Određeni integral i računanje površine

Matematika II, Predavanje 6

M. Kosor[1]

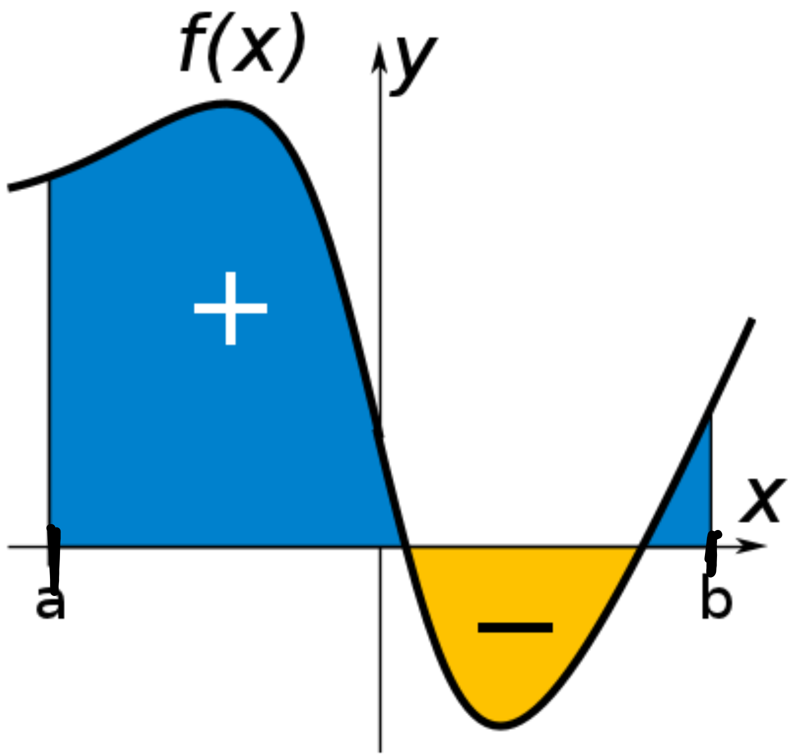
[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

10. travnja 2013.

Sadržaj predavanja

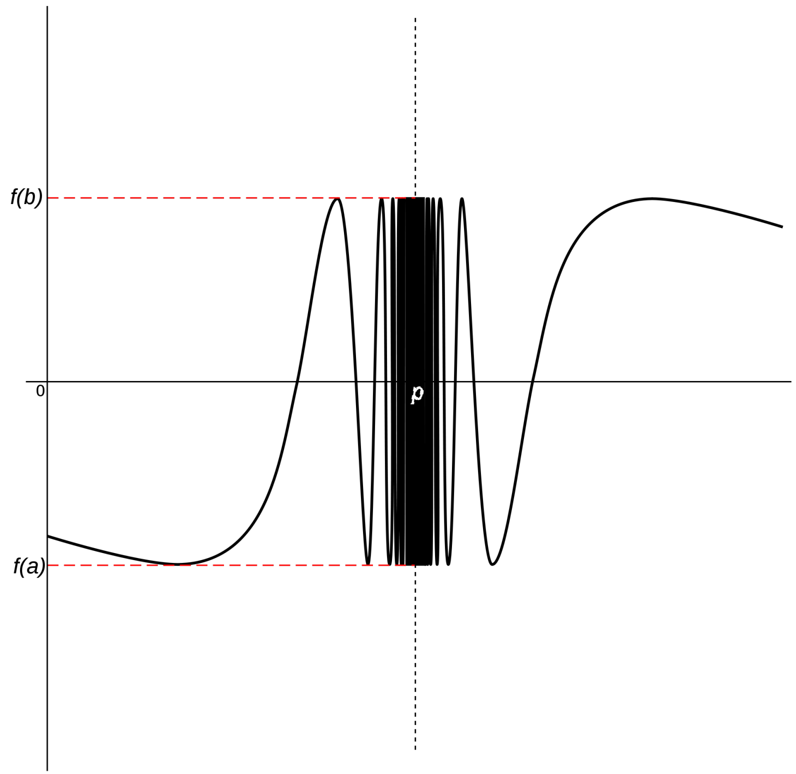
Određeni integral

- povijesno: preko izračunavanja neke površine ili volumena
  - krug, parabola: Eudoks (4.st.pr.Kr), Arhimed (3.st.pr.Kr)
  - piramida: Egipat (18.st.pr.Kr)
- temeljno značenje: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ je površina između grafa krivulje i apscise (osi x)



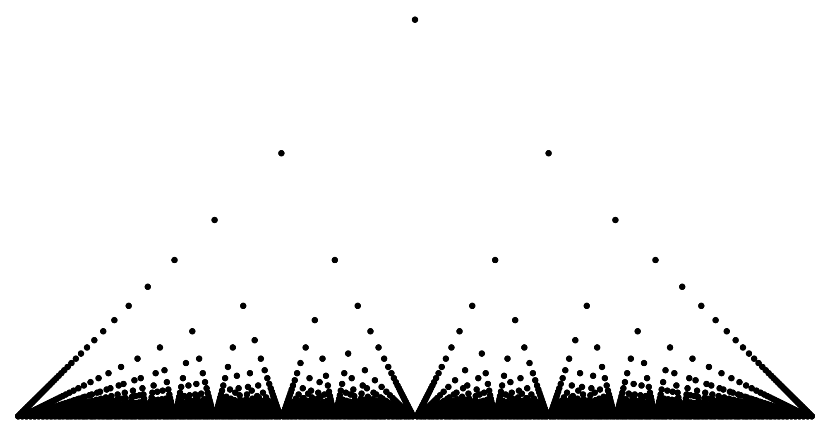
Kako znamo da je površina ispod krivulje dobro definirana?

- Da li je površina ispod krivulje dobro osmišljen koncept?
- Možda se površina može računati na razne načine i svaki daje različitu vrijednost?
- Na prvi pogled nema problema, ali . . .



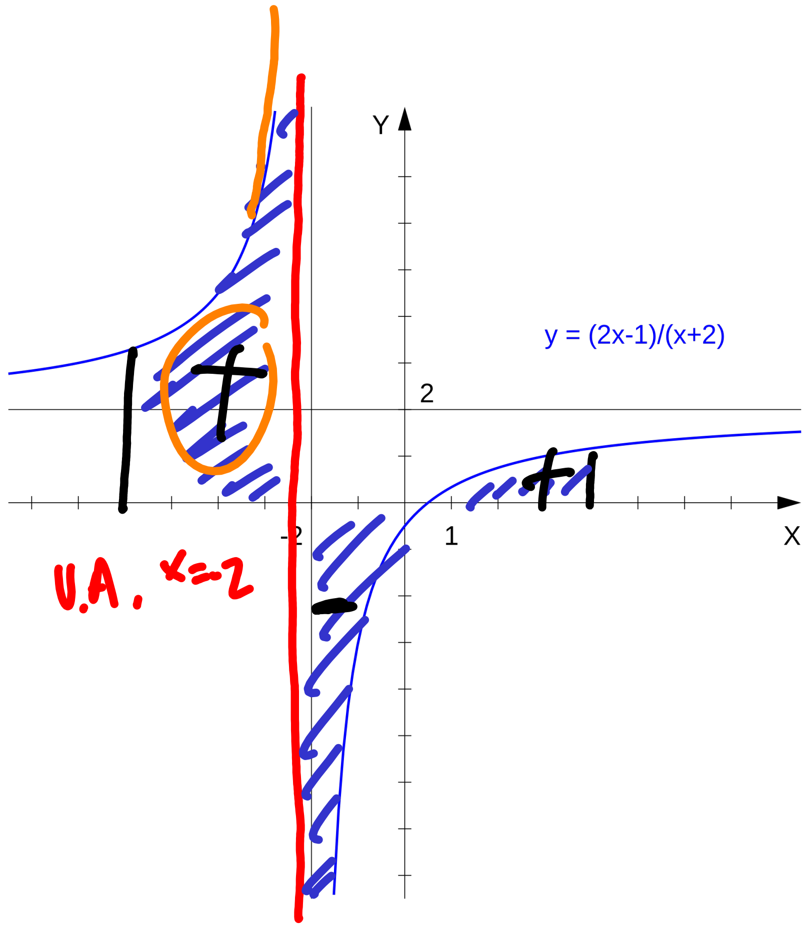
Kako znamo da je površina ispod krivulje dobro definirana?

- Da li je površina ispod krivulje dobro osmišljen koncept?
- Možda se površina može računati na razne načine i svaki daje različitu vrijednost?
- Na prvi pogled nema problema, ali ...



Kako znamo da je površina ispod krivulje dobro definirana?

- Da li je površina ispod krivulje dobro osmišljen koncept?
- Možda se površina može računati na razne načine i svaki daje različitu vrijednost?
- Na prvi pogled nema problema, ali . . .



Pojmovi koje ćemo koristiti

Neprekidna funkcija na segmentu

- ograničena
- poprima ekstreme
- poprima sve vrijednosti između min i max

Supremum skupa S

- najmanja gornja međa

Gornja međa je svaki broj ne manji (veći ili jednak) od svih iz S.

Infimum skupa S

- najveća donja međa

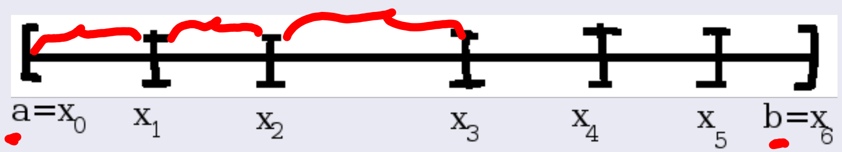
Donja međa je svaki broj ne veći (manji ili jednak) od svih iz S.

Svojstvo skupa $\mathbb{R}$

Svaki ograničen podskup skupa realnih brojeva ima sup i inf!

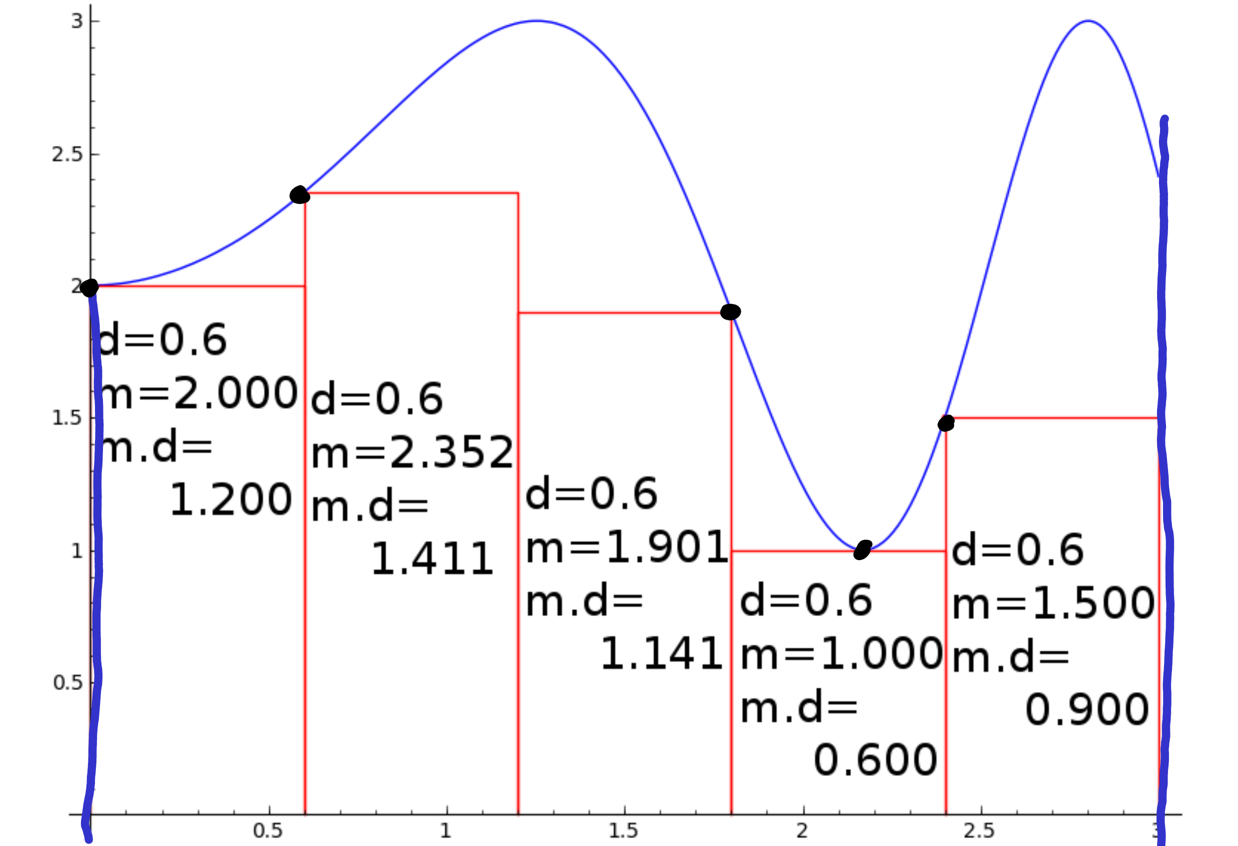
Razdioba segmenta $[a, b]$

- konačan niz brojeva $R = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ tako da je $x_0 = a$, $x_n = b$ i $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$
- podsegmenti razdiobe su $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$
- primjer razdiobe segmenta na 6 dijelova:



Ideja: podijeliti domenu na dijelove. . .

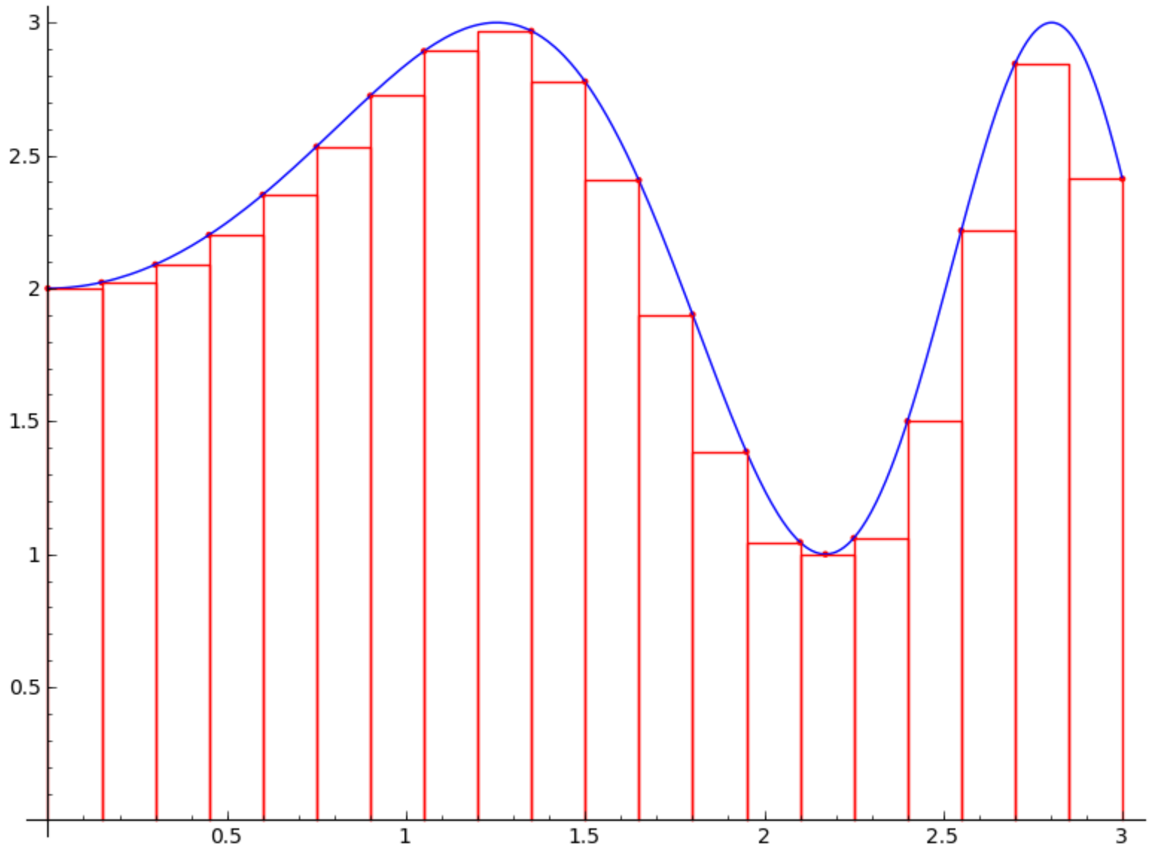
aproksimirati površinu ispod krivulje **upisanim** pravokutnicima



s(f,R)=1.200+1.411+1.141+0.600+0.900
=5.252

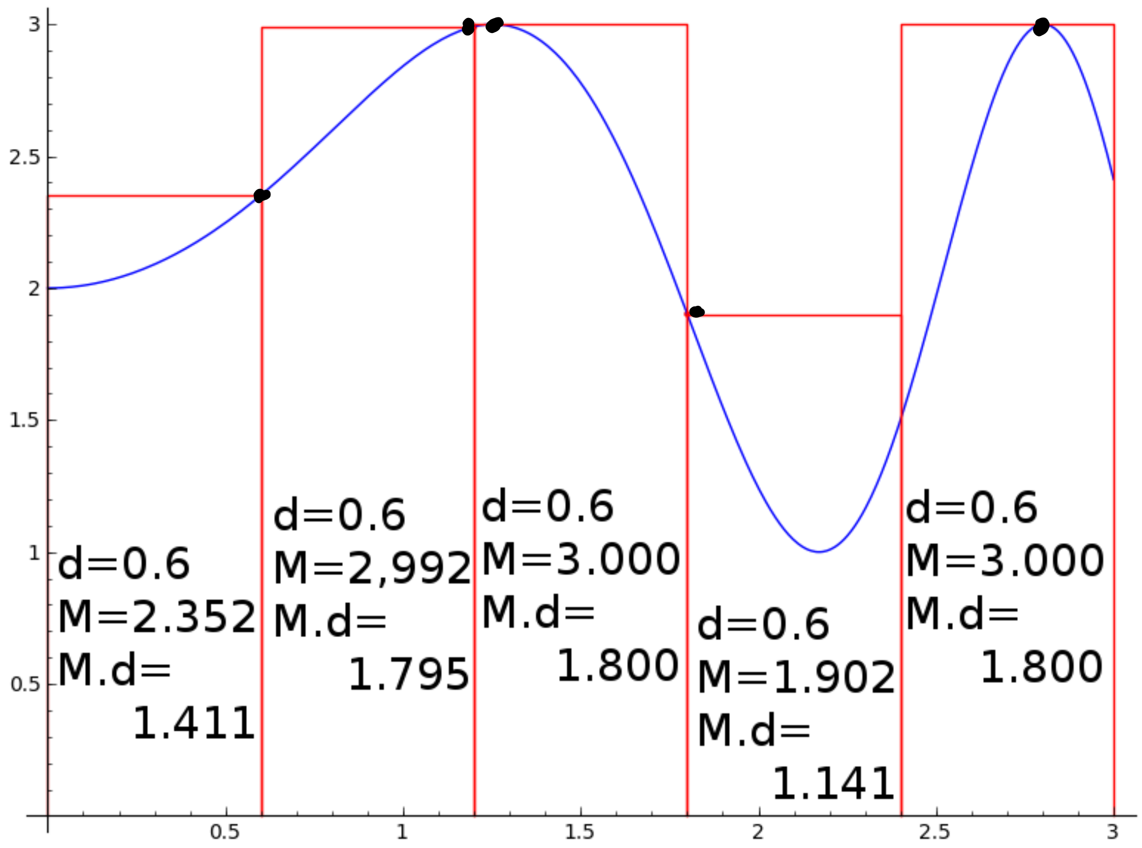
Ideja: podijeliti domenu na dijelove. . .

. . . pa ponavljati uzimajući sve finiju razdiobu segmenta



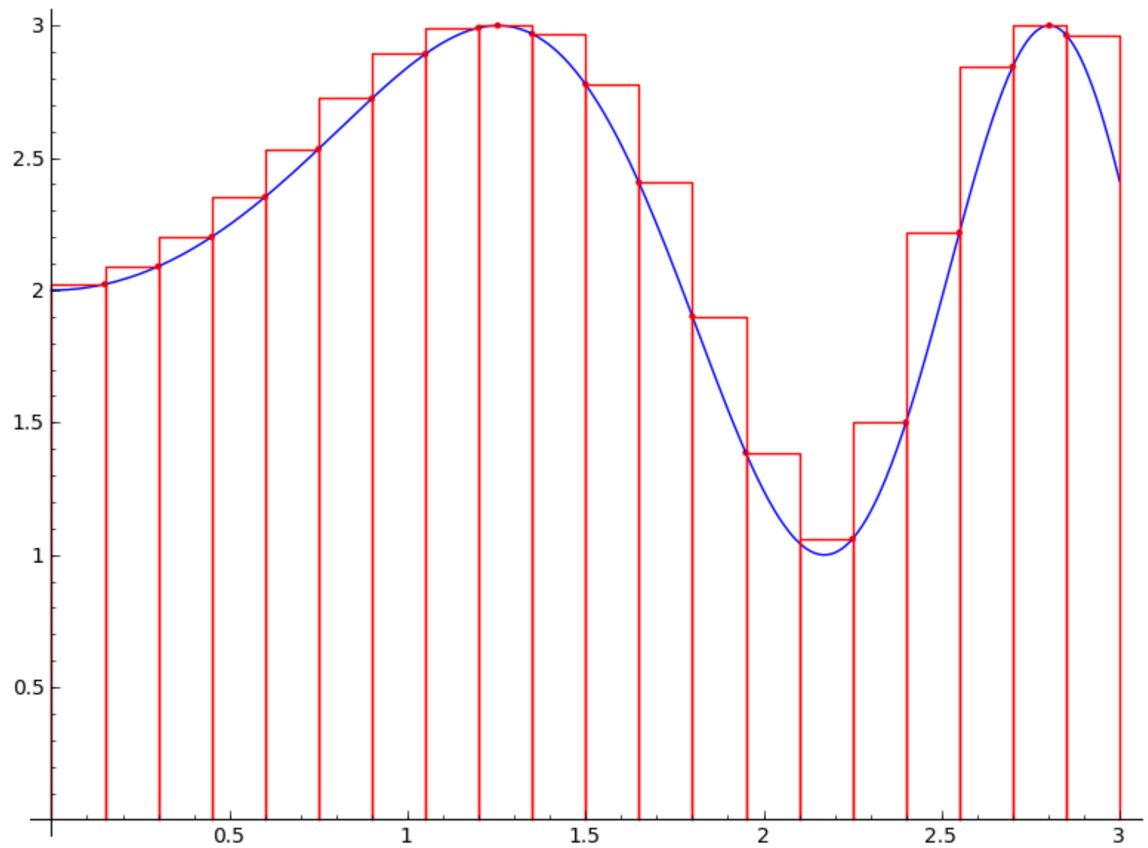
Ideja: podijeliti domenu na dijelove. . .

ili aproksimirati površinu ispod krivulje **opisanim** pravokutnicima



Ideja: podijeliti domenu na dijelove. . .

. . . pa opet ponavljati **sa sve gušćim** razdiobama segmenta



Darbouxove sume

- Zadana je ograničena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i
  R razdioba segmenta $[a,b]$ na n dijelova.
- Za i-ti podsegment $[x_{i-1}, x_i]$ nazovimo

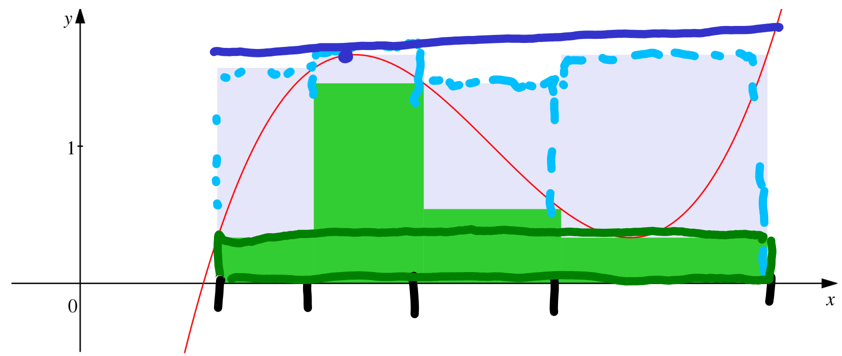
$$\begin{cases} m_i = & \cancel{\sup}\,\inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = & \cancel{\inf}\,\sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ d_i = & x_i - x_{i-1} \end{cases}$$

- donja Darbouxova suma:

$$s(f;R) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \geq (b-a) \inf_{[a,b]} f$$

- gornja Darbouxova suma:

$$S(f;R) = \sum_{i=1}^{n} M_i d_i \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$$



Slika: Donje (zeleno) i gornje (zeleno+plavkasto) Darbouxove sume za razdiobu segmenta na 4 dijela

Profinjenje razdiobe

Definicija

Za danu razdiobu segmenta $[a, b]$ u n dijelova: $x_0, \ldots, x_n$ — njeno profinjenje je svaka razdioba segmenta $[a, b]$ u $m \geq n$ dijelova $y_0, \ldots, y_m$ tako da svaki x_i iz polazne razdiobe nalazi se među y_j profinjenja, tj. granice podsegmenata u profinjenju sadrže sve granice polaznog segmenta.
Profinjujemo razdiobu tako da izsječemo podsegmente u više manjih dijelova ne izuzevši niti jednu postojeću granicu.

Posljedica profinjenja razdiobe na Darbouxove sume

Činjenica

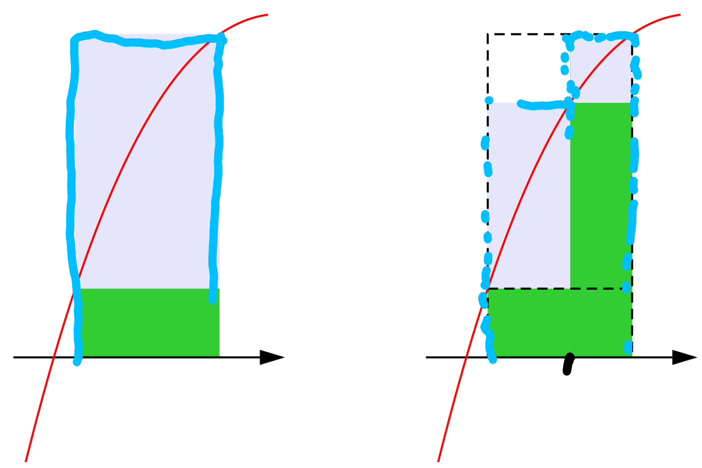
Ako je R' profinjenje razdiobe R tada:

$$s(f; R') \geq s(f; R)$$

$$S(f; R') \leq S(f; R)$$

Bez obzira na razdiobe R_1 i R_2 uvijek vrijedi

$$s(f; R_1) \leq S(f; R_2)$$

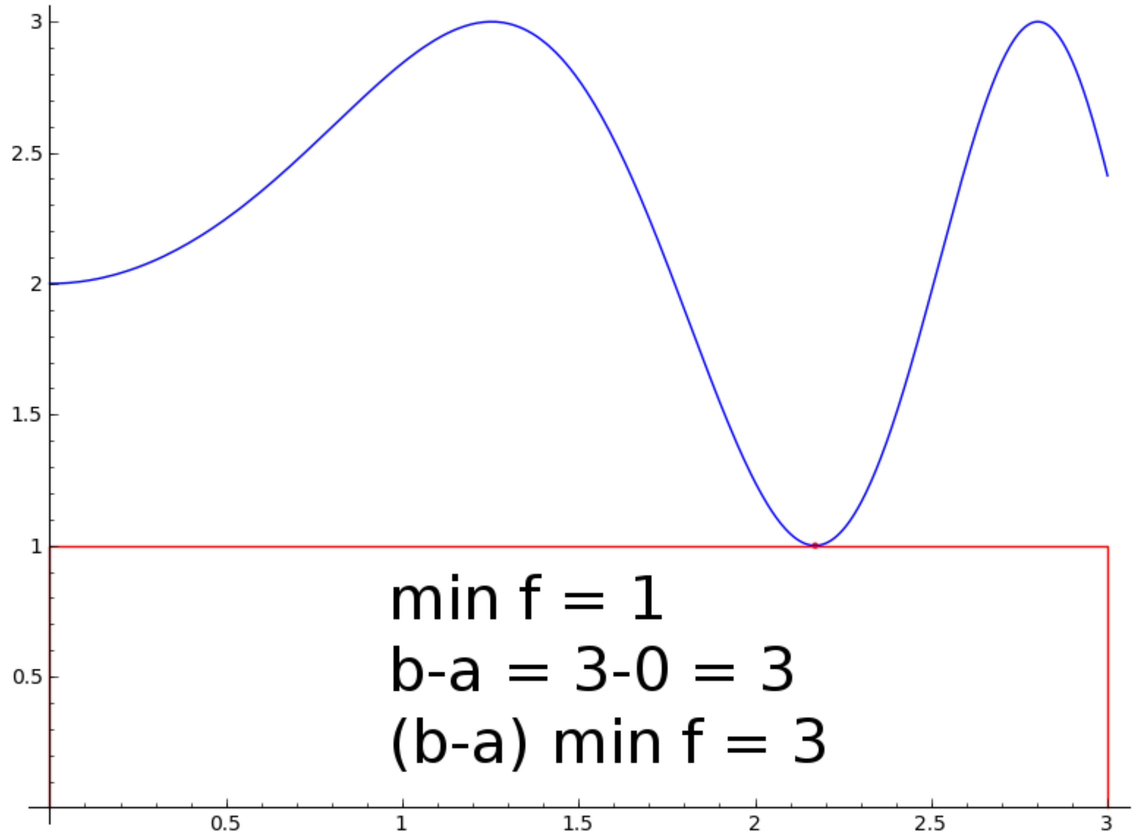


Slika: Nakon profinjenja, donja Darbouxova suma se povećava, a gornja smanjuje.

Sve Darbouxove sume su ograničene

Darbouxova suma funkcije f na $[a,b]$ **ne može biti manja od**

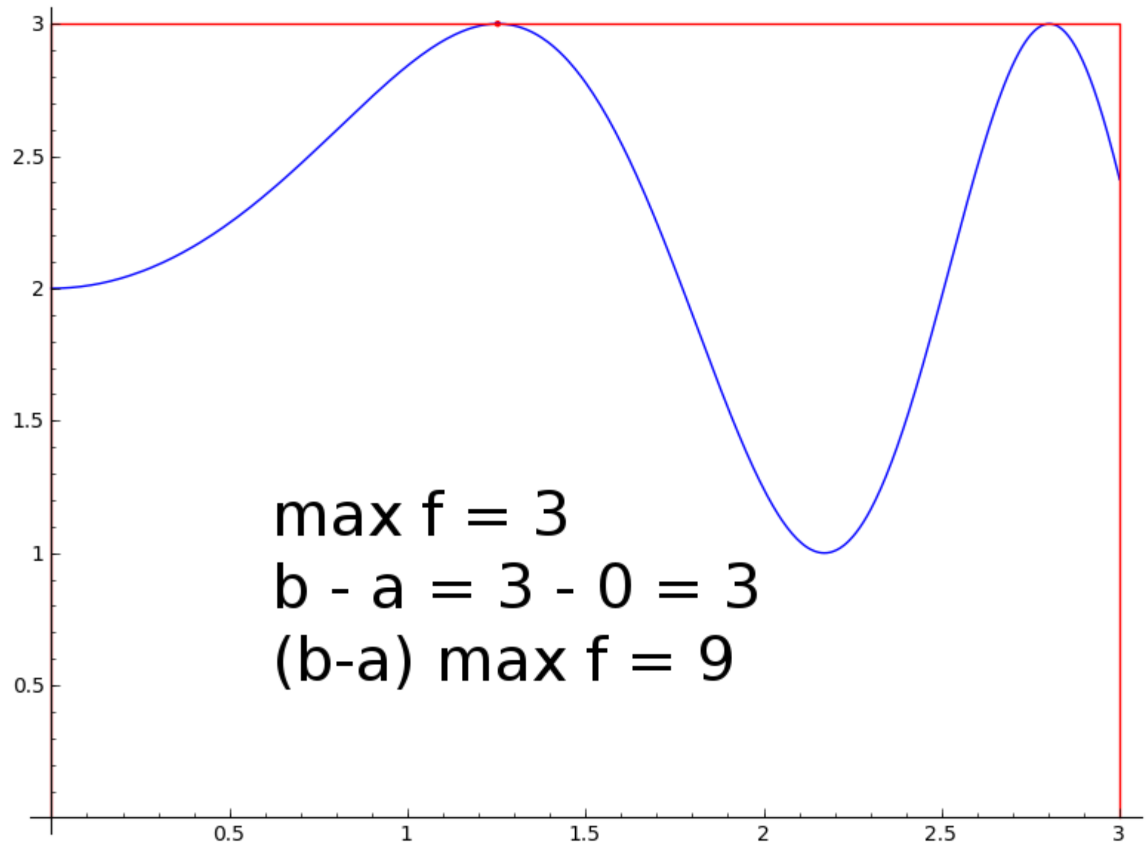
$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le s(f;R) \le S(f;R)$$



Sve Darbouxove sume su ograničene

Darbouxova suma funkcije f na $[a,b]$ **ne može biti veća od**

$$s(f;R) \leq S(f;R) \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$



Određeni integral na segmentu $[a, b]$

pretpostavka: ***f* je ograničena**

posljedice: donje (i gornje) Darbouxove sume su ograničene

Sjeti se: svaki ograničen podskup od $\mathbb{R}$ ima sup i inf!

postoji gornji Darbouxov integral:

$$G_f = \inf\{S(f;R) : R \text{ je razdioba segmenta } [a,b]\}$$

postoji donji Darbouxov integral:

$$D_f = \sup\{s(f;R) : R \text{ je razdioba segmenta } [a,b]\}$$

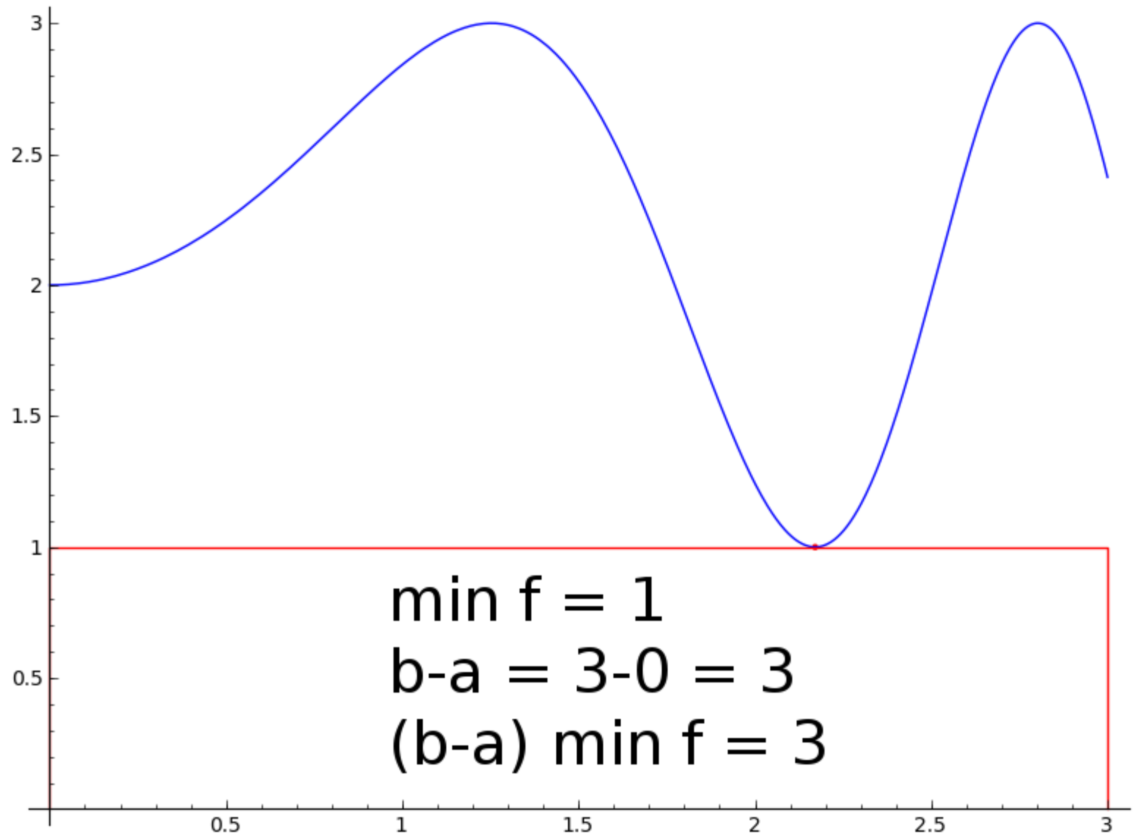
Definicija

Ako je su gornji i donji Darbouxov integral jednaki tada kažemo da je ograničena funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ u Darbouxovom smislu i pišemo $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = G_f = D_f$

Definiramo još: $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Primjer Darbouxovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

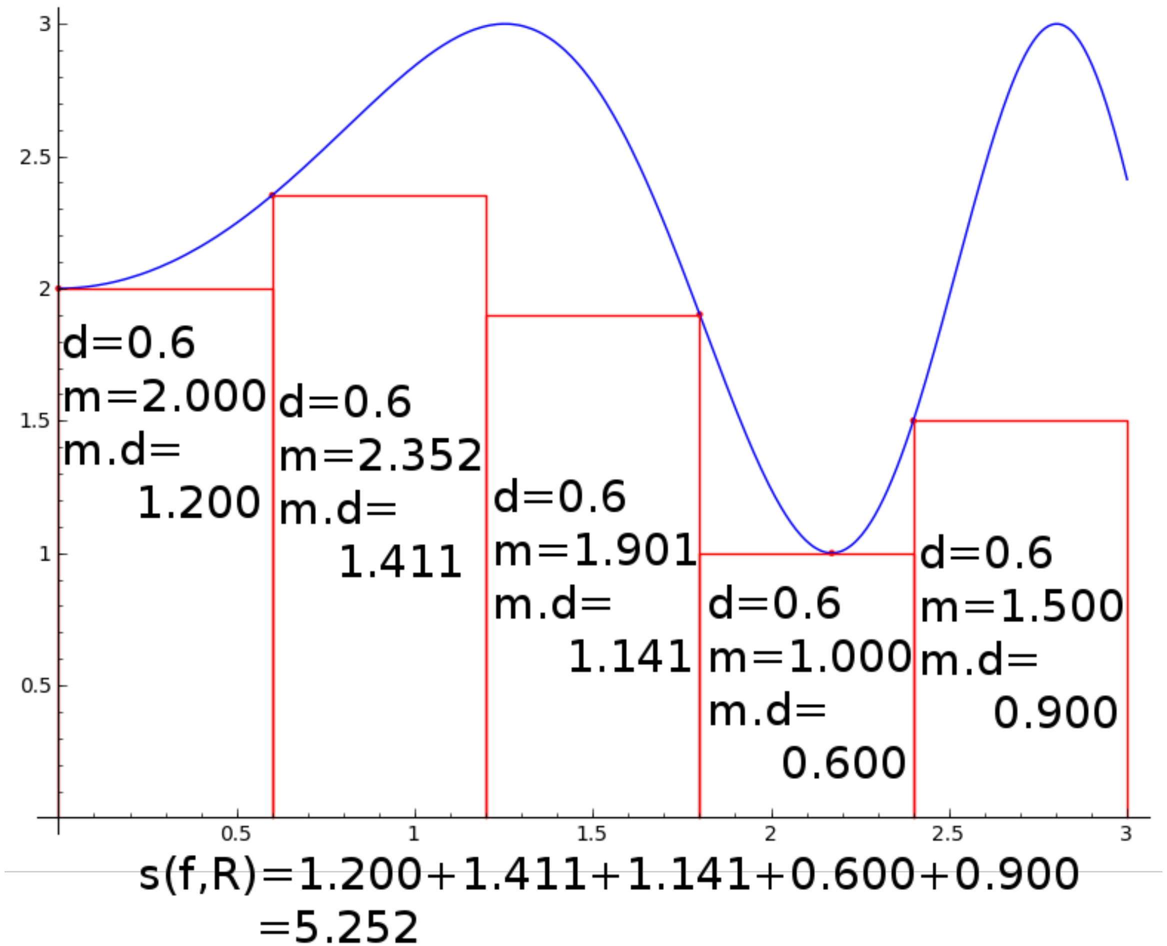
$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le \underset{\longrightarrow}{s(f,R)} \le D_f \le G_f \le \underset{\longleftarrow}{S(f,R)} \le (b-a)\max_{[a,b]} f$$



.

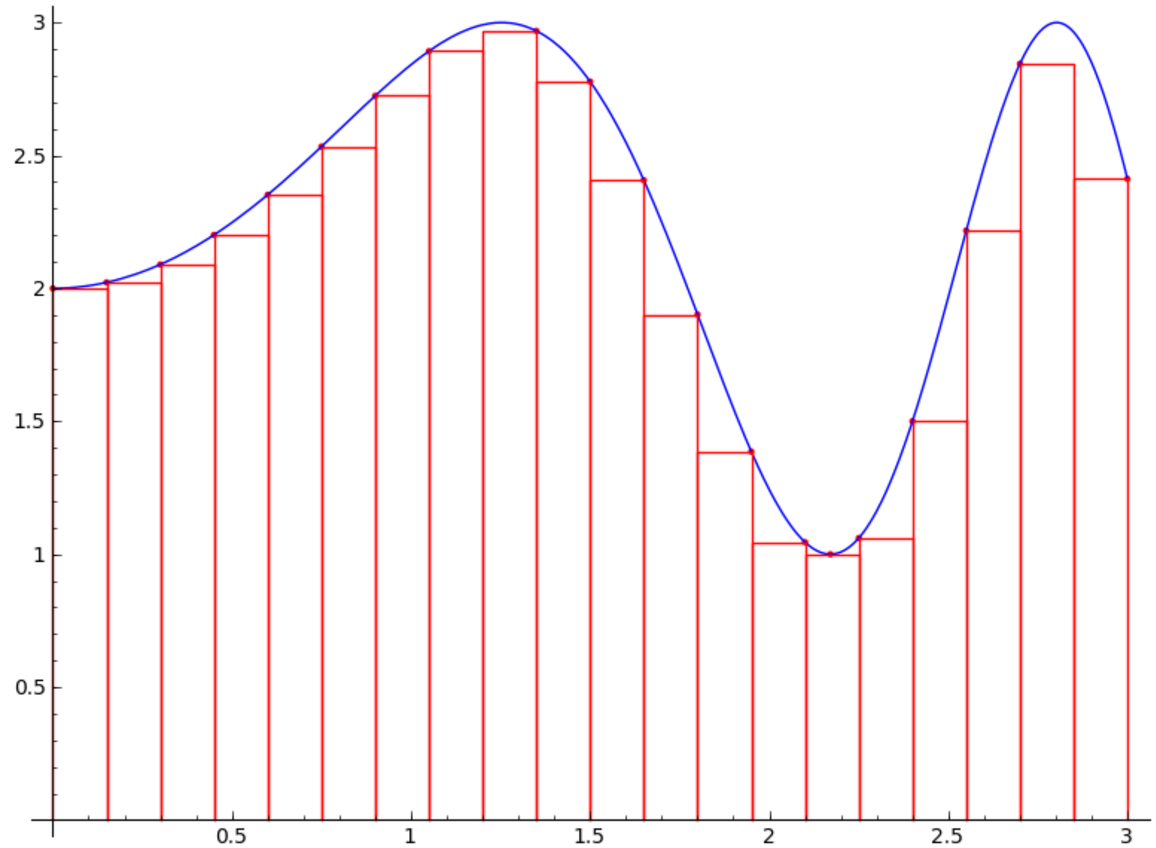
Primjer Darbouxovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq s(f,R) \underset{\longrightarrow}{\leq} D_f \leq G_f \underset{\longleftarrow}{\leq} S(f,R) \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$



Primjer Darbouxovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

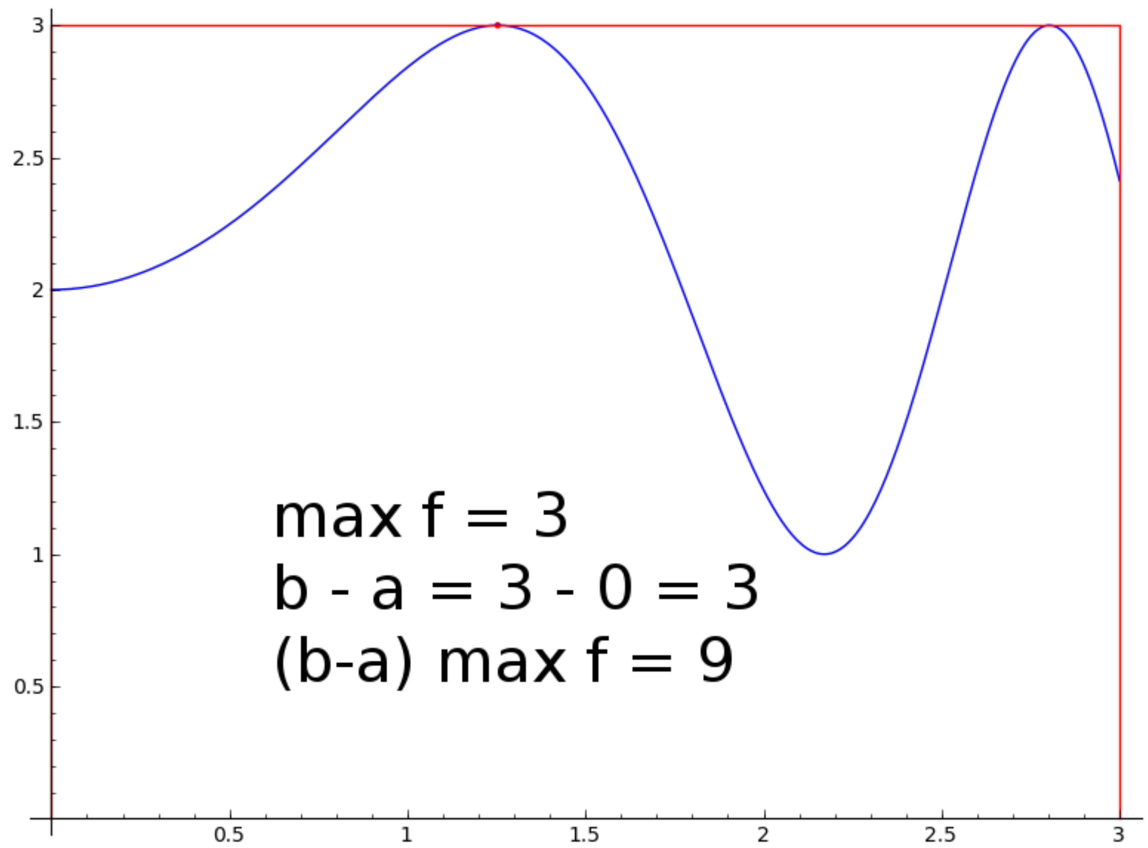
$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le \underset{\longrightarrow}{s(f,R)} \le D_f \le G_f \le \underset{\longleftarrow}{S(f,R)} \le (b-a)\max_{[a,b]} f$$



$$n = 20,\ d_i = 0.15,\ s(f,R) = \sum_{i=1}^{20} m_i d_i = \ldots = 6.351 \to D_f = 6.77$$

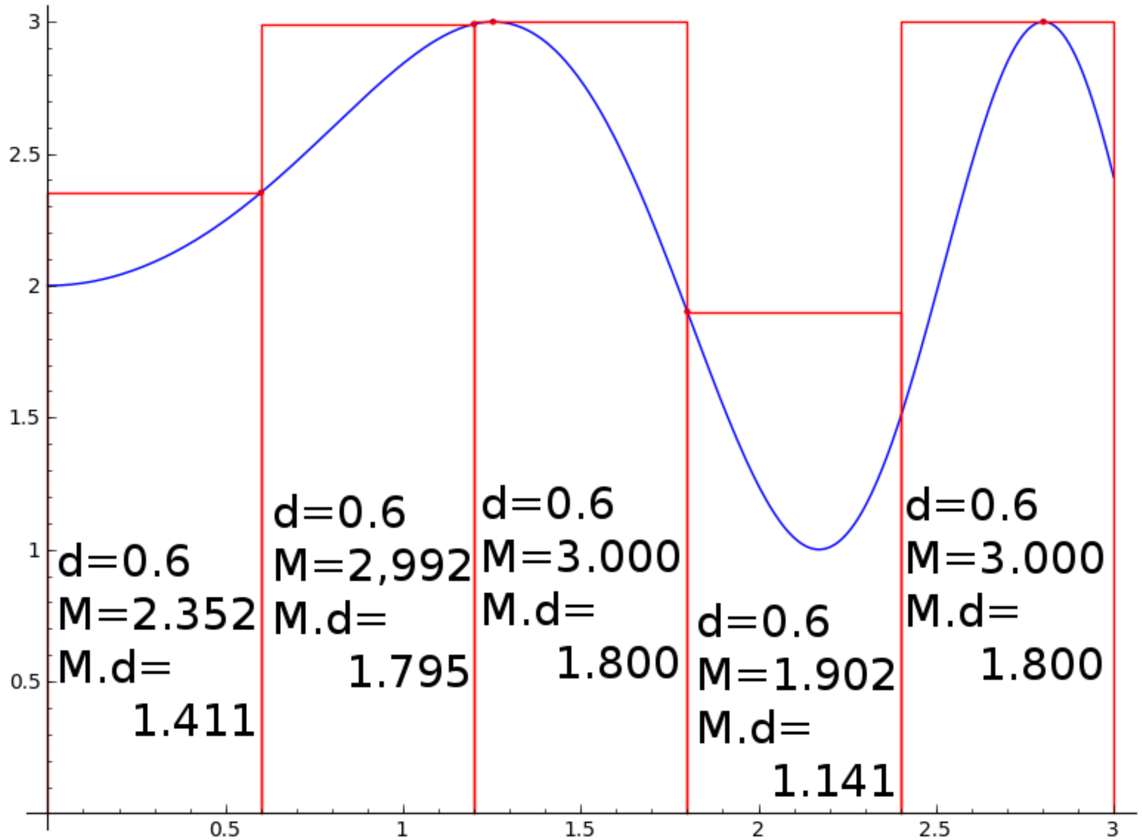
Primjer Darbouxovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \underset{\longrightarrow}{s(f,R)} \leq D_f \leq G_f \leq \underset{\longleftarrow}{S(f,R)} \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$



Primjer Darbouxovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \underset{\longrightarrow}{s(f,R)} \leq D_f \leq G_f \leq \underset{\longleftarrow}{S(f,R)} \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$



$$s(f,R) = 1.411 + 1.795 + 1.800 + 1.141 + 1.800 = 7.947$$

Primjer Darbouxovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

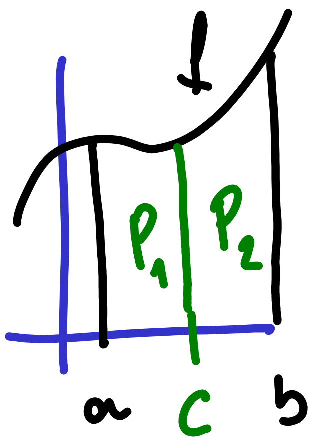
$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le \underset{\longrightarrow}{s(f,R)} \le D_f \le G_f \le \underset{\longleftarrow}{S(f,R)} \le (b-a)\max_{[a,b]} f$$

$$n = 20,\ d_i = 0.15,\ S(f,R) = \sum_{i=1}^{20} M_i d_i = \ldots = 7.175 \to G_f = 6.77$$

Osnovna svojstva određenog integrala

Ako je f integrabilna na $[a, b]$ tada je:

1. f integrabilna na svakom podsegmentu
2. $$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$
3. $$\underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{P} = \underbrace{\int_a^c f(x)\mathrm{d}x}_{P_1} + \underbrace{\int_c^b f(x)\mathrm{d}x}_{P_2} \quad c \in [a, b]$$



Određeni integral u Riemanovom smislu

Definicija

Riemann je uz R razdiobu intervala $[a, b]$ na n-dijelova, postavio još niz ξ sa n brojeva, po jedan u svakom podsegmetnu: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Definirao je Riemannovu integralnu sumu:

$$S_\xi(f; R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, d_i$$

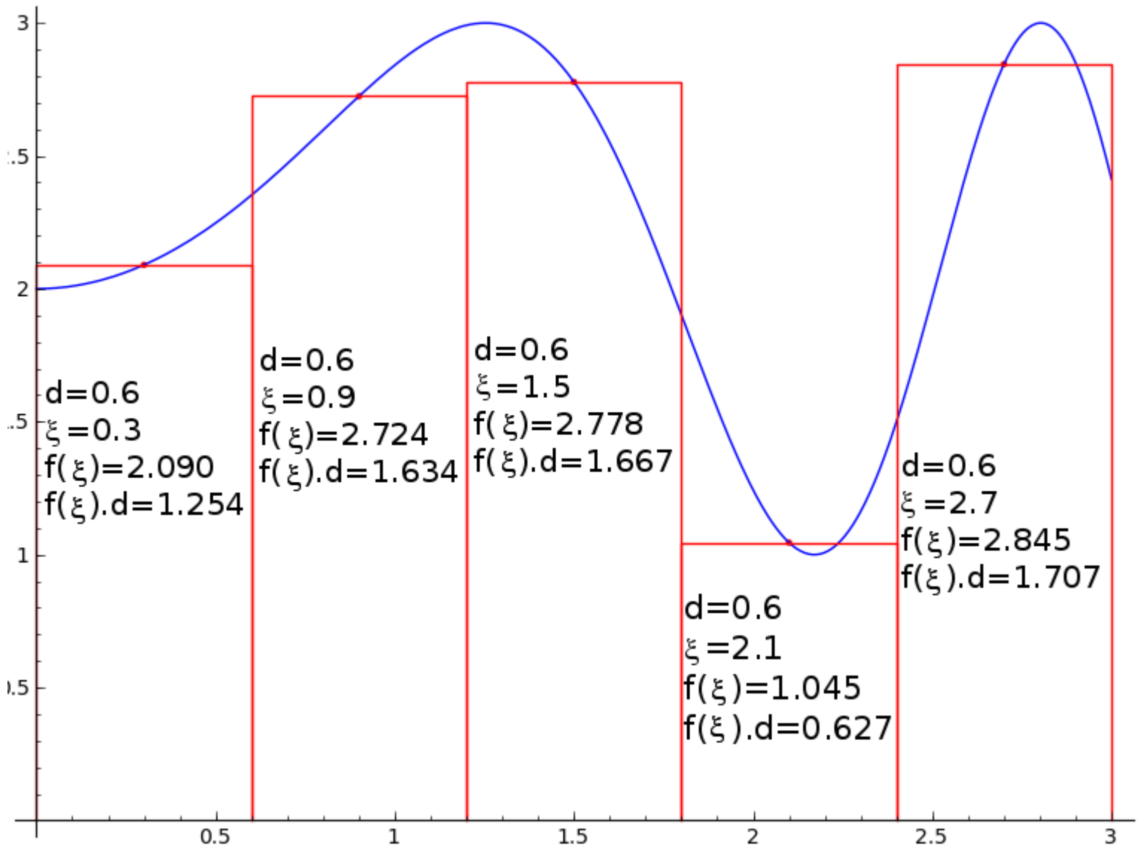
Brojevi $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mogu biti bilo koji, ali moraju biti na neki način određeni. Npr. to mogu biti polovišta podsegmenata ili točke podsegmenta u kojima je funkcija maksimalna.

Pogledajmo primjere. . .

Grafički prikaz Riemannovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

Raspodjela segmenta $[0,3]$ na 5 dijelova, ξ_i na polovici podsegmenata.

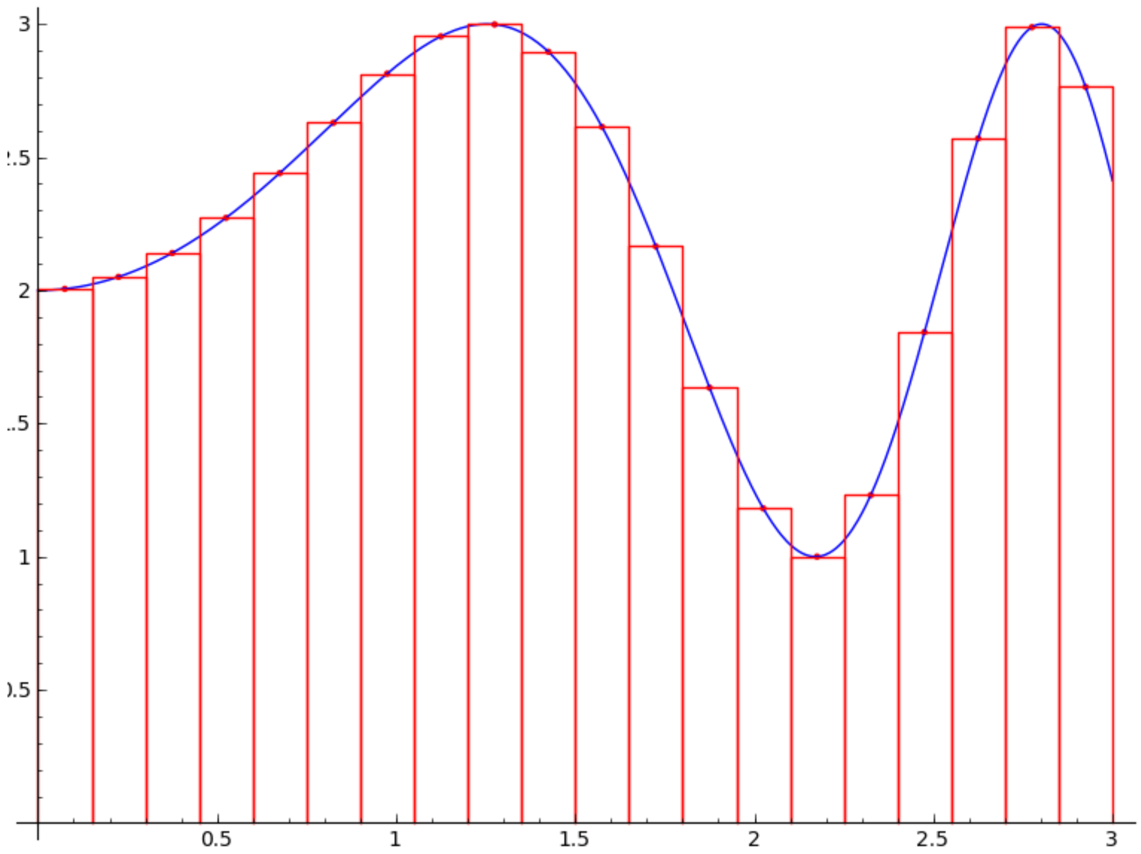
$$S_\xi(f;R) = \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i) \cdot d_i = 1.254 + 1.634 + 1.667 + 0.627 + 1.707 = 6.889$$



Grafički prikaz Riemannovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

Raspodjela segmenta$[0, 3]$ na 20 dijelova, ξ_i na polovici podsegmenata.

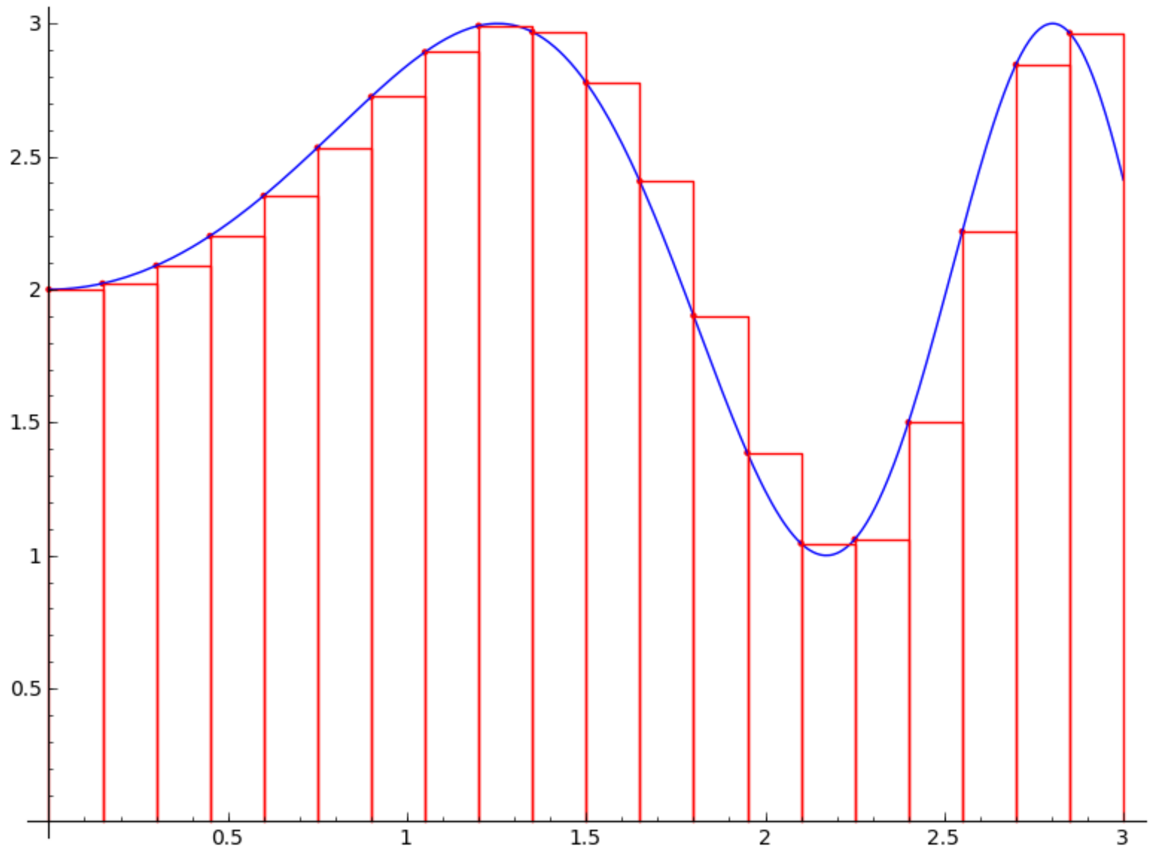
$$S_\xi(f; R) = \sum_{i=1}^{20} f(\xi_i) \cdot d_i = \ldots = 6.779$$



Grafički prikaz Riemannovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

Raspodjela segmenta$[0,3]$ na 20 dijelova, ξ_i u lijevom kraju podsegmenata.

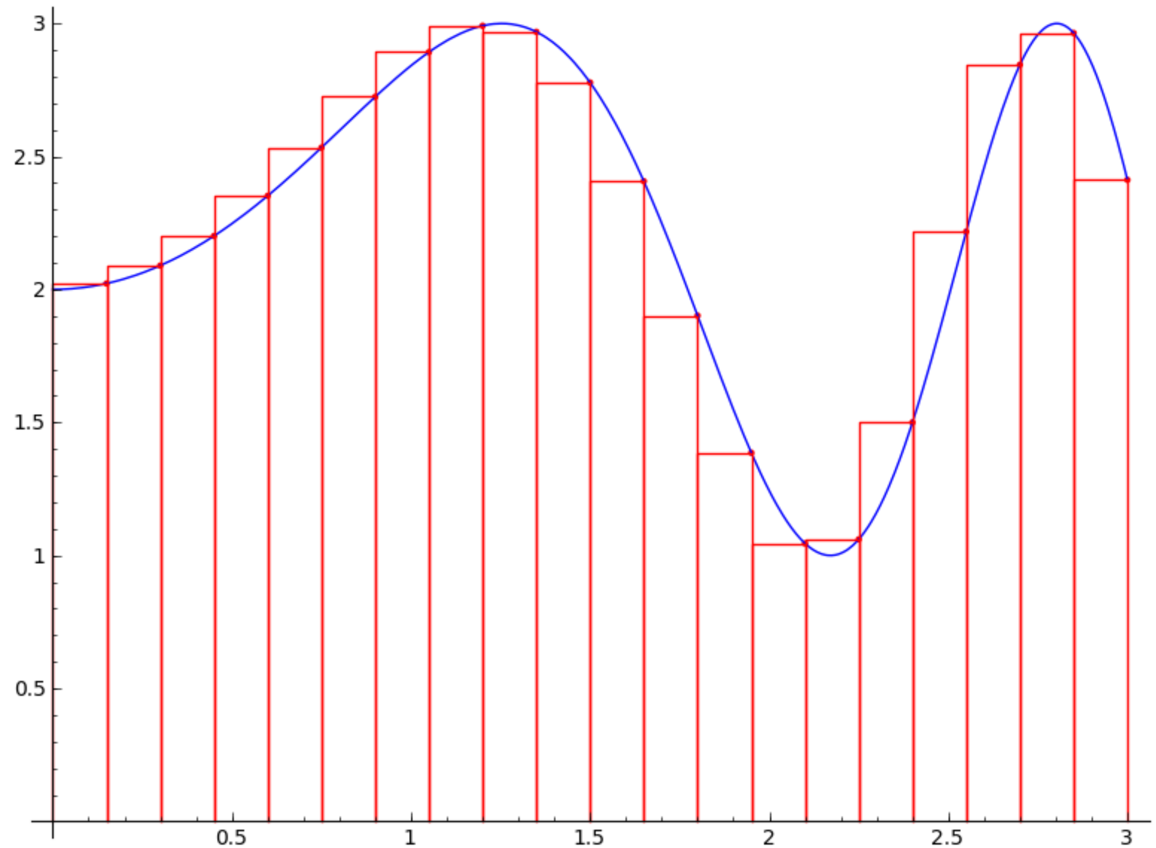
$$S_\xi(f;R) = \sum_{i=1}^{20} f(\xi_i) \cdot d_i = \ldots = 6.732$$



Grafički prikaz Riemannovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

Raspodjela segmenta$[0, 3]$ na 20 dijelova, ξ_i u desnom kraju podsegmenata.

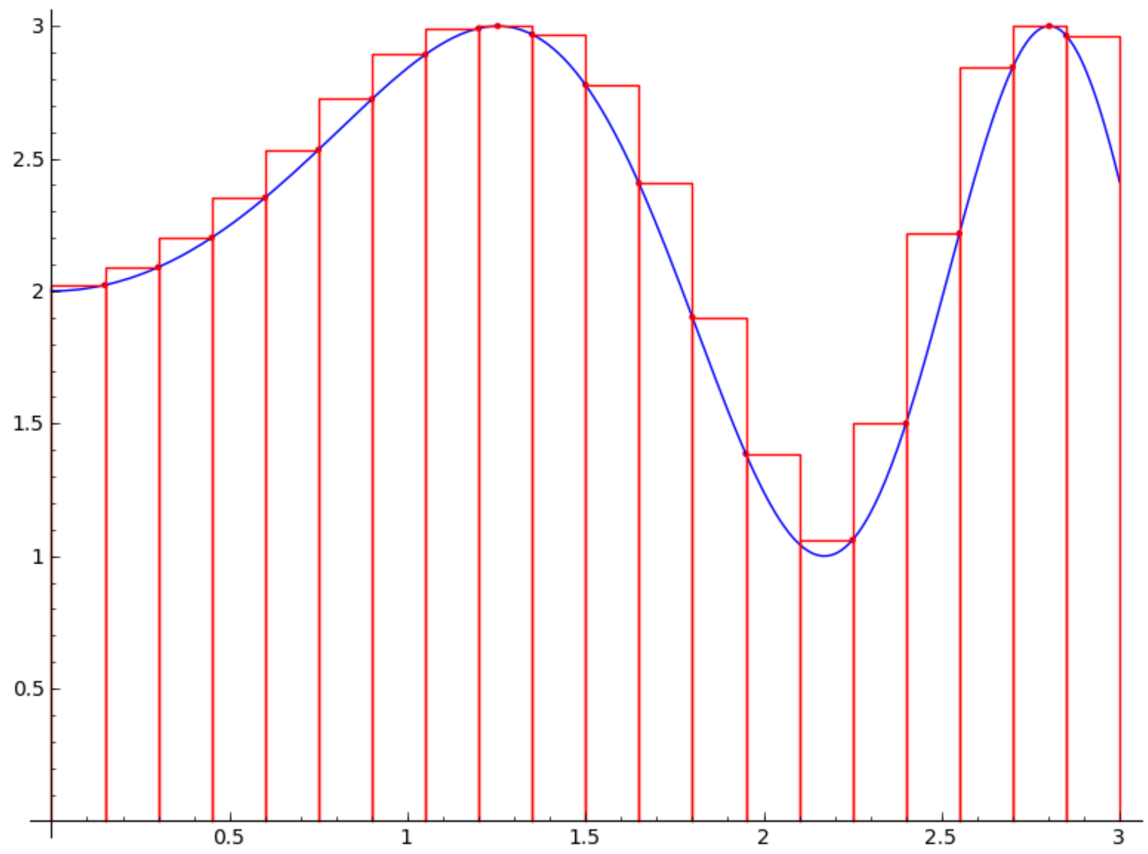
$$S_\xi(f; R) = \sum_{i=1}^{20} f(\xi_i) \cdot d_i = \ldots = 6.795$$



Grafički prikaz Riemannovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

Raspodjela segmenta $[0,3]$ na 20 dijelova, ξ_i gdje je maksimalna vrijednost (gornja Darboux suma).

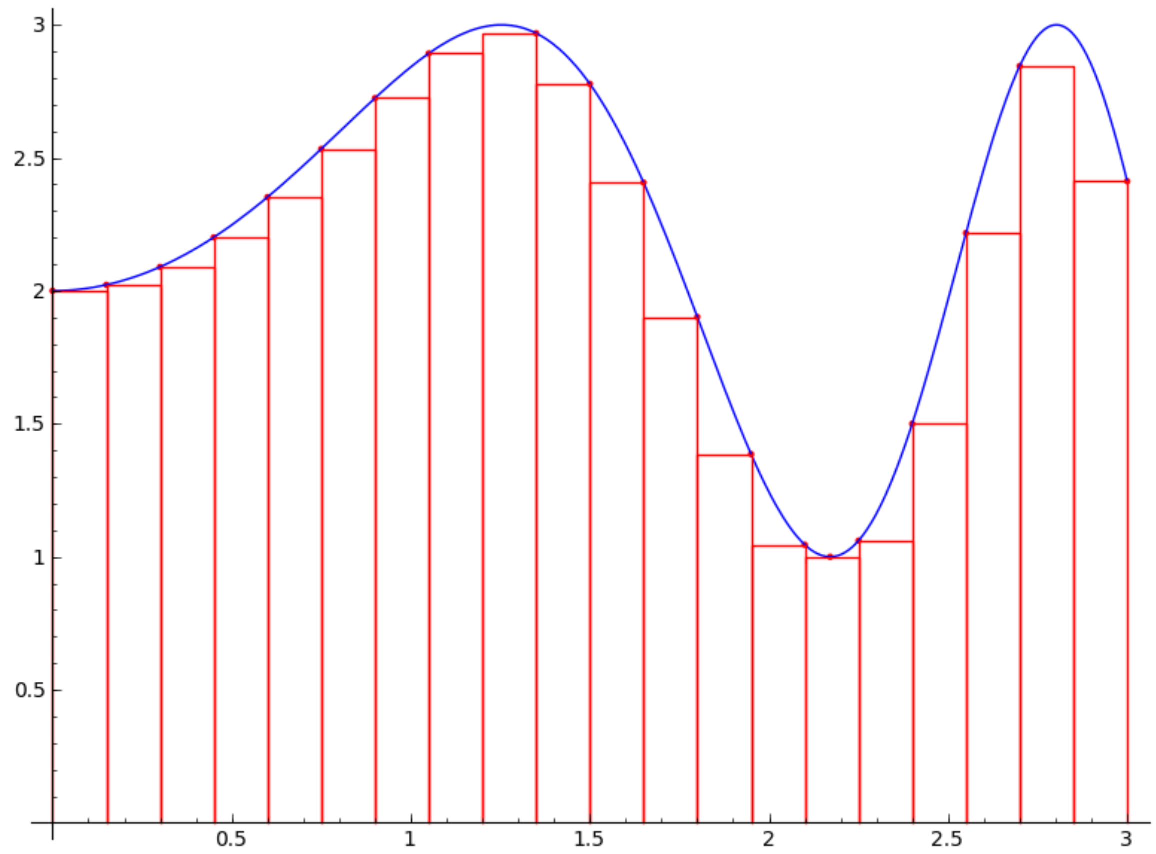
$$S_\xi(f;R) = \sum_{i=1}^{20} f(\xi_i) \cdot d_i = \sum_{i=1}^{20} M_i \cdot d_i = \ldots = 7.175$$



Grafički prikaz Riemannovih suma, $f(x) = \sin\left(x^2\right) + 2$

Raspodjela segmenta $[0,3]$ na 20 dijelova, ξ_i gdje je minimalna vrijednost (donja Darboux suma).

$$S_\xi(f;R) = \sum_{i=1}^{20} f(\xi_i)\cdot d_i = \sum_{i=1}^{20} m_i \cdot d_i = \ldots = 6.351$$



Određeni integral u Riemanovom smislu

Definicija

Riemann je promatrao osim R razdiobe intervala $[a, b]$ na n-dijelova, još niz ξ sa n brojeva, po jedan u svakom podsegmetnu: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Definirao je Riemannovu integralnu sumu:

$$S_\xi(f; R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, d_i$$

i ako profinjenjem razdiobe $S_\xi(f; R)$ konvergira bez obzira na ξ

tada je f integrabilna, a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ upravo ta granična vrijednost.

Određeni integral u smislu Darbouxa i Riemanna se ne razlikuju.

Dokaz.

Konvergencija Riemannovih suma i mogućnost da biramo za ξ točke postizanja min ili max na podsegmetnima impliciraju konvergenciju Darbouxovih suma.

Ako Darbouxove sume konvergiraju zbog

$$s(f;R) \leq S_\xi(f;R) \leq S(f;R)$$

primjenom teorema o sendviču moraju konvergirati i Riemannove sume. $\square$

Određeni integral u smislu Darbouxa i Riemanna se ne razlikuju.

Dokaz.

Konvergencija Riemannovih suma i mogućnost da biramo za ξ točke postizanja min ili max na podsegmetnima impliciraju konvergenciju Darbouxovih suma.

Ako Darbouxove sume konvergiraju zbog

$$s(f; R) \leq S_\xi(f; R) \leq S(f; R)$$

primjenom teorema o sendviču moraju konvergirati i Riemannove sume. $\square$

Drugačije definicije određenog integrala

Određeni integral može se definirati i na druge načine: u smislu Lebeguea, Daniella, Haara, itd. Ove i druge definicije kvalitativno se razlikuju.

Zaključak

Ako je f integrabilna:

- sve vrste Riemannovih suma su valjane aproksimacije za $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- kada profinjujemo razdiobe segmenata Riemannove sume približavaju se vrijednosti $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- Darbouxove sume su specijalni oblik Riemannovih suma gdje su točke ξ_i uzete tamo gdje f poprima min ili max na podsegmentu

Ispitna pitanja

Definicija određenog integrala na segmentu

- Darbouxove sume,
- gornji i donji Darbouxov integral,
- što određeni integral dogovorno predstavlja?

Koje funkcije su integrabilne?

- Sada znamo što je određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ u Riemannovom smislu:
  - f ograničena
  - gornji i donji Darbouxov integral moraju biti jednaki
  - taj broj dogovorno određuje površinu ispod grafa funkcije
- Ostaje prvotno pitanje:
  - koje funkcije su integrabilne u smislu Riemanna?
  - kada se može na ovaj način izračunati površina?
  - definicija nije pogodna za računanje
  - kako efektivno izračunati određeni integral?
- Na ova pitanja odgovara tzv. Osnovni teorem integralnog računa (Newton-Leibnitz)

Osnovni teorem integralnog računa (Newton-Leibnitz)

Ako je <u>**zadana neprekidna funkcija**</u> f na segmentu $[a,b]$ tada:

1. f je integrabilna,
2. postoji neki $c \in [a,b]$ tako da

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

3. postoji neprekidno derivabilna funkcija na $[a,b]$ zadana sa

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

4. F je primitivna funkcija od f, odnosno $F'(x) = f(x)$,
5. za svaku G primitivnu funkciju od f vrijedi

$$P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

f neprekidna na $[a,b] \Rightarrow f$ integrabilna

Dokaz.

Neprekidnost $\Rightarrow$ ograničenost $\Rightarrow$ za svaku razdiobu R vrijedi

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le s(f,R) \le D_f \le G_f \le S(f,R) \le (b-a)\max_{[a,b]} f$$

Za razdiobu R na n jednakih podsegmenata duljine $d = \frac{b-a}{n}$

$\sum M_i d_i - \sum m_i d_i$

$$G_f - D_f \le S(f,R) - s(f,R) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\, d_i \le (b-a)\max_{i=1}^{n}(M_i - m_i)$$

Za $n \to \infty$, $d \to 0$.

$M_i - m_i \le \max M_i - m_i$

$\square$

f neprekidna na $[a, b] \Rightarrow f$ integrabilna

Dokaz.

Neprekidnost $\Rightarrow$ ograničenost $\Rightarrow$ za svaku razdiobu R vrijedi

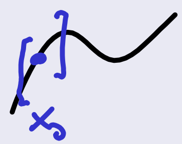
$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq s(f,R) \leq D_f \leq G_f \leq S(f,R) \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$

Za razdiobu R na n jednakih podsegmenata duljine $d = \frac{b-a}{n}$

$$0 \leq G_f - D_f \leq S(f,R) - s(f,R) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\, d_i \leq (b-a) \underbrace{\max_{i=1}^{n} (M_i - m_i)}_{=0}$$

Za $n \to \infty$, $d \to 0$. Tada bi $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ d \to 0}} \max_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \neq 0$ upućivalo

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



na skok (prekid) što ne može biti zbog neprekidnosti funkcije f. □

f neprekidna na $[a,b] \Rightarrow f$ integrabilna

Dokaz.

Neprekidnost $\Rightarrow$ ograničenost $\Rightarrow$ za svaku razdiobu R vrijedi

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq s(f,R) \leq D_f \leq G_f \leq S(f,R) \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$

Za razdiobu R na n jednakih podsegmenata duljine $d = \frac{b-a}{n}$

$$G_f - D_f \leq S(f,R) - s(f,R) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\, d_i \leq (b-a)\max_{i=1}^{n} (M_i - m_i)$$

Za $n \to \infty$, $d \to 0$. Preostaje zaključiti $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ d \to 0}} \max_{i=1}^{n} (M_i - m_i) = 0$

pa je $\boxed{G_f - D_f = 0,}$ odnosno f integrabilna. $\square$

f neprekidna $\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ takav da $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Proof.

f je neprekidna na $[a,b]$ pa smo vidjeli da je

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\max_{[a,b]} f$$

odnosno

$$\min_{[a,b]} f \le \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \le \max_{[a,b]} f$$

Neprekidna funkcija poprima sve vrijednosti između min i max pa tako mora za neki $c \in [a,b]$ poprimiti

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\square$

f neprekidna na $[a,b] \Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ je derivabilna i $F'=f$

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt$$

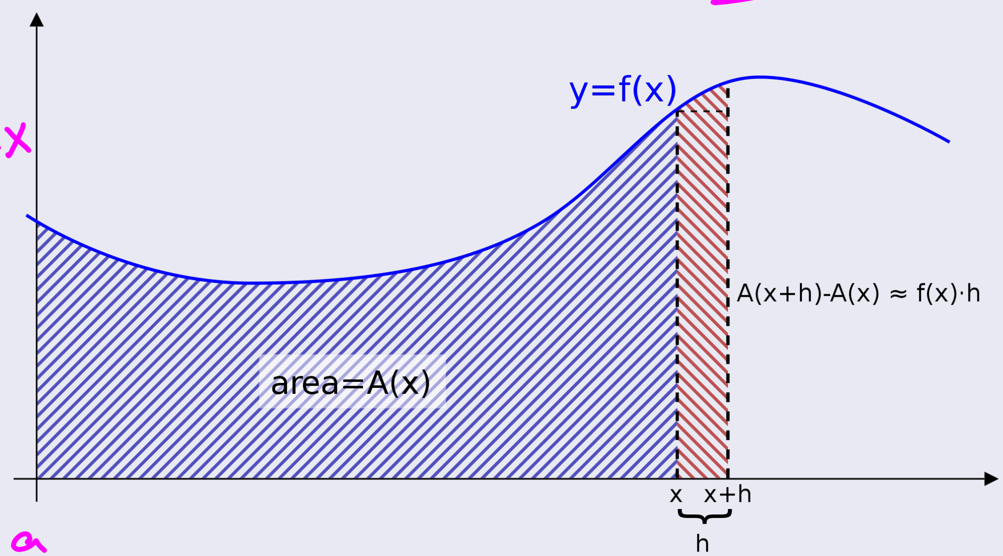
Dokaz.

Očito f neprekidna na $[x_1,x_2]$ za $a\le x_1\le x_2\le b$ pa po dokazanom gornja $F(x)$ je dobro definirana. Dalje,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \qquad \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{(x+h)-x}\int_x^{x+h} f(t)dt \overset{\exists c\in[x,x+h]}{=} f(c)$$

?

$$f(c)=\frac{1}{x+h-x}\int_x^{x+h} f(x)dx$$



f neprekidna na $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ je derivabilna i $F' = f$

Dokaz.

Očito f neprekidna na $[x_1, x_2]$ za $a \le x_1 \le x_2 \le b$ pa po dokazanom gornja $F(x)$ je dobro definirana. Dalje,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{(x+h)-x} \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \overset{\exists c \in [x, x+h]}{=} \lim_{c \to x} f(c)$$

Limes kad $h \to 0$ lijeve strane postoji zbog neprekidnosti desne strane, tako da je

$$F'(x) = f(x)$$

Drugim riječima: F je primitivna za f.
Također, vidimo da F ima neprekidnu derivaciju. $\square$

G primitivna od neprekidne $f \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$

Dokaz.

Kako je f neprekidna na $[a, b]$ po ranije izrečenom ima primitivnu funkciju $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Obzirom da je

$F(a) = \int_a^a f(t)dt$

$$F(a) = 0 \text{ i } F(b) = \underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

i ako je G neka druga primitivna funkcija od f to je razlika do F konstanta

$$G(x) = F(x) + C$$

$G(b) = F(b) + c$

$G(a) = F(a) + c$

slijedi kako se i tvrdi

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (\underbrace{F(a)}_{=0} + C) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Važnost Newton-Leibnitzove formule

Newton-Leibnitzovom formulom naziva se jednakost

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{oznaka } [F(x)]_{x=a}^{x=b}} = F(x)\Big|_a^b$$

koja vrijedi kada je f integrabilna na $[a, b]$ za svaku F primitivnu funkciju od f.

Kako računati određeni integral?

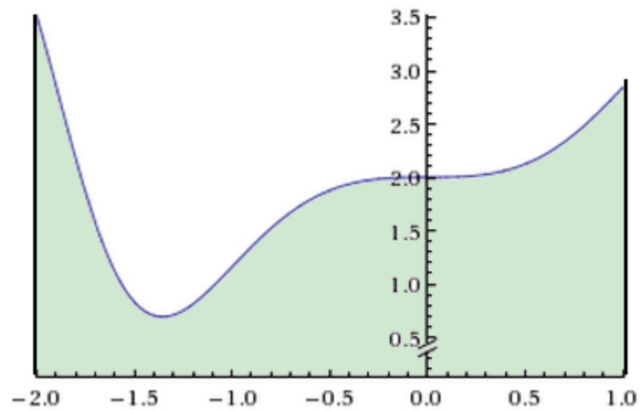
Određeni integral računa se tako da se prvo izračuna neodređeni integral koji nalazi primitivne funkcije, a zatim za jednu nađenu primitivnu funkciju izračuna razliku vrijednosti na početku i kraju segmenta.

Primjer: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

- Površina je po definiciji

$$\int_{-1}^{2} x\sin\left(x^2\right) + 2\,\mathrm{d}x$$

- $$\int x\sin\left(x^2\right) + 2\,\mathrm{d}x = \underbrace{2x - \frac{\cos\left(x^2\right)}{2}}_{=F(x)} + C$$



Slika: Površina ispod $f(x) = x\sin(x^2) + 2$ između -2 i 1.

- Površina je $F(1) - F(-2) = 5.40303$

Ispitna pitanja

Diskutirati osnovni teorem integralnog računa

- na koja pitanja želi odgovoriti
- pretpostavka teorema
- zaključci
- Newton-Leibnitzova formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \;!!!$$

neka primitivna od f

$$F' = f$$

$$F = \int f(x)\,dx + c$$