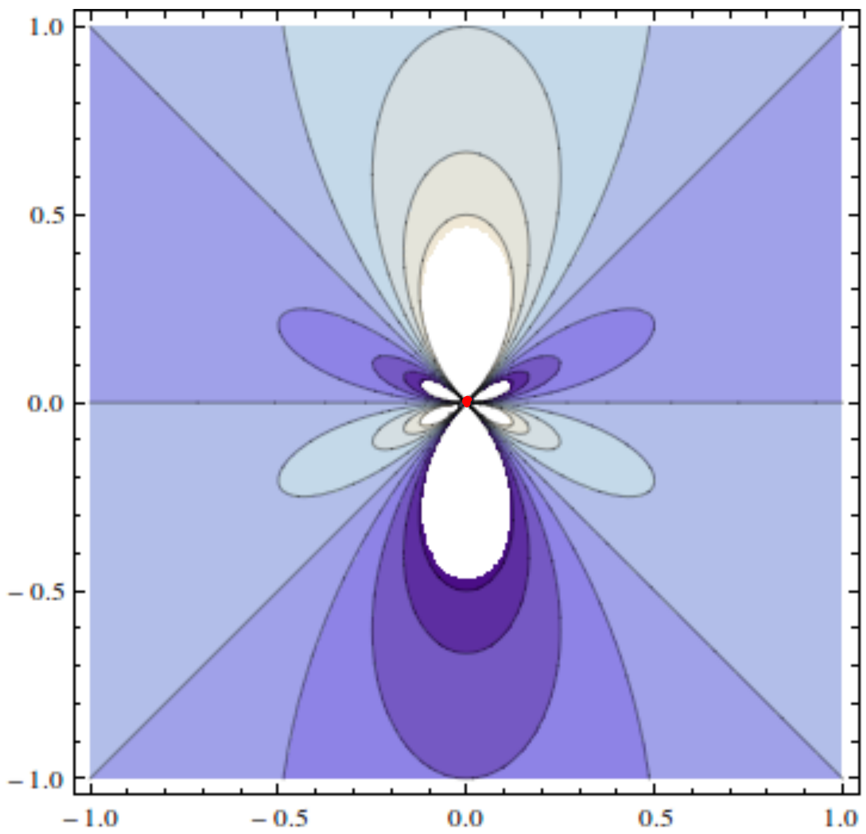
Vidjeli smo da je funkcija definirana u ishodištu: $f(0,0) = 0$. Također, **parcijalne derivacije postoje** u ishodištu: $\partial_x f(0,0) = 0$ i $\partial_y f(0,0) = 0$.
U ishodištu se sijeku različite razinske krivulje $\Longrightarrow$ F **ima prekid**.

Činjenica

Kod funkcija jedne varijable ***derivabilnost*** *povlači* ***neprekidnost****,*
ali ***kod skalarnih funkcija to nije slučaj****.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Međutim gdje funkcija nije neprekidna, tamo niti parcijalne derivacije nisu neprekidne



Slika: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ ✓

Sažetak:

- f nije neprekidna u ishodištu
- f nema tangencijalnu ravninu u ishodištu
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ postoje u ishodištu
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ nisu neprekidne u ishodištu

Pitanje:

- kako odrediti da li postoji tangencijalna ravnina?

Diferencijal i diferencijabilnost u 2D

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cancel{(x-x_0)}]}{x-x_0} = 0$$

$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

Kada vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{\left[f(x_0,y_0) + \boxed{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}\right]}^{\text{tangencijalna ravnina}}}{\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{d((x,y),(x_0,y_0))}} = 0$$

$df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)$

tada kažemo da je funkcija f ***diferencijabilna*** u točki (x_0,y_0), funkciju (izraz)

$$(x_0,y_0) \mapsto \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

zovemo *diferencijal*, a *tangencijalna ravnina* dana je formulom:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

Diferencijal

Tangencijalna ravnina: $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$

Definicija

Za skalarnu funkciju 2 varijable $f(x, y)$ pod pojmom **diferencijal u točki** $T_0(x_0, y_0)$ smatramo novu funkciju 2 varijable

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)\overset{\text{varijable}}{(x, y)} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot y$$

samo onda kada je

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{T} \to \underbrace{(x_0,y_0)}_{T_0}} \frac{f(x, y) - \overbrace{\left[f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)\right]}^{\text{tangencijalna ravnina}}}{d(\underbrace{(x, y)}_{T}, \underbrace{(x_0, y_0)}_{T_0})} = 0$$

!Pazi da razlikuješ udaljenost d i diferencijal d

Definicija

Za skalarnu funkciju 2 varijable $f(x,y)$ pod pojmom **diferencijal u točki** $T_0(x_0,y_0)$ smatramo novu funkciju 2 varijable

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)\overbrace{(x,y)}^{\text{varijable}} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot y$$

samo onda kada je

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{T}\to\underbrace{(x_0,y_0)}_{T_0}} \frac{f(x,y) - \overbrace{\left[f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)\right]}^{\text{tangencijalna ravnina}}}{\underbrace{d\big(\underbrace{(x,y)}_{T},\underbrace{(x_0,y_0)}_{T_0}\big)}_{\longrightarrow 0}} = 0$$

Definicija

Za skalarnu funkciju 2 varijable $f(x,y)$ pod pojmom **diferencijal u točki** $T_0(x_0,y_0)$ smatramo novu funkciju 2 varijable

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)\overbrace{(x,y)}^{\text{varijable}} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot y$$

samo onda kada je

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{T}\to\underbrace{(x_0,y_0)}_{T_0}} \frac{\overbrace{f(x,y)-\overbrace{[f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)]}^{\text{tangencijalna ravnina}}}^{\text{još "mnogo" brže}\xrightarrow{}_0}}{\underbrace{d(\underbrace{(x,y)}_{T},\underbrace{(x_0,y_0)}_{T_0})}_{\longrightarrow 0}} = 0$$

Aproksimacija funkcije diferencijalom u točki

Pogledajmo kolika je greška te aproksimacije

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{[f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)\,(x-x_0, y-y_0)]}^{\text{tangencijalna ravnina}}}{d((x,y)\,,(x_0,y_0))} = 0$$

Znači da za proizvoljno mali ε postoji okolina (krug) oko točke (x_0, y_0) u kojoj je

$$-\varepsilon \quad < \frac{f(x,y) - \overbrace{[f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)\,(x-x_0, y-y_0)]}^{\text{tangencijalna ravnina}}}{d((x,y)\,,(x_0,y_0))} < \varepsilon$$

$$\underbrace{-\varepsilon d((x,y),(x_0,y_0))}_{\text{stožac}} < \text{greška aproksimacije} < \underbrace{\varepsilon d((x,y),(x_0,y_0))}_{\text{stožac}}$$

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Ranije smo računali parcijalne derivacije

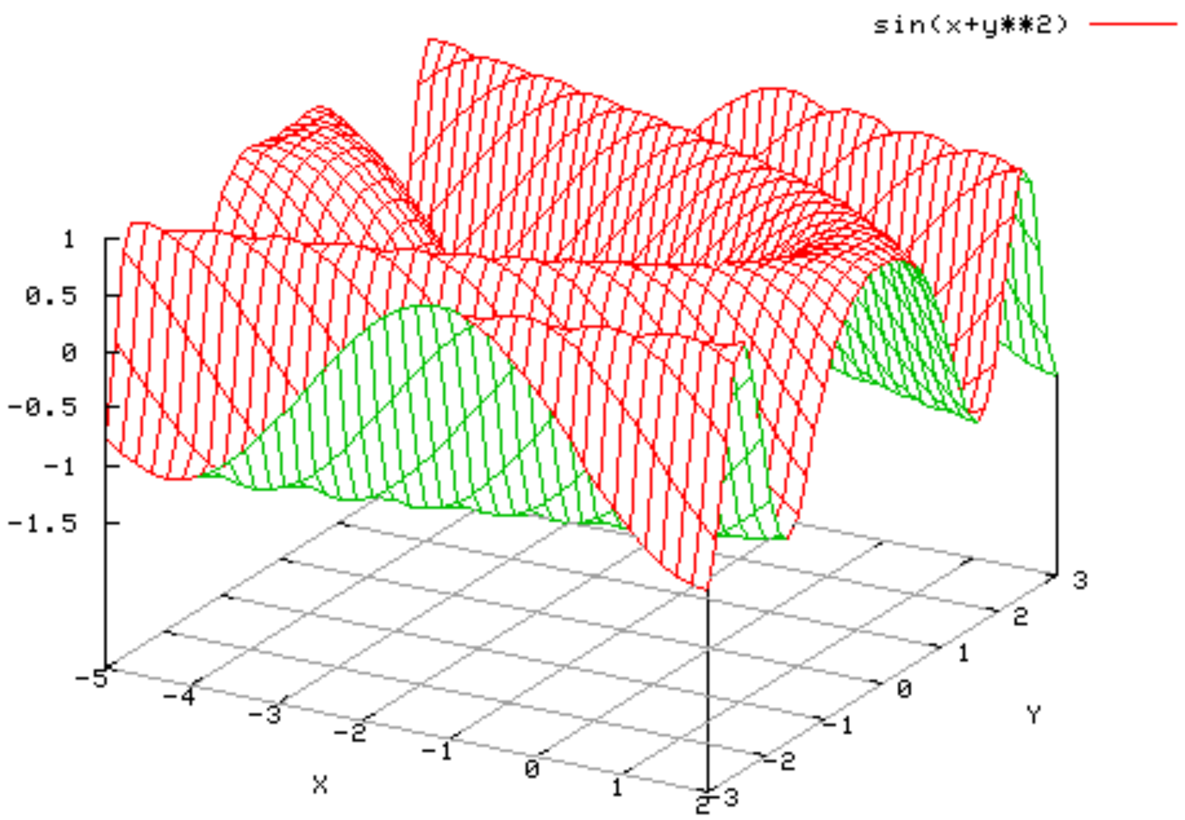
$$\begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(x+y^2\right) & 2y\cos\left(x+y^2\right) \end{bmatrix}$$

i tangencijalna ravnina u T_0

$$\begin{aligned} z &= f(-2,1) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial x}(x+2) + \frac{\partial f(-2,1)}{\partial y}(y-1) \\ &= \sin(-1) + \cos(-1)\cdot(x+2) + 2\cos(-1)\cdot(y-1) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

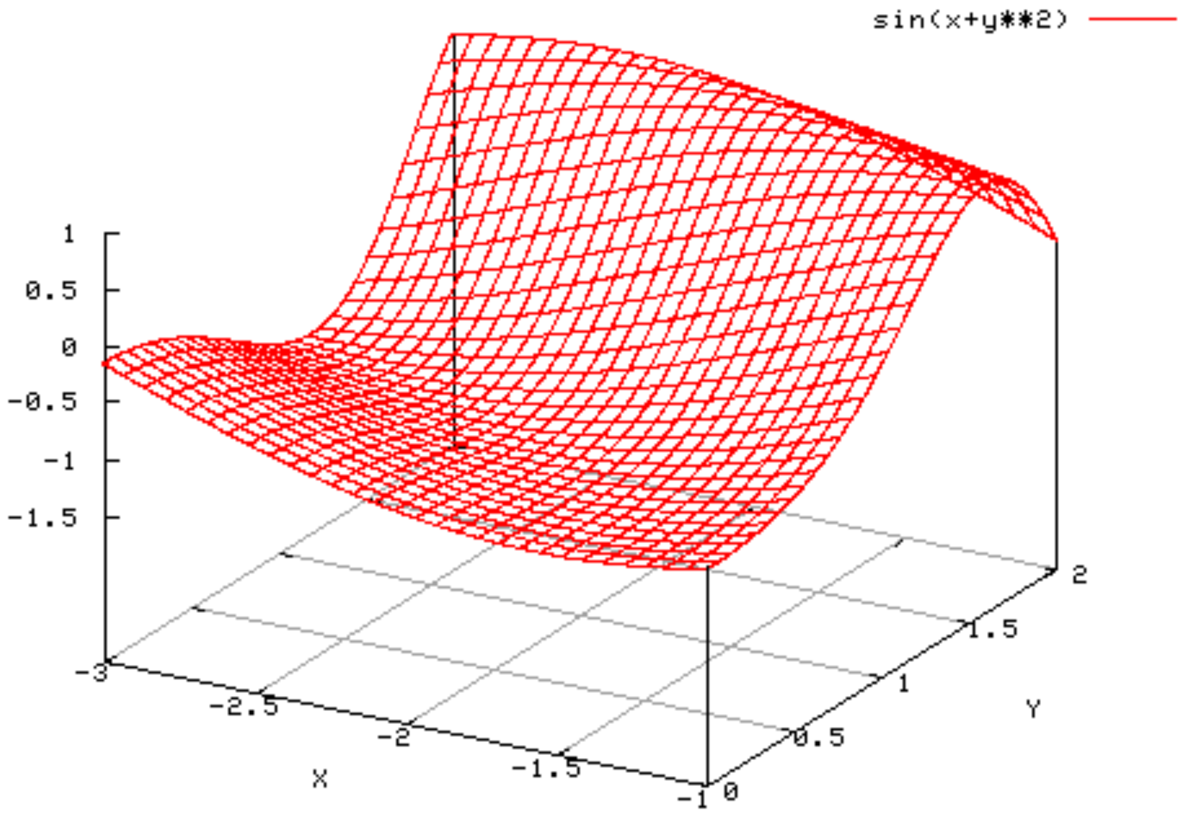
Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini



Prikazan je 3D graf funkcije na široj domeni.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini



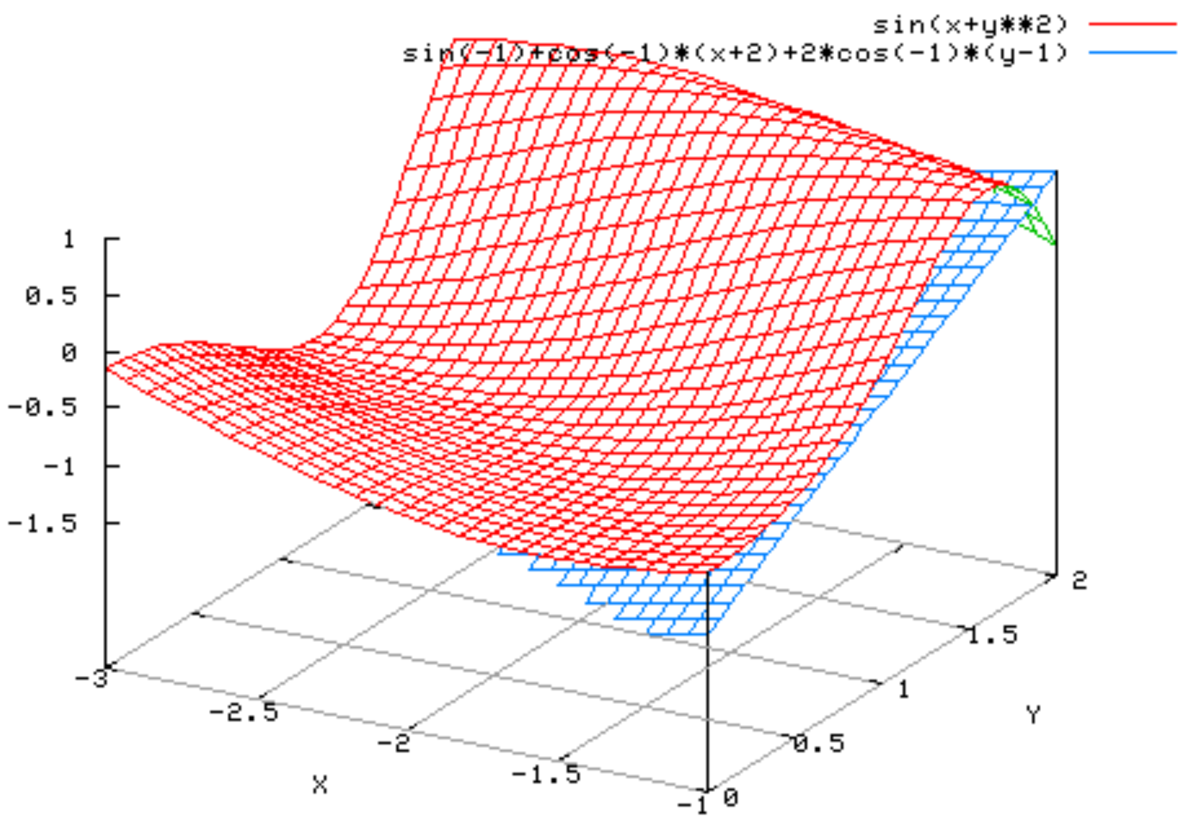
Sada je domena malo sužena.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini

Tangencijalna ravnina u T_0

$$z = \sin(-1) + \cos(-1)\cdot(x+2) + 2\cos(-1)\cdot(y-1)$$



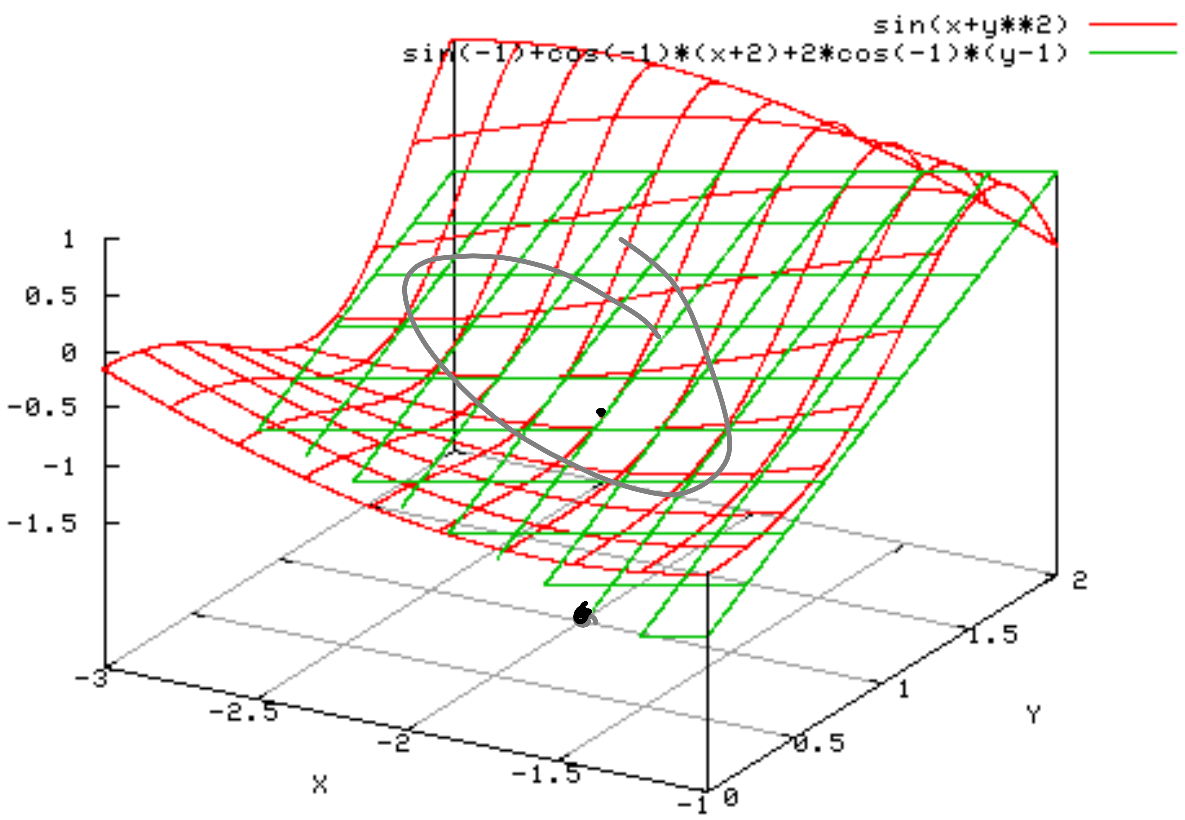
Na sliku je dodana tangencijalna ravnina na graf u točki T_0.

Primjer: $f(x,y)=\sin\left(x+y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini

Tangencijalna ravnina u T_0

$$z=\sin(-1)+\cos(-1)\cdot(x+2)+2\cos(-1)\cdot(y-1)$$

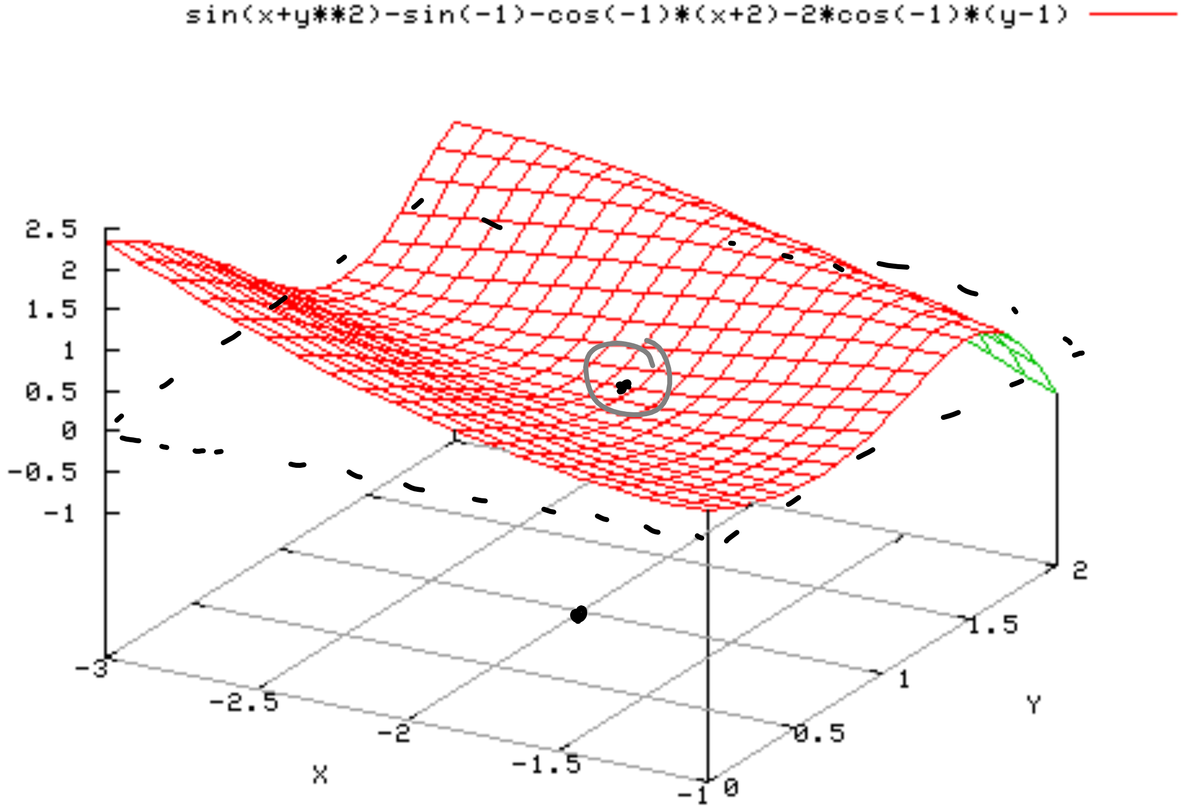


Ista slika samo se "providi" kroz plohe tako da u isto vrijeme vidimo i graf funkcije i tangencijalnu ravninu.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini

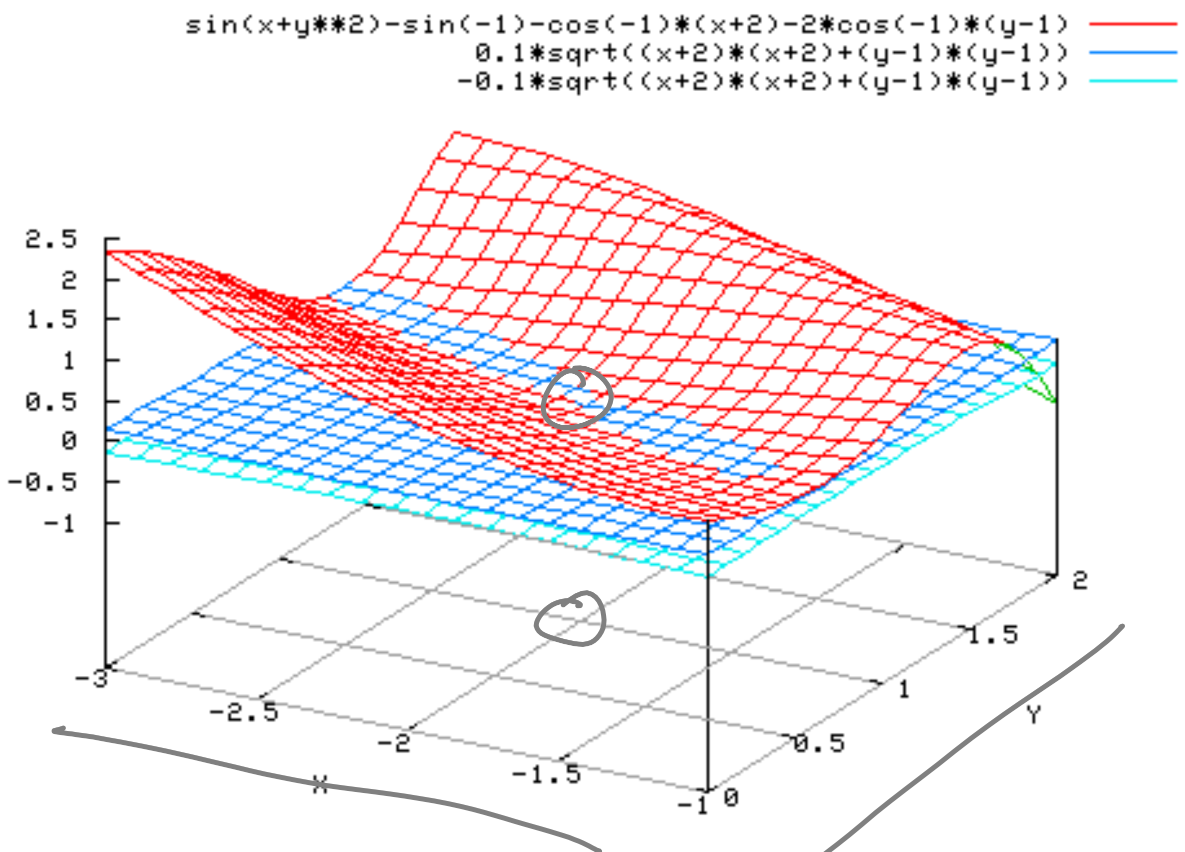
f – tangencijalna ravnina



Prikazana je razlika:
f-tangencijalna ravnina
To je upravo greška aproksimacije funkcije tangencijalnom ravninom.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini



$0.1 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$

$z = 0.1 \cdot d(T, (-2,1))$

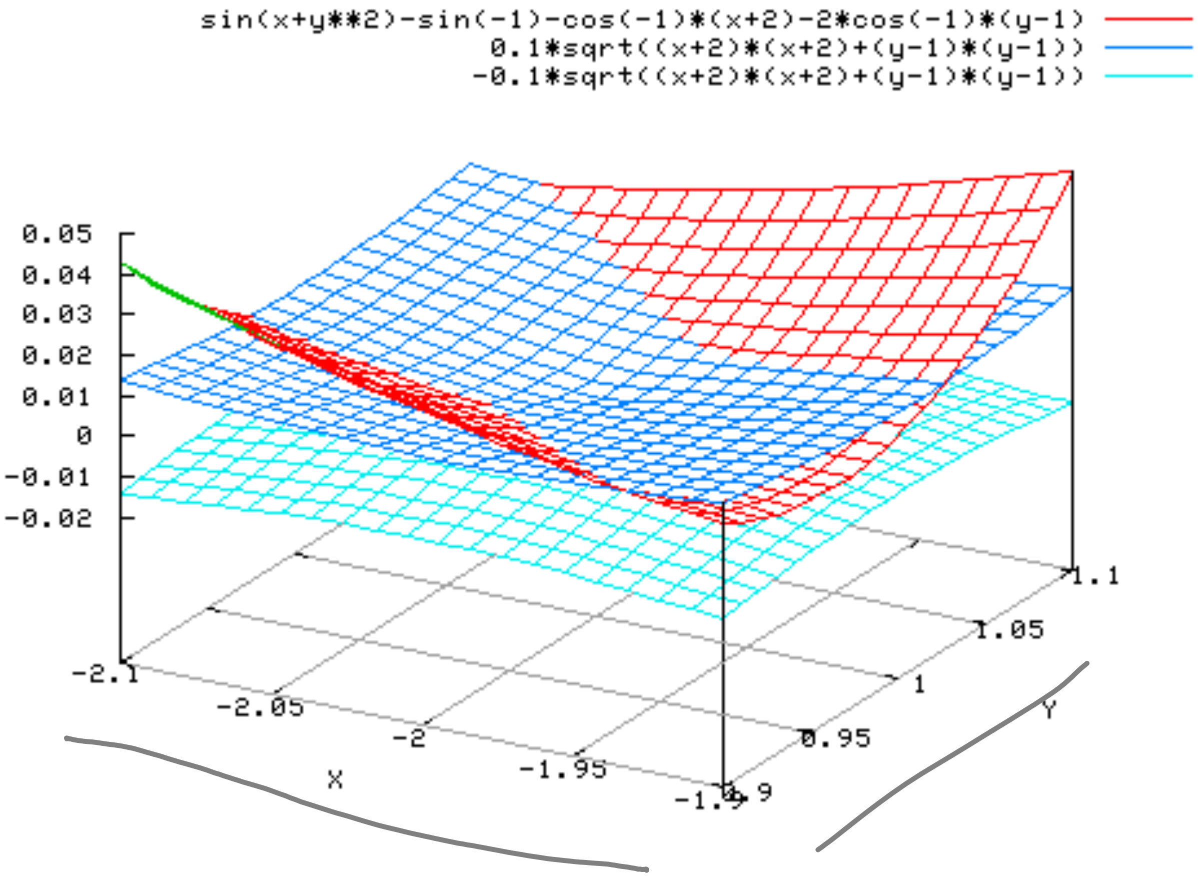
$z = -0.1 \cdot d(T, (-2,1))$

$= -0.1 \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$

Postavili smo $\varepsilon = 0.1$ i na sliku dodali dva stošca. Na ovoj domeni greška aproksimacije nije unutar dva stošca.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

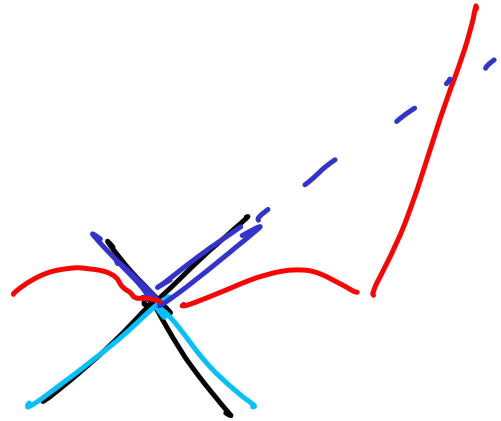
Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini

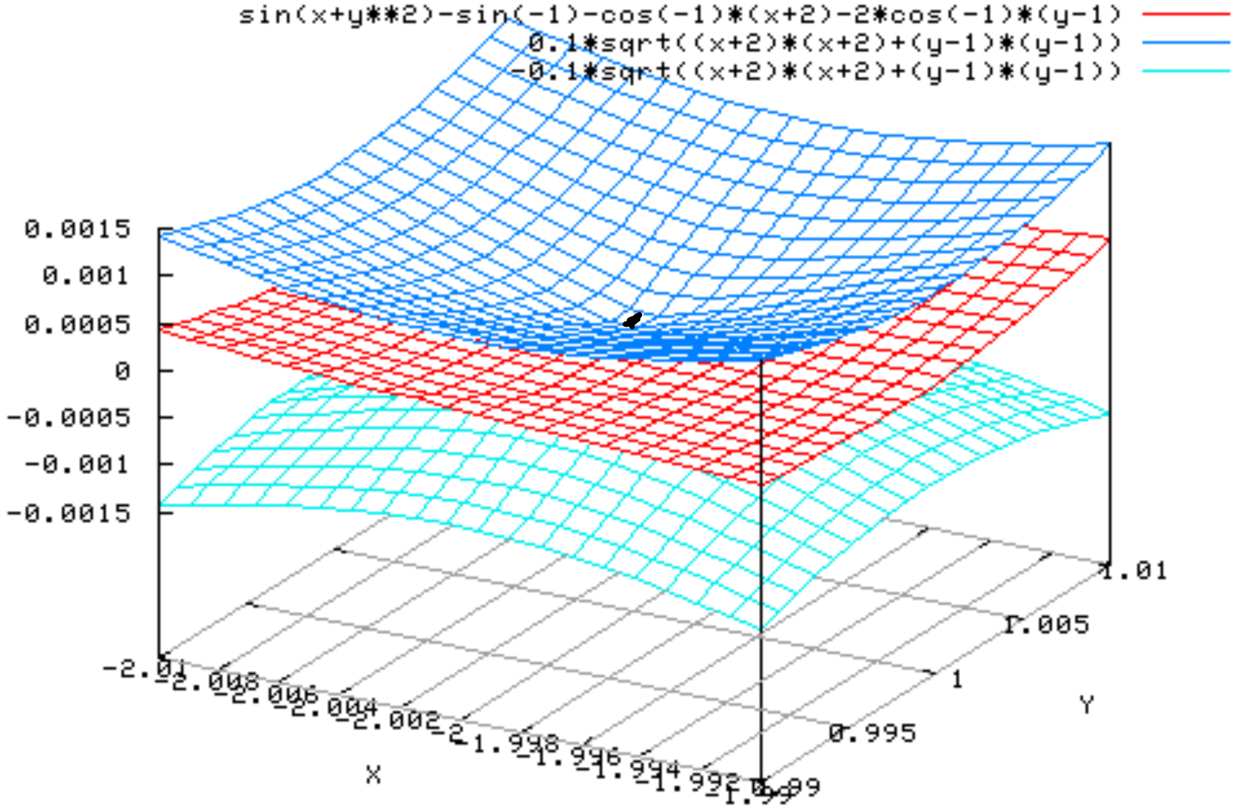


Sada sužavamo sliku na 0.1 okolinu oko T_0 jer nam prethodno razmatranje kazuje nam da bi u nekoj okolini (ne znamo kojoj) greška morala biti između dva proizvoljna ε-stošca.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini

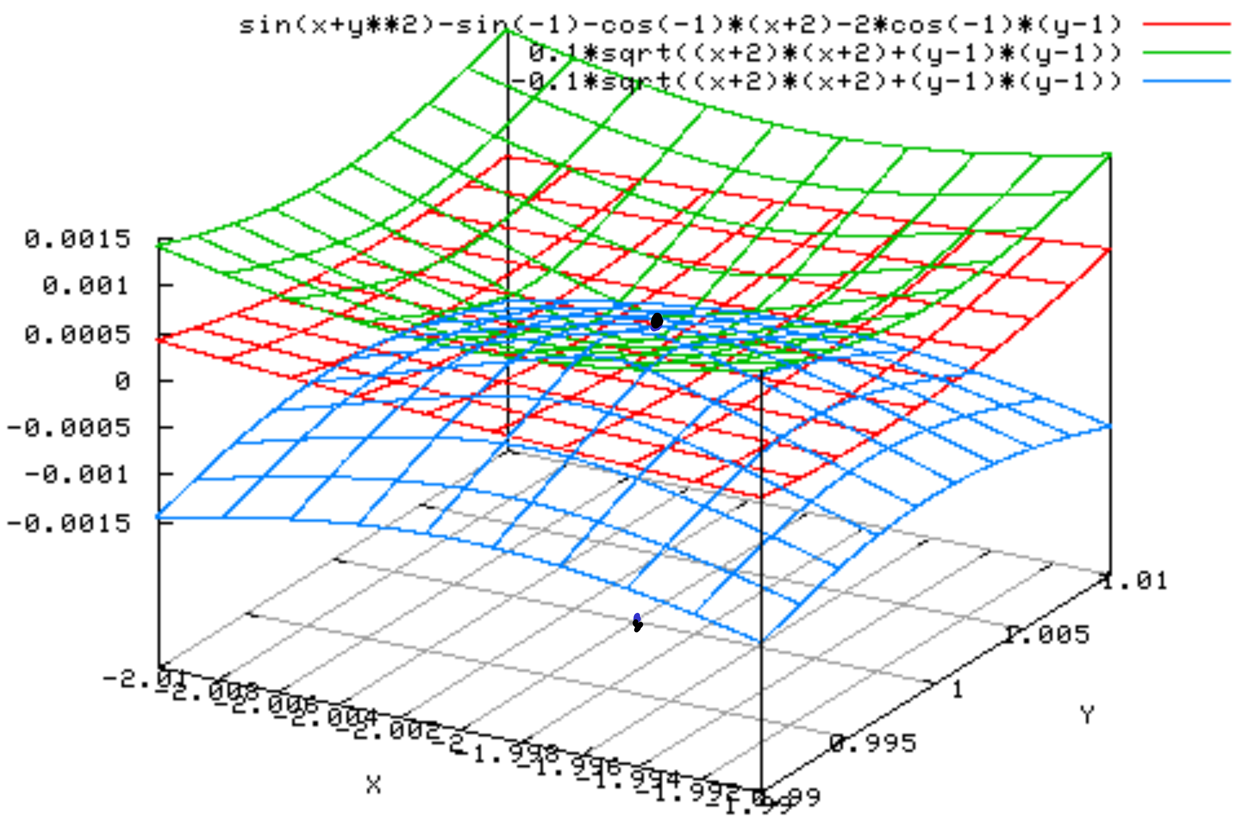




Našli smo da na 0.01-okolini točke T_0 greška aproksimacije se doista nalazi između dva stošca.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ u $T_0(-2,1)$

Greška aproksimacije omeđena je stožastim plohom po volji malog nagiba u nekoj okolini



Ista slika samo se "providi" kroz plohe tako da u isto vrijeme vidimo grešku aproksimacije i dva stošca koji omeđuju grešku na ovoj maloj okolini.