Matematika II

Predavanje 2

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

13. ožujak 2013.

Sadržaj predavanja

Skalarna funkcija ima nekoliko argumenata, a rezultat je broj

Primjer

Najjednostavniji primjer:

- $f(x,y) = x + y$
  - 2 argumenta
  - domena je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - rezultat je neki broj (skalar)

Definicija

- $f : X \to \mathbb{R}$ gdje je $X \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{=\mathbb{R}^m}$,

Svaku funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, nazivamo **realnom funkcijom od m realnih varijabla** (ili, kraće, **skalarnom funkcijom**).

- globalna svojstva: ograničenost i ekstremi

Reći ćemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^m$, **omeđena** ako postoji broj $M \in \mathbb{R}^+$ takav da je $|f(x)| \leq M$ za svaki $x \in X$. Primi-

Primjeri analitički zadanih skalarnih funkcija

Još neki primjeri:

- Kada ih je mnogo može ponestati slova za oznake varijabli...
  - x, y, z, ???
  - umjesto toga varijable: x_1, x_2, x_3, x_4, ... ili
  - x^1, x^2, x^3, x^4, ... (!ne brkati sa potencijama!)
  - kodiranje svih varijabli samo jednim slovom: npr. $x = (x^1, x^2)$
- Zbrajanje 4 broja: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
  - 4 argumenta
  - domena je $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - rezultat je neki broj (skalar)
  - slično možemo konstruirati funkciju (zbrajanje) sa proizvoljnim brojem argumenata
- Množenje: $f(x, y) = x \cdot y$
  - 2 argumenta, domena je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Dijeljenje: $f(x, y) = \frac{x}{y}$
  - 2 argumenta
  - domena je $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Kako odrediti domenu skalarne funkcije?

- analitičko zadavanje realne funkcije znači da je zadano pravilo, kodomena je $\mathbb{R}$, a domena se odgonetava...
- primjer iz udžbenika:

Za analitičko zadavanje vrijedi ista napomena o definicijskom području kao i za funkciju jedne varijable. Naime, ako dani analitički zapis (formula) određuje funkcijsko pravilo f, onda se definicijskim područjem smatra skup X svih onih $x \in \mathbb{R}^m$ kojima to pravilo pridjeljuje jedinstvene realne brojeve $f(x) \in \mathbb{R}$.

Primjer 5.1.1 (a) Formula $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definira funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = z$. Naime, $\underbrace{x^2 + y^2 \geq 0}$ za svaki par $x, y \in \mathbb{R}$ pa drugi korijen određu $f(x, y)$ na cijelom $\mathbb{R}^2$;

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\text{UVIJEK VRIJEDI}}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Tablično zadavanje: pregledno samo kod dvije varijable

Ako je funkcija zadana na konačnom i ne prevelikom skupu može se zadati tablično.

čitati: tau a jest te), a ako je neistinit pisat ćemo $\tau A = \perp$ (i čitati: tau a nije te).

1.1.2 Operiranje sudovima

(i) **Konjunkcija.** Neka su A i B sudovi. Novi sud u oznaci $A \wedge B$ (čitamo: a i be) definiramo ovako: $\tau(A \wedge B) = \top$ točno onda kad je $\tau A = \top$ i $\tau B = \top$. Znakom $\wedge$ (čitamo: i) označenu logičku operaciju nazivamo **konjunkcijom**. Zgodno je pripadnu istinosnu vrijednost pregledno prikazati tzv. **tablicom istinosne vrijednosti.**

$\mathcal{D}_\wedge = \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}$

$\tau(A \wedge B)$:

B

A

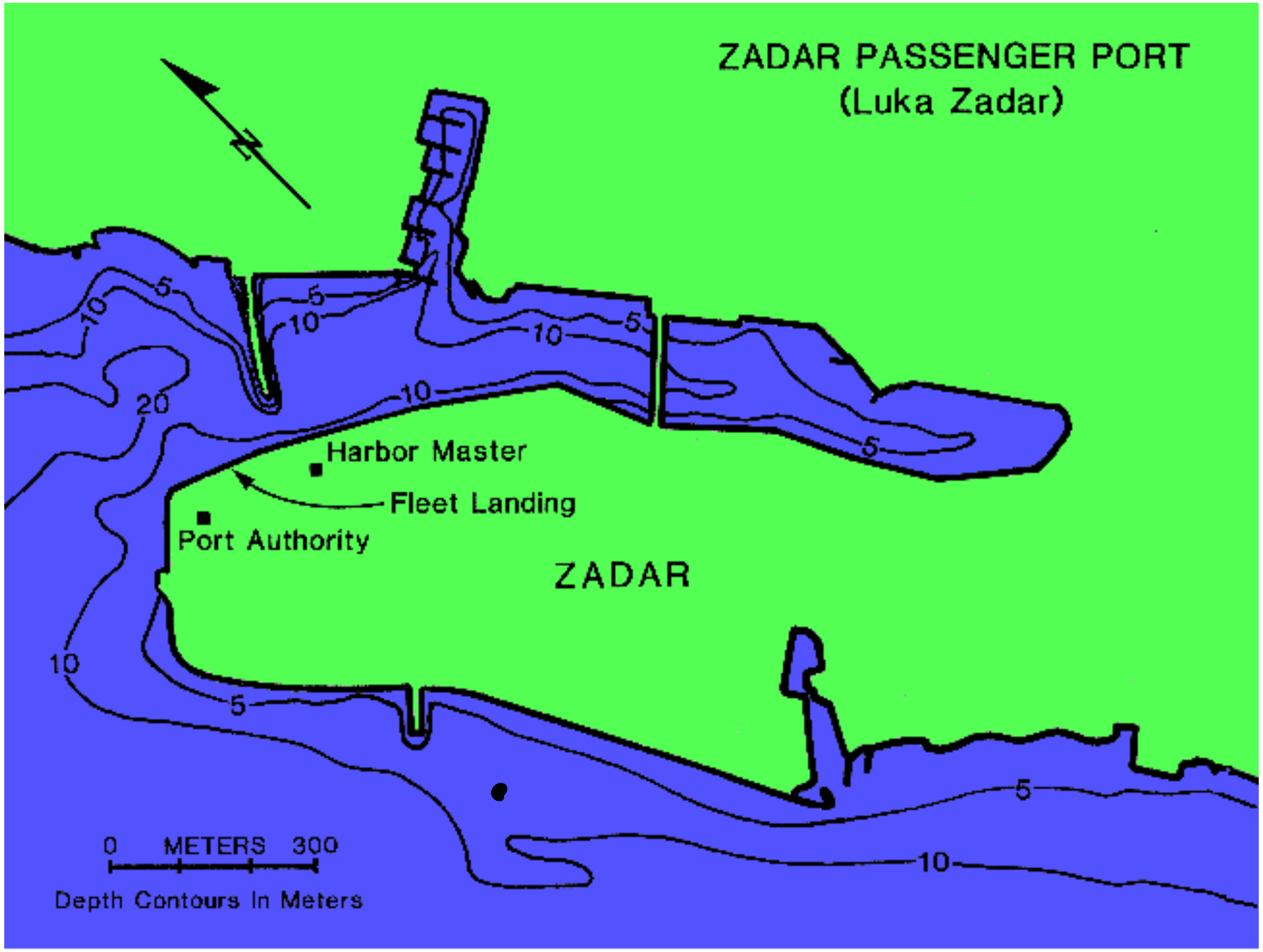
$A \diagdown B$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Tablično zadavanje udaljenosti između važnijih svjetskih luka

Atlantic Ocean Distances - Montreal, Canada to the Panama Canal
(nautical miles)

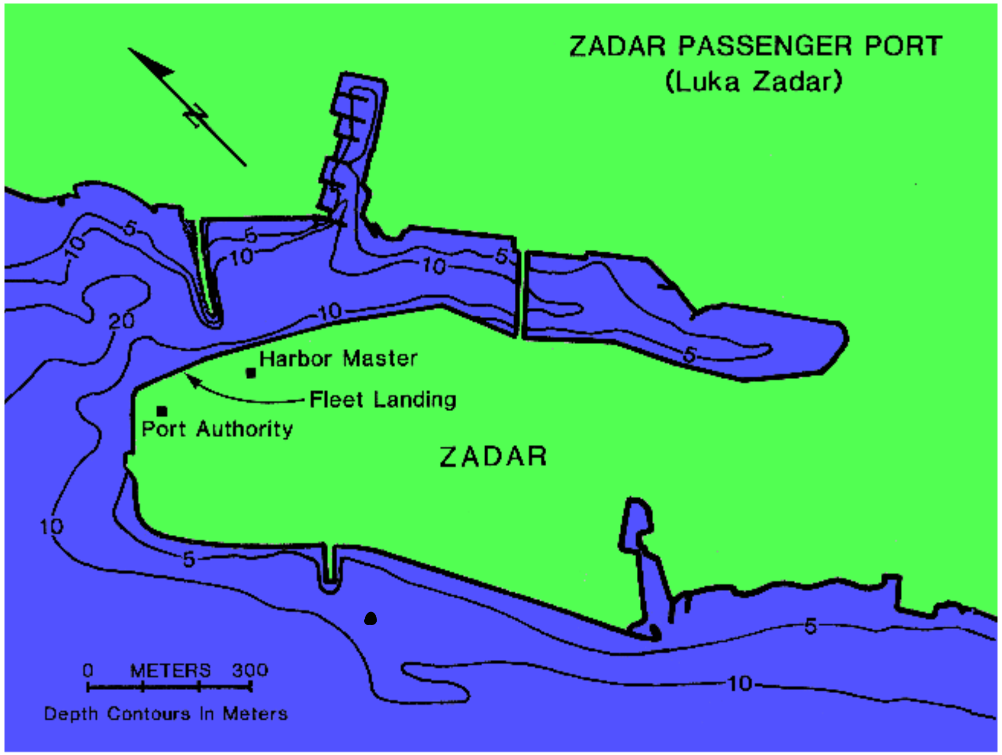
	Panama Canal (Pacific)	Panama Canal (Atlantic)	Yucatan Channel	San Juan, PR	Corpus Christi, TX	Galveston, TX	Port Arthur, TX	New Orleans, LA (via SW Pass)	Mobile, AL	Pensacola, FL	Tampa, FL	Straits of Florida	Key West, FL	Jacksonville, FL	Savannah, GA	Charleston, SC	Wilmington, NC	Diamond Shoals	Norfolk, VA	Chesapeake Bay (entrance)	Baltimore, MD	Philadelphia, PA
Montreal, Quebec* (St. Lambert Lock)	3249	3203	2730	2445	3347	3242	3240	3080	3011	2977	2772	2540	2479	2172	2088	2014	1948	1729	1716	1689	1838	1682
Cabot Strait 45°07.0'N., 60°17.0'W.	2568	2522	2049	1764	2666	2561	2559	2399	2330	2296	2091	1859	1798	1491	1407	1333	1267	1048	1035	1008	1157	1001
Gut of Canso (Lock) 45°39.0'N., 61°25.0'W.	2465	2419	1937	1669	2558	2453	2451	2291	2222	2188	1983	1751	1690	1379	1295	1221	1155	936	923	896	1046	890
Portland, ME 43°39.4'N., 70°14.7'W.	2235	2189	1629	1531	2255	2150	2148	1988	1919	1885	1680	1448	1387	1071	987	913	847	628	611	584	734	575
Boston, MA 42°22.0'N., 71°03.0'W.	2195	2149	1589	1486	2215	2110	2108	1948	1879	1845	1640	1408	1347	1031	947	873	807	588	571	544	694	535
Nantucket Shoals 40°30.0'N., 69°25.0'W.	2032	1986	1426	1334	2052	1947	1945	1785	1716	1682	1477	1245	1184	868	784	710	644	425	408	381	531	372
New York, NY 40°42.0'N., 74°01.0'W.	2018	1972	1346	1399	1977	1872	1870	1710	1641	1607	1402	1170	1109	788	704	630	564	345	294	267	417	240
Philadelphia, PA 39°56.8'N., 75°08.3'W.	2001	1955	1323	1395	1954	1849	1847	1687	1618	1584	1379	1147	1086	765	681	607	541	322	269	242	392	-
Baltimore, MD 39°16.0'N., 76°34.5'W.	1950	1904	1268	1375	1899	1794	1792	1632	1563	1529	1324	1092	1031	710	626	552	486	267	173	150	-	
Chesapeake Bay (entrance) 36°56.3'N., 75°58.6'W.	1800	1754	1118	1225	1749	1644	1642	1482	1413	1379	1174	942	881	[illegible]	476	402	336	187	27	-		

Grafičko zadavanje dubine mora izobatama



Slika: Luka Zadar. Svaka točka na karti može se označiti sa dvije varijable: geografska širina i visina. Plavom bojom označena je morska površina na kojoj je definirana dubina mora. Izobate su označene brojem i spajaju točke s istom dubinom mora.

Grafičko zadavanje funkcije razinskim krivuljama: primjer

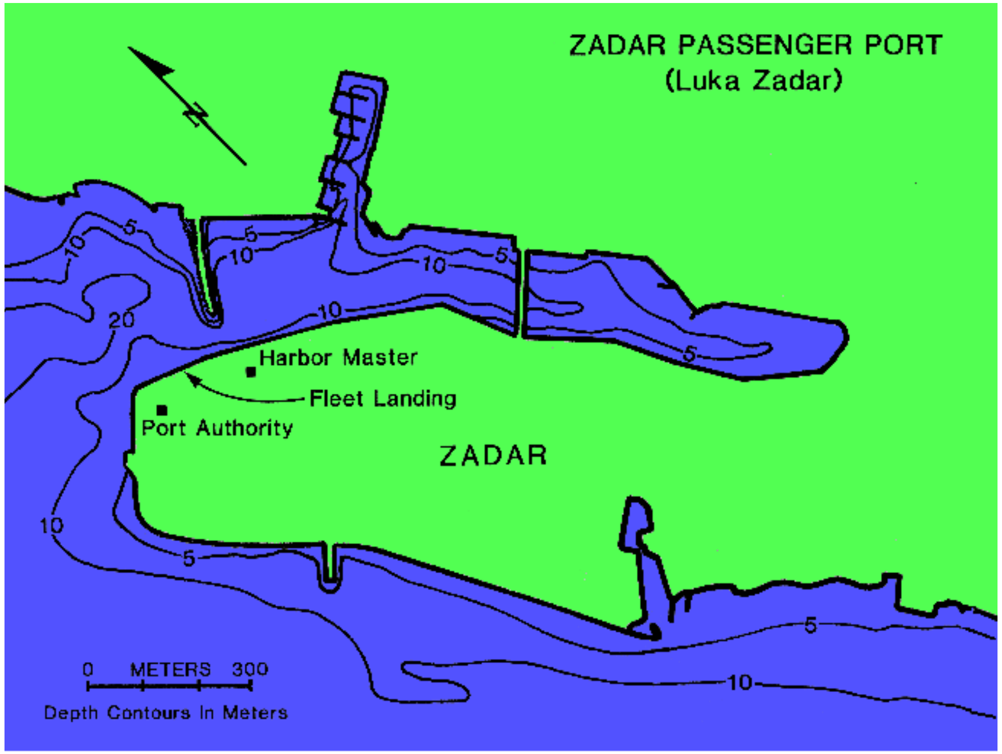


- $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ jedna točka u ravnini,
- $\mathscr{M}$: točke (λ, φ) koje pokriva more ($\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^2$).
- na svakoj točki površine mora određena **dubina** — realni broj:

$$\text{funkcija } d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$$

- pravilo da je $d(\lambda, \varphi) =$ dubina mora na koordinatama (λ, φ)
- $\mathscr{M}$ je domena funkcije d
- Takozvana slika funkcije $d[\mathscr{M}]$ (vrijednosti koje funkcija poprima u kodomeni) je skup vrijednosti dubine u metrima između 0 i nešto više od 20.

Grafičko zadavanje funkcije razinskim krivuljama: primjer

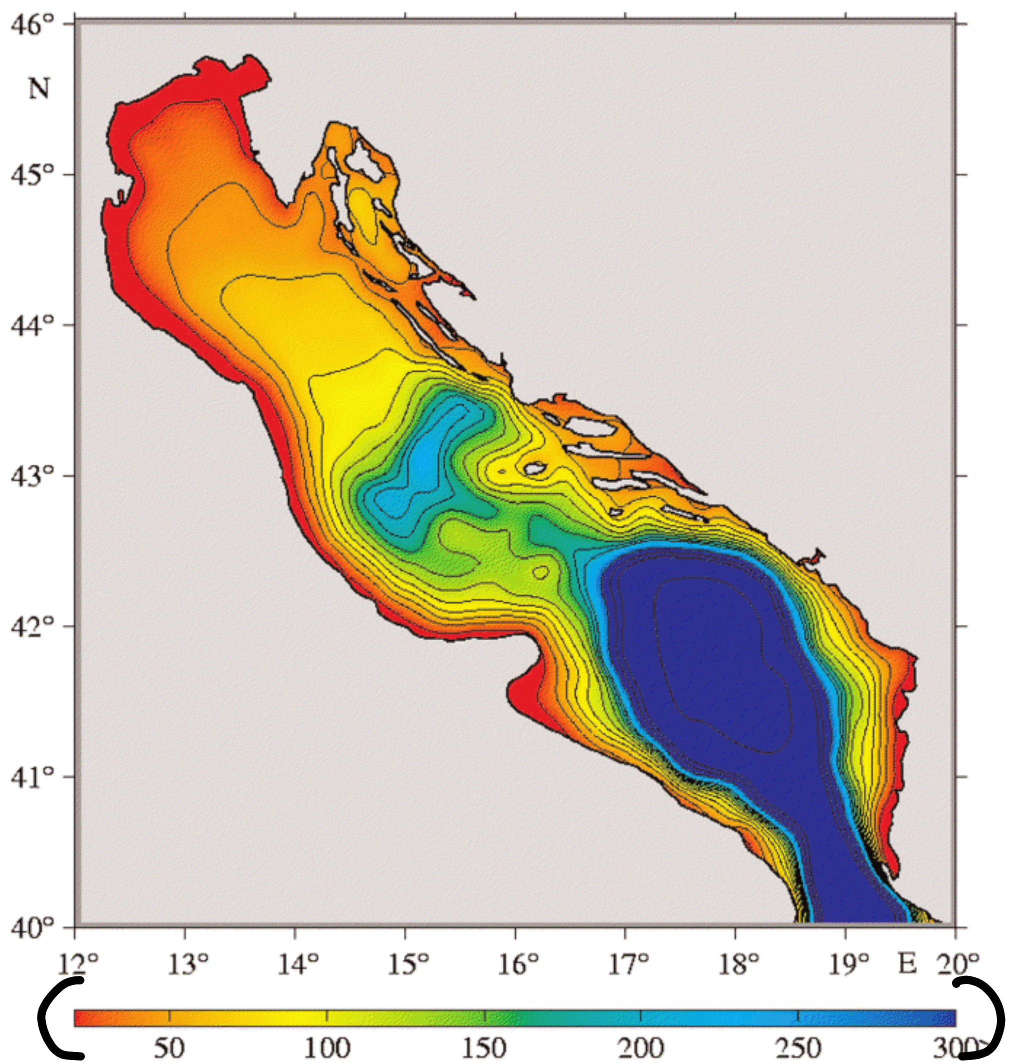


Razinska krivulja za funkciju $f(x,y)$ određena vrijednošću z_0 je skup svih parametara (x,y) tako da

$$f(x,y) = z_0$$

- Na slici su dane razinske krivulje (izobate) za dubinu mora 5, 10 i 20 metara i one nam dovoljno dobro dočaravaju vrijednosti dubine mora na području koje pokriva karta.
- Kada su dvije razinske krivulje na karti relativno blizu jedna drugoj možemo zaključiti da se u tom području brzo mijenjaju vrijednosti funkcije.
- U ovom primjeru s dubinom mora govorimo o naglom porastu dubine.
- Matematičkim riječnikom govorimo o velikom gradijentu funkcije dubine.

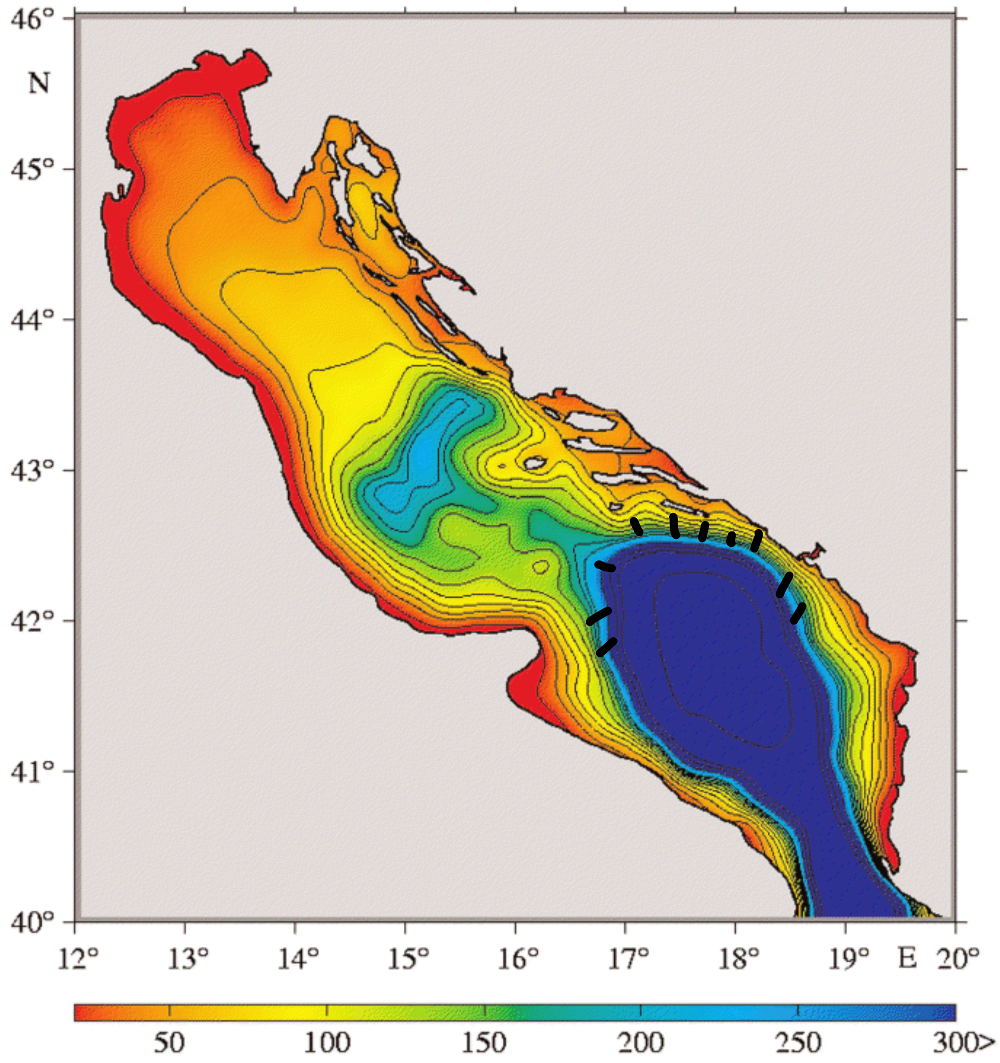
Grafičko zadavanje funkcije bojom



Slika: Batimetrija Jadranskog mora. Primjer skalarne funkcije u ravnini i predočavanja bojom.

Na slici 2 dubinu mora možemo vizualizirati još bolje jer se autor osim ravninskih krivulja poslužio i bojom. Krajnjim crvenim dijelom spektra označio je najmanje vrijednosti dubine, a krajnjim plavim (ljubičastim) bojama najdublja područja. U usporedbi s izobatama nijansiranje boja omogućuje suptilniju vizualizaciju dubine mora. Uz ovu sliku u članku I. Janeković, *Modeliranje morskih mijena Jadrana*, Ruđer, vol. 3, broj 4, travanj 2002. piše. . .

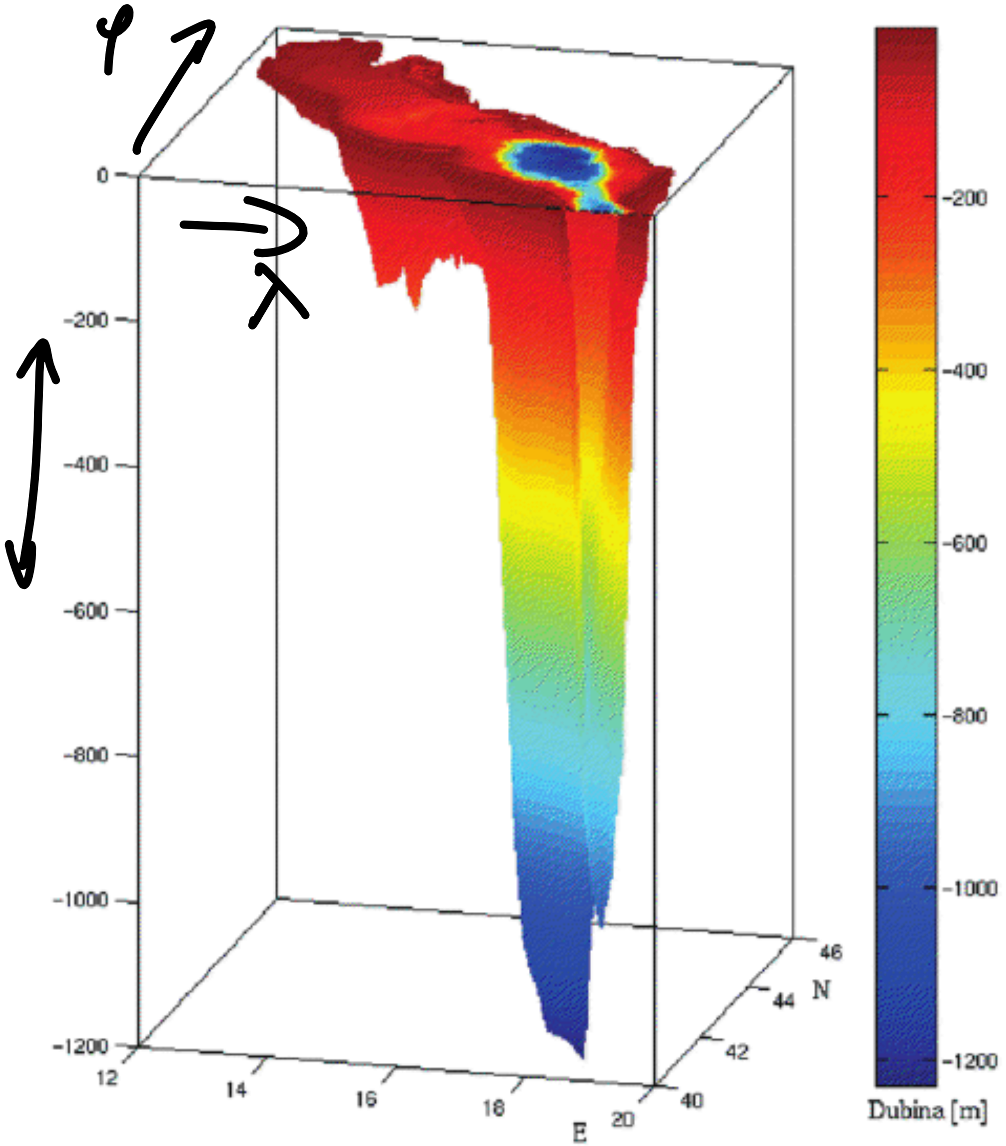
Grafičko zadavanje funkcije bojom



Slika: Batimetrija Jadranskog mora.
Slika = 1000 riječi.

Područje jadranskog bazena možemo u grubo podijeliti u tri geomorfološke cjeline. Sjeverni dio Jadrana je najplići, sa srednjom dubinom od oko 40 m koja se blago povećava u smjeru jugoistoka do izobate od 100 m. Srednji Jadran s prosječnom dubinom od 140 m proteže se do Palagruškog praga, a u sebi sadrži Jabučku kotlinu s dubinom od oko 200 m. Južni dio Jadrana je najdublji, a proteže se od Palagruškog praga do Otrantskih vrata koji povezuje Jadransko more s Jonskim i Sredozemnim morem. Karakterističan je po naglom porastu dubine od 150 m na svom gornjem dijelu na 1200 m u svom najdubljem središnjem djelu.

Grafičko zadavanje funkcije s 2 parametra u 3D



Slika: Batimetrija Jadranskog mora.

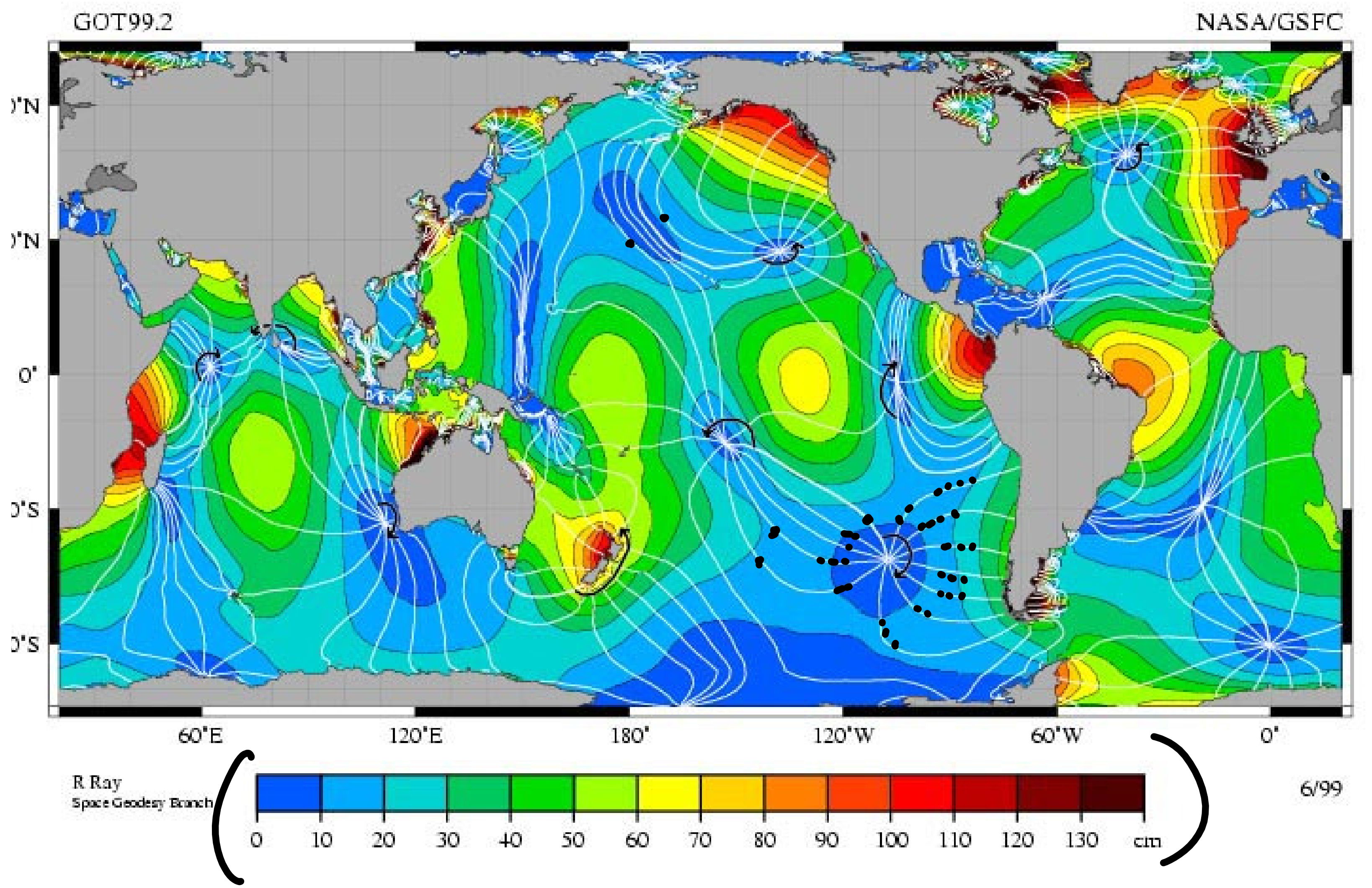
Na dvije osi nanesene varijable domene (zemljopisna dužina i širina), a na trećoj osi nanesena je vrijednost funkcije d — dubina mora. Dubina je označena i bojom. Slika funkcije je skup realnih vrijednosti između 0 i oko -1200, dakle d je ograničena funkcija. Minimum funkcije d (vrijednost oko -1200) je najdublja točka Jadranskog mora, a maksimum funkcije d (vrijednost 0) poprimaju sve točke uz obalu mora.

Ispitna pitanja

- Što je razinska krivulja?
- Pročitati globalna svojstva iz grafički zadane skalarne funkcije.

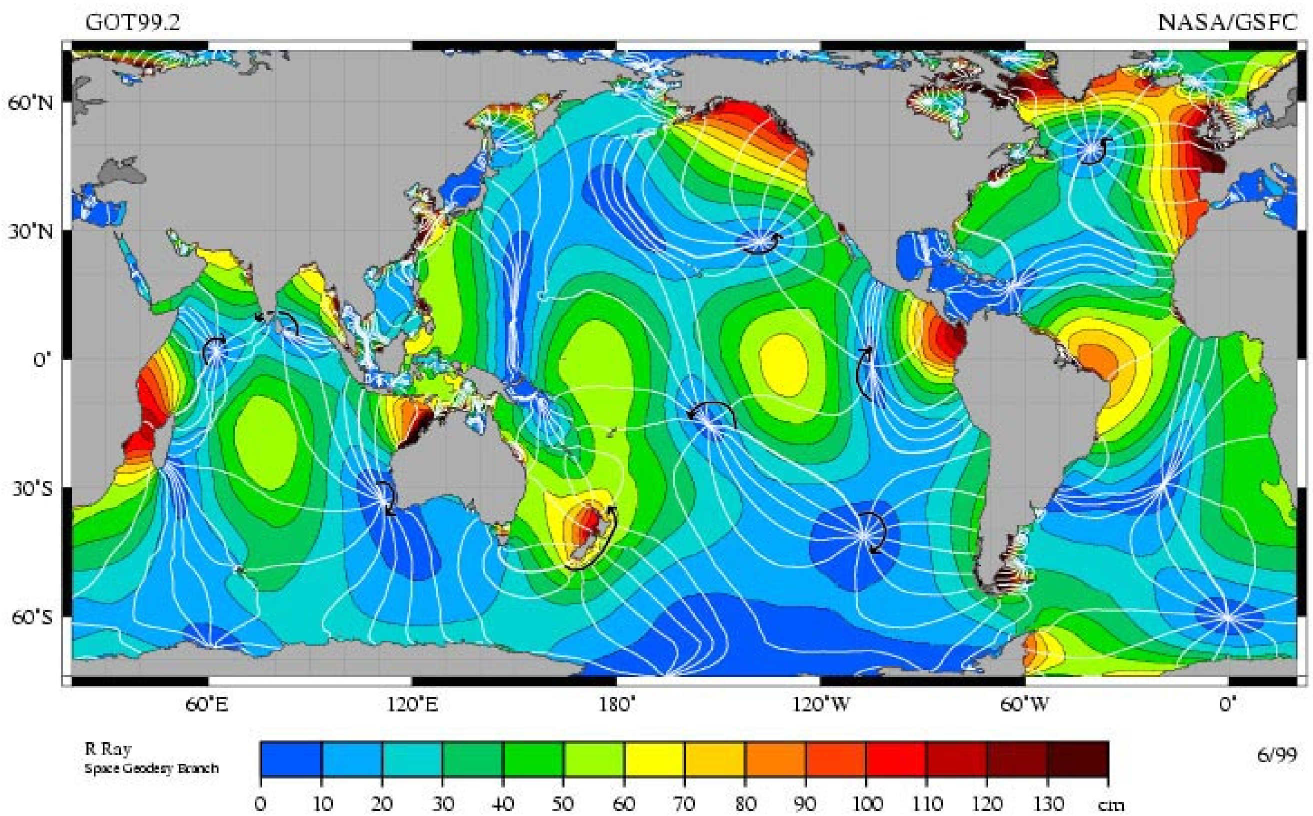
Primjer pitanja: amplitude morskih mijena

Opišite funkcije prikazane na slici, njihovu domenu, kodomenu, maksimume, minimume i područja najvećeg gradijenta. Pazite: na istoj slici oslikano je djelovanje dviju funkcija.



Slika: Amplituda glavne mjesečeve poludnevne komponente morske mijene označena je bojom. Bijelim linijama su označene krivulje sa istom fazom mijene u intervalima od 30° (oko 1 sat). Amfidromijske točke su tamno plava područja gdje se bijele linije spajaju.

Rješenje pitanja



Amplituda glavne mjesečeve poludnevne komponente morske mijene označena je bojom. Bijelim linijama su označene krivulje sa istom fazom mijene u intervalima od 30° (oko 1 sat). Amfidromijske točke su tamno plava područja gdje se bijele linije spajaju.

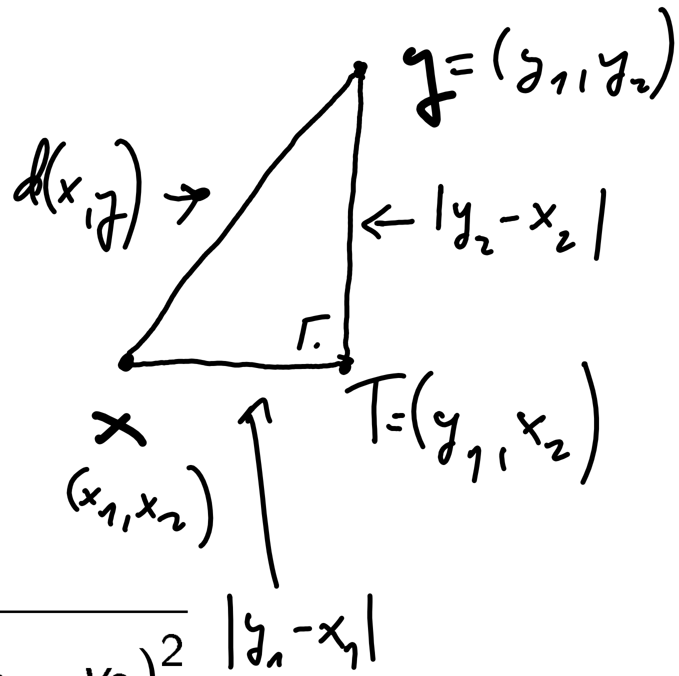
Bojom je prikazana razlika između plime i oseke, točnije amplituda glavne mjesečeve poludnevne komponente (M2) morske mijene. Crne linije su razinske krivulje ove funkcije. Amfidromijske točke su minimumi, a područja najveće morske mijene maksimumi. Uz navedeno, bijele linije su razinske krivulje druge funkcije koja daje vrijednost faze morske mijene. Morska mijena je u svojoj prirodi val, a svaki val je uz amplitudu karakteriziran još i periodom. Period glavne mjesečeve poludnevne komponente morske mijene je nešto više od 12 sati. Vrijednosti faze su između 0 i duljine perioda. Sve točke u istoj fazi titraju zajedno, ali svaka u svojoj vlastitoj amplitudi.

Udaljenost

PITAGORA

Dvije točke u $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$$
$$\mathbf{y} = (y_1, y_2)$$



Njihova udaljenost:

$$\rightarrow \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

Udaljenost

Definicija

Dvije točke u $\mathbb{R}^n$:

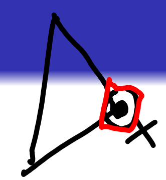
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Njihova udaljenost:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Kugla, okolina

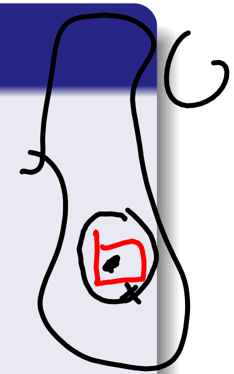
$$K(\mathbf{x}; R) = \{y : d(x,y) < R\}$$



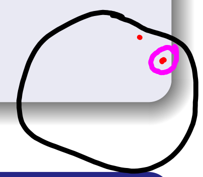
Definicije

Otvoreni krug ili kugla oko točke $\mathbf{x}$ radijusa ε:

$$K(\mathbf{x}; \varepsilon) = \{\mathbf{y} : d(x, y) < \varepsilon\}$$



Okolina točke $\mathbf{x}$ je svaki skup koji sadrži neku kuglu $K(\mathbf{x}; \varepsilon)$.
Skup X je otvoren skup ako za svaku svoju točku sadrži još i neku okolinu oko nje.



Činjenica

U svaku se kuglu može upisati kvadar i obratno.

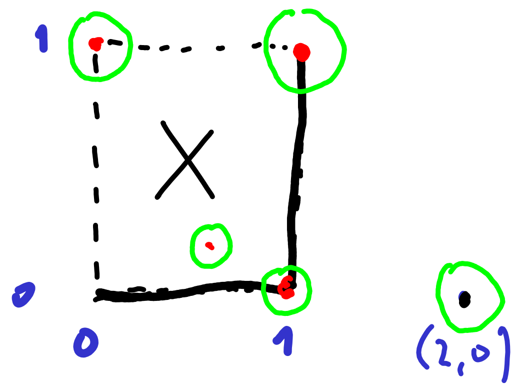
Gomilište skupa,...

Definicije

p je gomilište skupa X ako svaka okolina od **p** sadrži neke točke iz $X \setminus \{\mathbf{p}\}$.
Skup X je zatvoren skup ako sadrži sva svoja gomilišta, tj. ako nema gomilišta od X izvan X.
$\mathbf{p} \in X$ je izolirana točka ako u nekoj okolini nema drugih točaka skupa X.
$\mathbf{p} \in X$ je unutrašnja točka ako su u nekoj okolini sve točke unutar skupa X.
Skup X je omeđen skup ako je sadržan u nekoj (velikoj) kugli.

$X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$X = \{(x,y) : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y < 1\} \cup \{(2,0)\}$$



Gomilište skupa,...

Definicije

$\mathbf{p}$ je gomilište skupa X ako svaka okolina od $\mathbf{p}$ sadrži neke točke iz $X \setminus \{\mathbf{p}\}$.
Skup X je zatvoren skup ako sadrži sva svoja gomilišta, tj. ako nema gomilišta od X izvan X.
$\mathbf{p} \in X$ je izolirana točka ako u nekoj okolini nema drugih točaka skupa X.
$\mathbf{p} \in X$ je unutrašnja točka ako su u nekoj okolini sve točke unutar skupa X.
Skup X je omeđen skup ako je sadržan u nekoj (velikoj) kugli.

Činjenica

Svaka točka $\mathbf{p} \in X$ *može biti ili gomilište ili izolirana točka, a svaka unutrašnja točka je nužno i gomilište. Međutim, može biti gomilišta koja nisu elementi skupa. Može se pokazati da je otvoreni skup komplement zatvorenog i obratno. Ima skupova koji nisu niti otvoreni, niti zatvoreni.*

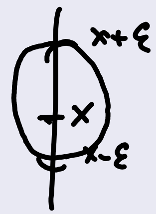
Granična vrijednost niza u $\mathbb{R}^n$

Definicije

Niz točaka $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots)$, $\mathbf{a}_n = \left(a_n^1, \ldots, a_n^m\right) \in \mathbb{R}^m$.
Stražnji dio niza iza k-tog člana je niz $(\mathbf{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{1}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{2}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{3}}, \ldots)$, taj sadrži elemente kao polazni niz osim prvih k i počinje sa $(k+1)$-vim elementom polaznog niza.
Granična vrijednost niza $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je točka $\mathbf{x}$ kojoj svaka okolinu potpuno sadrži neki stražnji dio tog niza:

$$a_n \in K(x;\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad d(\mathbf{a}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon$$



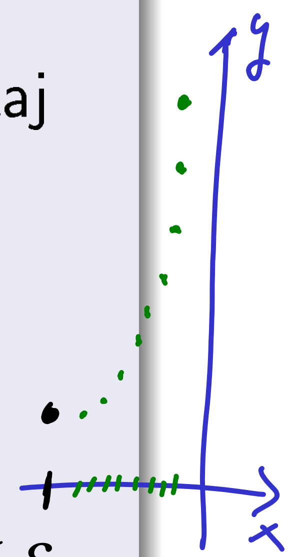
Granična vrijednost niza u $\mathbb{R}^n$

Definicije

Niz točaka $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots)$, $\mathbf{a}_n = (a_n^1, \ldots, a_n^m) \in \mathbb{R}^m$.
Stražnji dio niza iza k-tog člana je niz $(\mathbf{a}_{\mathbf{k+1}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k+2}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k+3}}, \ldots)$, taj sadrži elemente kao polazni niz osim prvih k i počinje sa $(k+1)$-vim elementom polaznog niza.
Granična vrijednost niza $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je točka $\mathbf{x}$ kojoj svaka okolinu potpuno sadrži neki stražnji dio tog niza:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad d(\mathbf{a}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon$$

Granična vrijednost još se naziva i limes. Tada kažemo da niz konvergira prema svom limesu: $\mathbf{a}_n \to \mathbf{x}$. Ako niz ne konvergira kažemo da divergira.



Teorem

1. *Niz može imati najviše jednu graničnu vrijednost.*
2. $\mathbf{a}_n \to \mathbf{x}$ *ako i samo ako po svakoj koordinati i:* $\mathbf{a}_n^i \to \mathbf{x}^i$

Granična vrijednost funkcije

Definicija

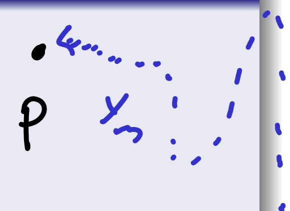
Dana je $f : X \to \mathbb{R}$ i neka točka $\mathbf{p}$ koja nije nužno u X, ali mora biti gomilište od X.
Vrijednost v je <u>granična vrijednost</u> (ili <u>limes</u>) funkcije f u točki $\mathbf{p}$ ako za svaku okolinu $V = \langle v - \varepsilon, v + \varepsilon \rangle$ oko vrijednosti v postoji odgovarajuća okolina oko $\mathbf{p}$ tako da svaka točka $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{p}\}$ koja se nalazi u toj okolini ima funkcijsku vrijednost u V:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{p}\}, (\underbrace{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta}_{|x-p|<\delta} \underbrace{\implies}_{\Rightarrow} \underbrace{d(v, f(\mathbf{x})) < \varepsilon}_{|v-f(x)|<\varepsilon})$$

Pišemo: $\lim\limits_{\mathbf{p}} f = v$ ili $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = v$.

Teorem

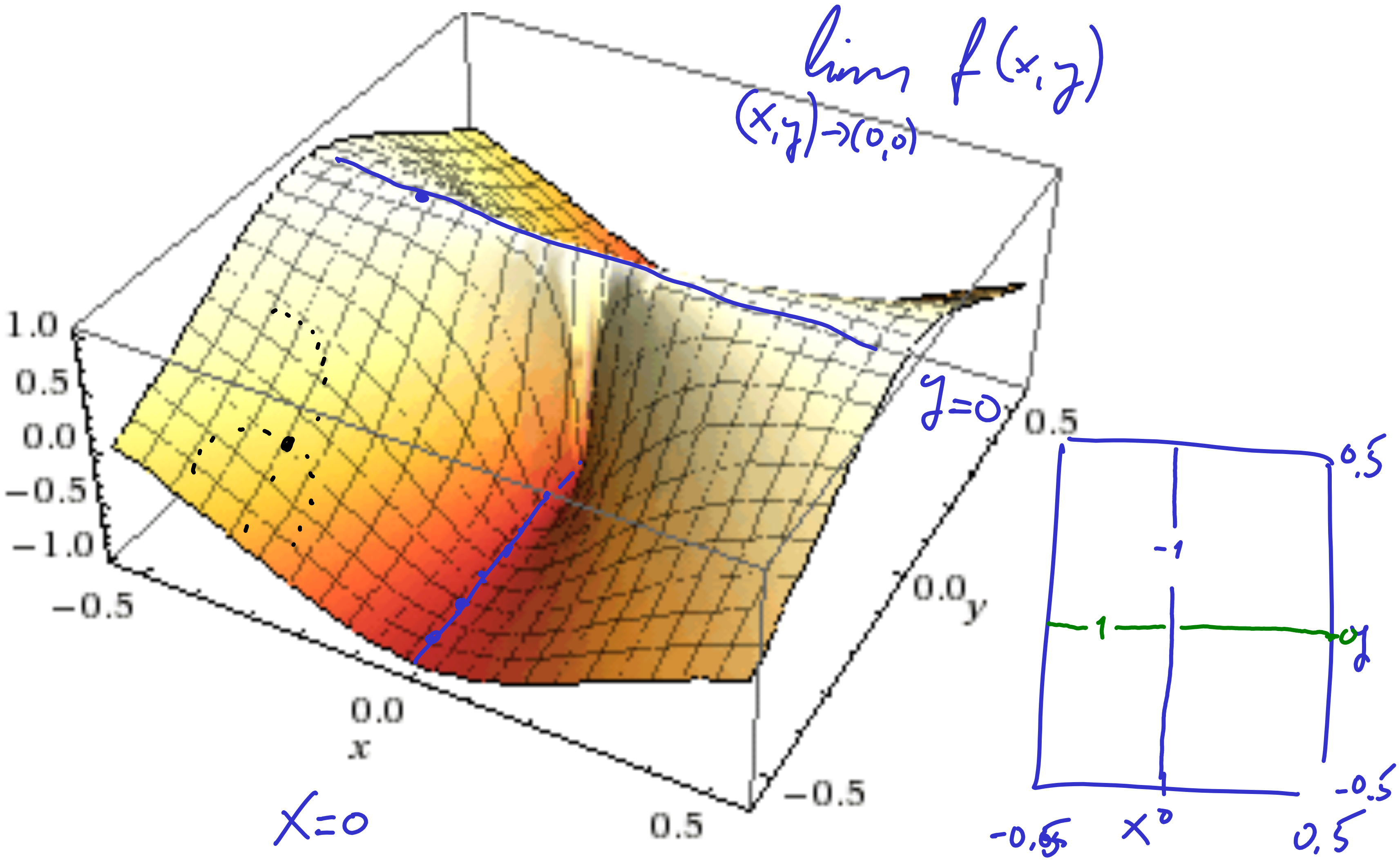
Ekvivalentne su sljedeće tvrdnje:



1. $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = v$

2. Za svaki niz $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *takav da* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{p}$ *pripadni niz vrijednosti* $f(x_n) \to v$
funkcije $f(\mathbf{x}_n) \to v$

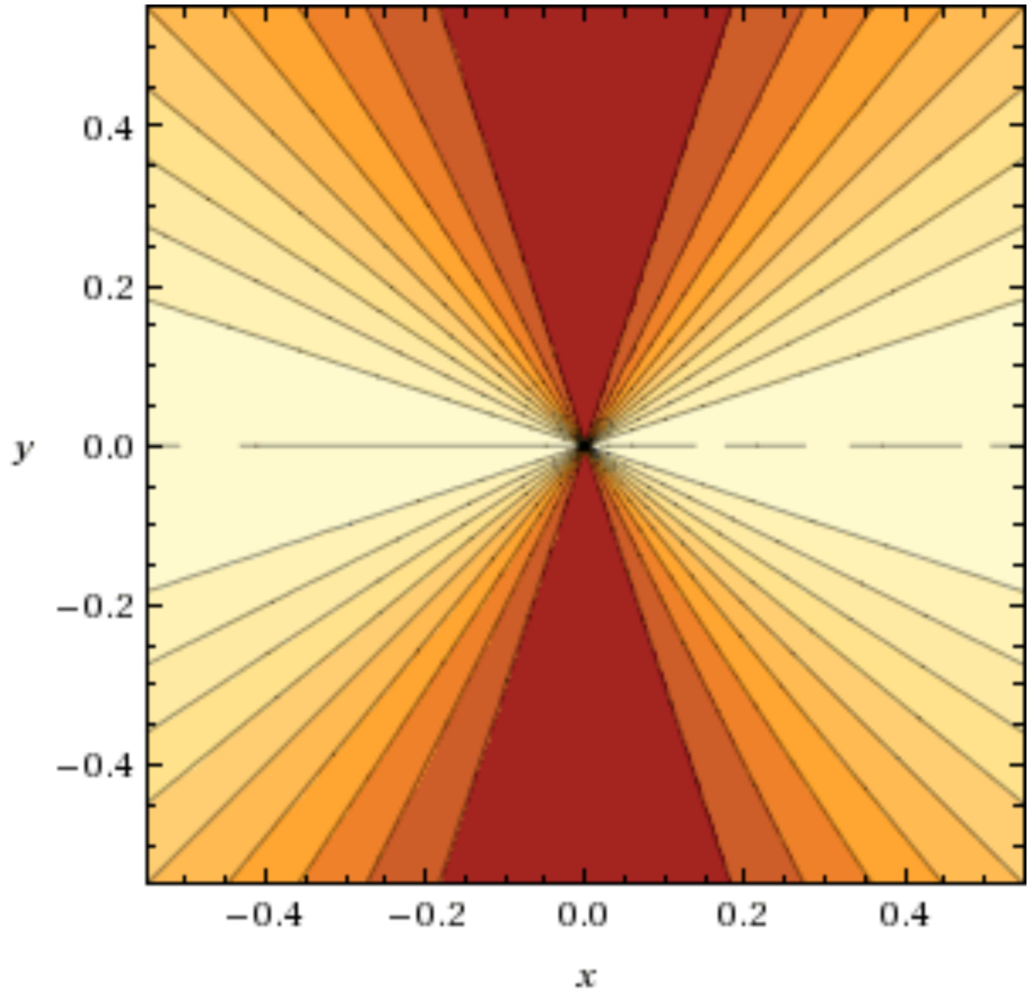
Primjer: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ oko ishodišta



Činjenica

Limes funkcije ne postoji gdje se sijeku različite razinske krivulje.

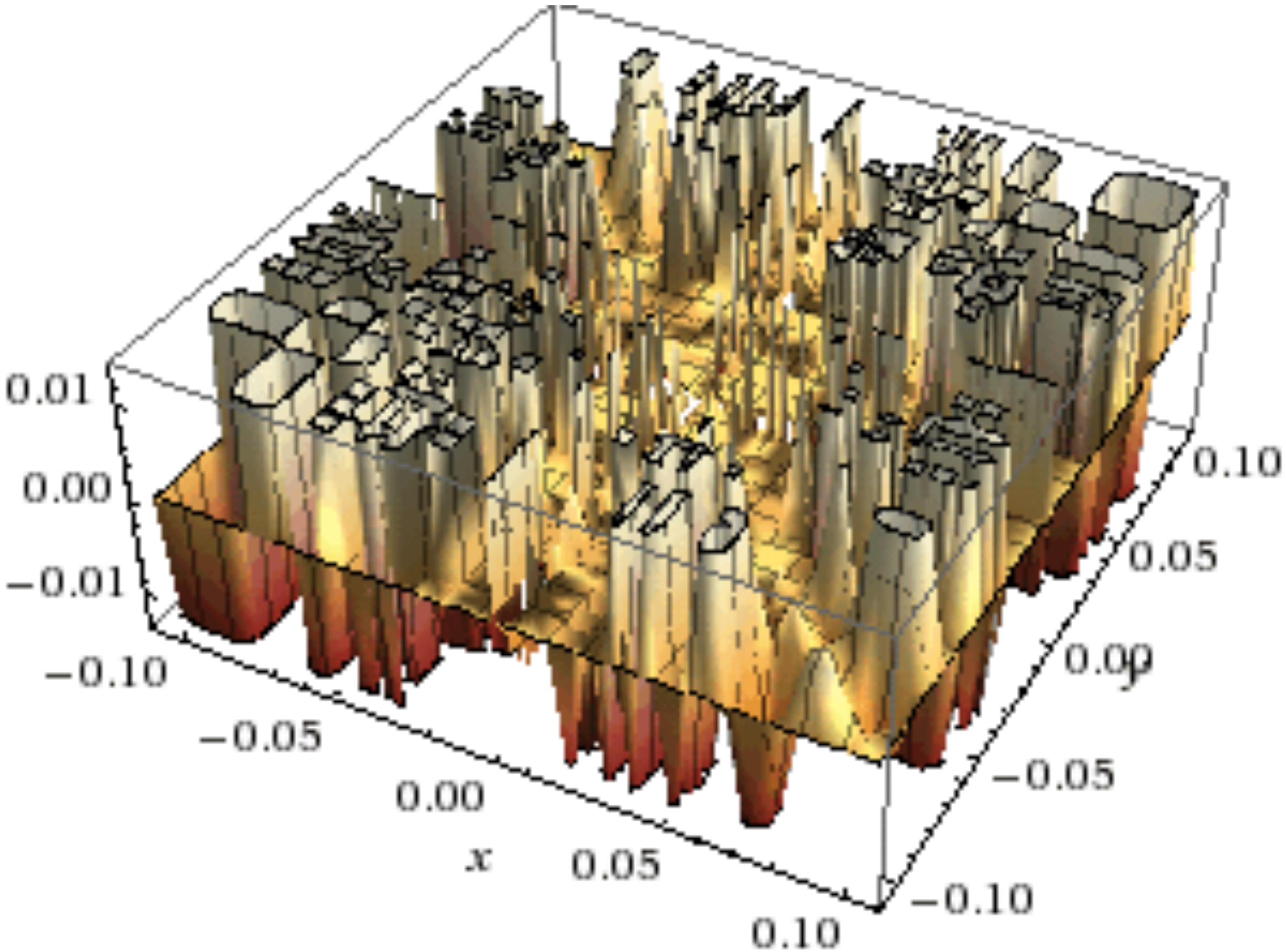
Primjer: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ oko ishodišta



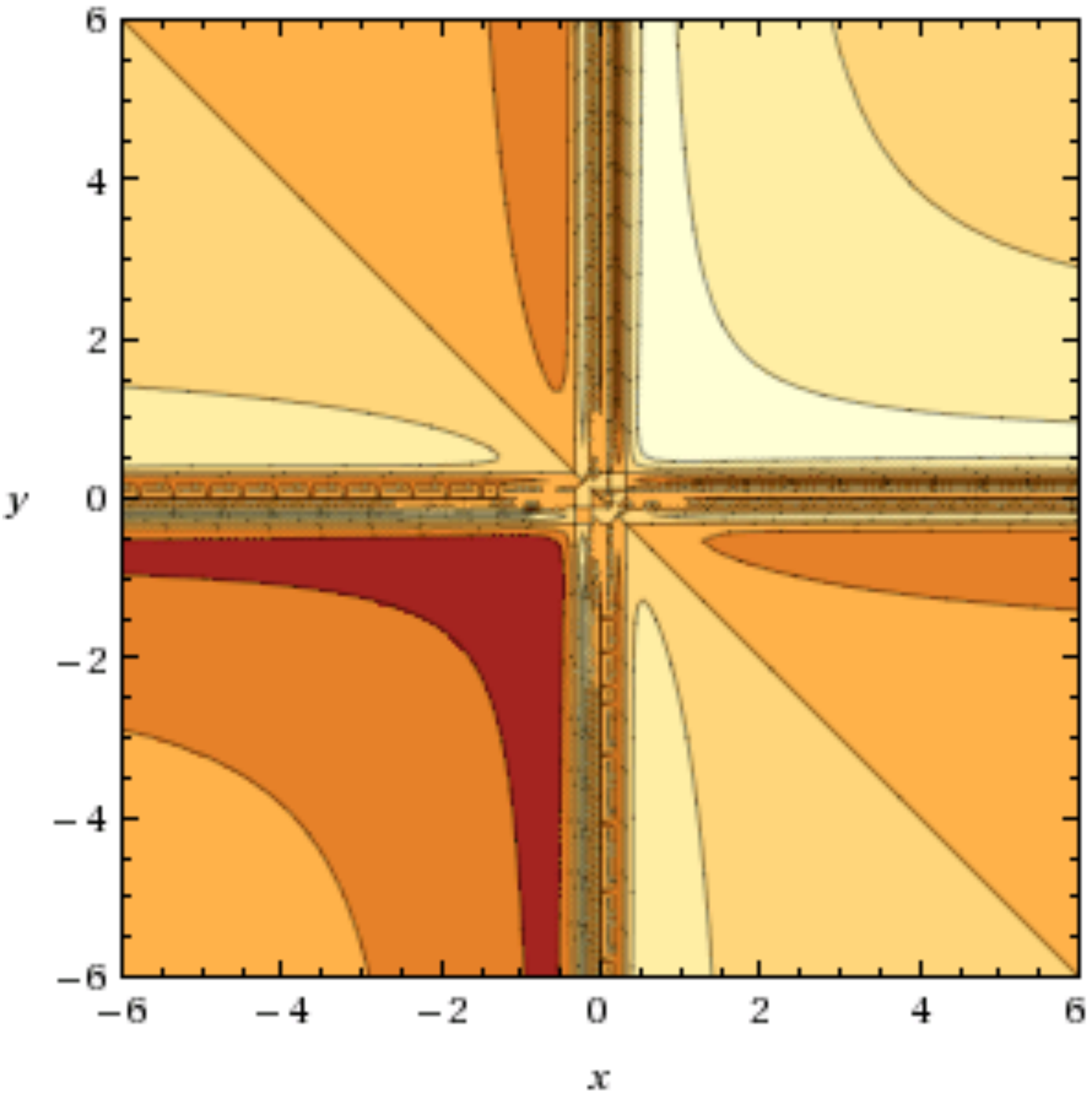
Činjenica

Limes funkcije ne postoji gdje se sijeku različite razinske krivulje.

Primjer: $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ oko ishodišta



Primjer: $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ oko ishodišta



Neprekidnost funkcije

Definicija

Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $\mathbf{p} \in X$ ako je funkcijska vrijednost u točki $\mathbf{p}$ jednaka graničnoj vrijednosti u točki $\mathbf{p}$:

$$f(\mathbf{p}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x})$$

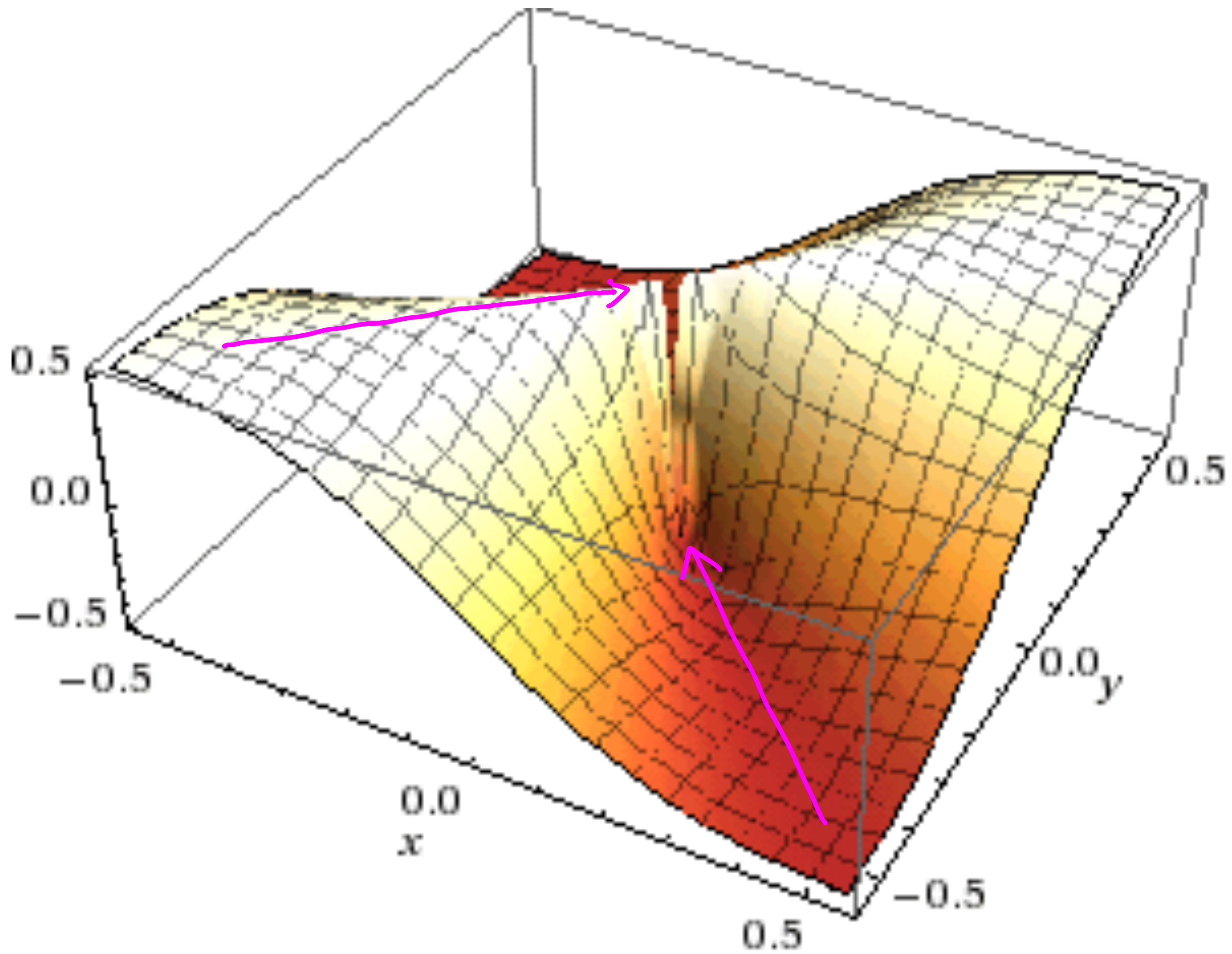
Drugačije izrečeno:

$\cancel{|x-p|} < \delta$ $\quad$ $|f(p)-f(x)| < \varepsilon$

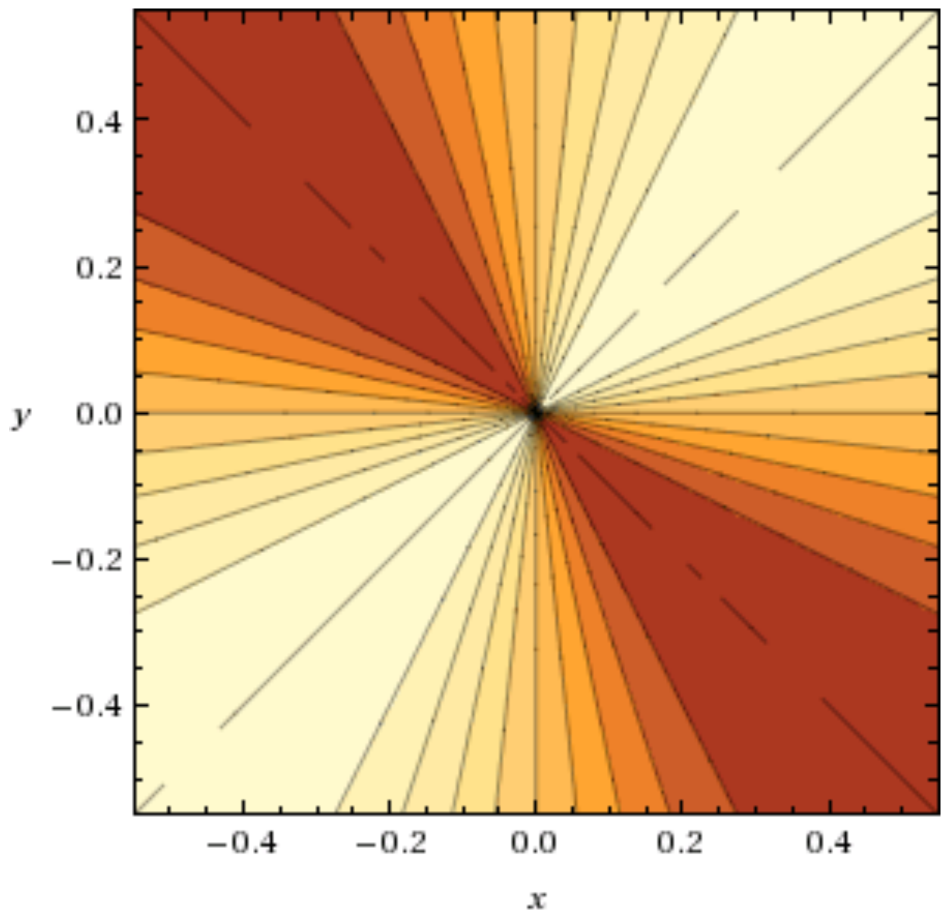
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in X, (d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta \implies d(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{x})) < \varepsilon)$$

Funkcija je neprekidna na skupu kada je neprekidna u svakoj točki skupa. Ako je neprekidna na cijeloj svojoj domeni kažemo samo da je neprekidna. U protivnom kažemo da ima prekide ili da je prekidna.

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$ ima prekid u ishodištu



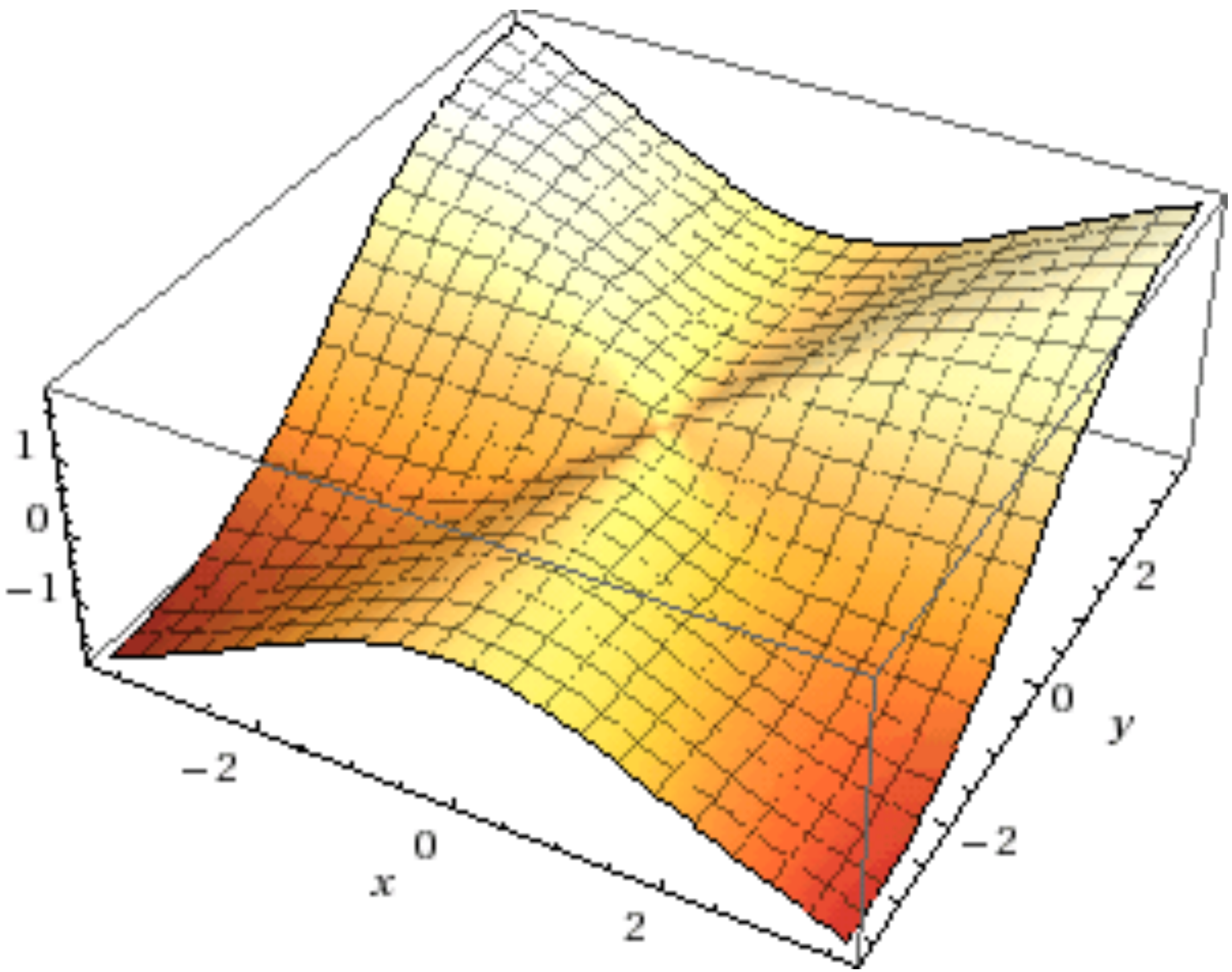
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$ ima prekid u ishodištu



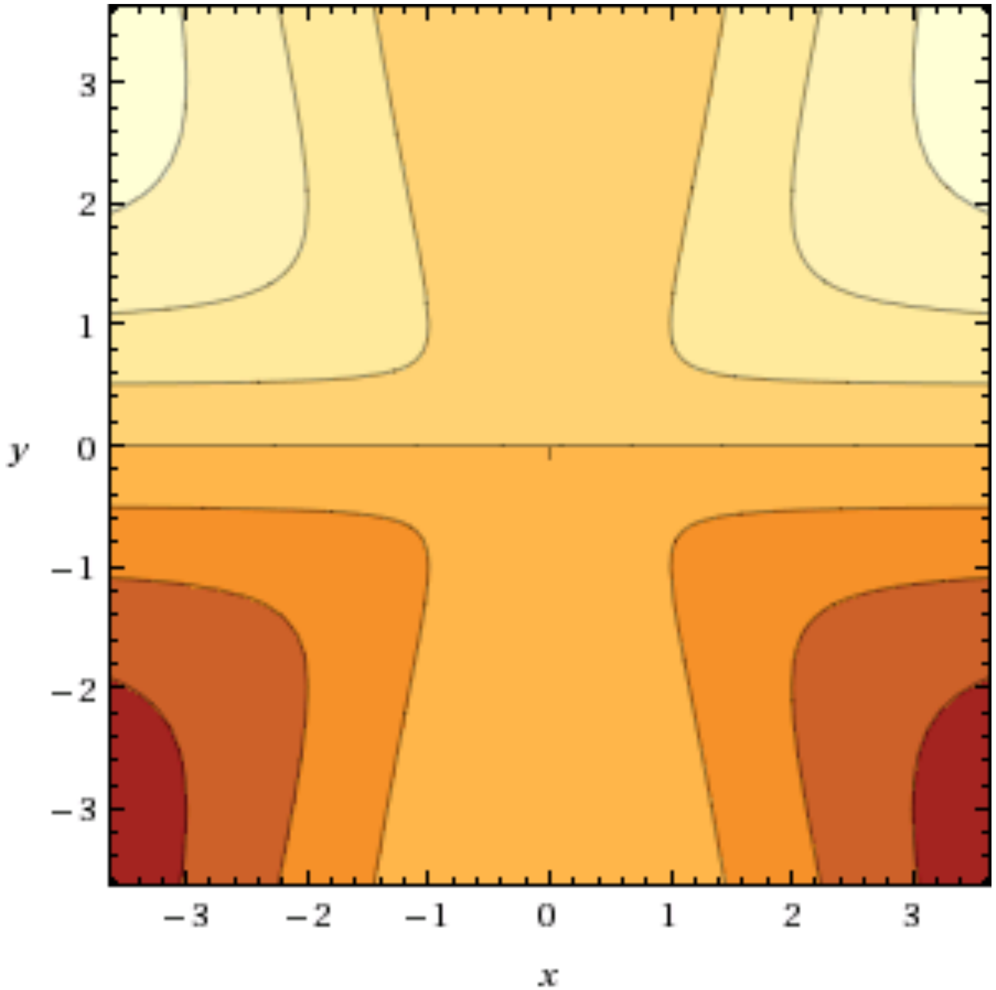
Činjenica

Funkcija ima prekid gdje se sijeku (dodiruju) različite razinske krivulje.

Primjer: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$ je neprekidna



Primjer: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$ je neprekidna



Svojstva neprekidnih skalarnih funkcija

- Ako je f neprekidna u točki $\mathbf{x}$, tada postoji okolina točke $\mathbf{x}$ na kojem je f istog predznaka
- Neprekidna funkcija na zatvorenom i omeđenom skupu je omeđena, te poprima minimum i maksimum
- Ako su f i g neprekidne funkcije tada su također neprekidne i :
  - $f \pm g$
  - $f \cdot g$
  - $\dfrac{f}{g}$ na definicijskom području

Usporediti gore navedena svojstva sa svojstvima realne neprekidne funkcije jedne varijable.

Ispitna pitanja

- Koja je definicija kugle u $\mathbb{R}^n$? ✓
- Što znači $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = v$? (definicija limesa funkcije) ✓
- Ako postoji $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$ i ako $\mathbf{x}_n \to \mathbf{p}$ koliko tada iznosi $\lim_{\mathbf{x}_n\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_n)$? $=$ ✓
- Ako je funkcija neprekidna u točki $\mathbf{p}$ koliko iznosi $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$? $= f(p)$
- Navesti neka svojstva neprekidnih funkcija.