# Matematika II

## Predavanje 1

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

6. ožujka 2013.

# Sažetak

1. Obavijesti
   - Uvjet za potpis
2. Primitivna funkcija
   - Ideja
   - Striktna definicija i primjeri iz knjige
   - Svojstva primitivne funkcije
3. Neodređeni integral
   - Definicija i primjeri
   - Tablica osnovnih integrala
   - Svojstva
4. Integracijske metode
   - Tipične greške
   - Parcijalna integracija
   - Integracija supstitucijom
   - Integriranje je općenito vrlo složeno

# Uvjet za potpis za redovite studente: samo seminari

## Izvanredni studenti i poseban status nemaju nikakvih uvjeta za potpis.

- Prijavite se na web stranice predmeta — tamo će stizati obavijesti.
- Predavanju **NISU** obvezna: možete dolaziti srijedom ili gledati video naknadno. Ponekad će nadoknada biti utorkom u terminu seminara.
- Sve grupe seminara drži asistentica Lea Dujić. Nema videa sa seminara. Redoviti studenti trebaju sakupiti 22 od 30 sati seminara **na obrascu za ovjere**. Slobodno mijenjajte grupu kako vam odgovara.
- Seminari počinju idući utorak, otprilike svaki drugi tjedan. Održavati će 3-4 sata u jednom terminu.
- Ako ćete imati **problem**a sa ispunjavanjem uvjeta **za potpis morate se javiti u prva 3 tjedna nastave**.
- Biti će neka vrsta kolokvija. . .

# Antiderivacija

## Definicija

Za funkciju $f(x)$ primitivna funkcija je funkcija $F(x)$ takva da je

$$F'(x) = f(x)$$

.

Razmišljamo koja funkcija $F(x)$ kada se derivira daje $f(x)$...

## Ako deriviranje predočimo kao korak naprijed, integriranje se može zamisliti kao korak unatrag.

### Primjer

Da li su sljedeće funkcije primitivne od $f(x) = \cos x$?

### ?

$g(x) = \sin x + 5$ ?

### ?

$g(x) = \sin x - 35\pi$ ?

# Riječ interval koristimo u labavom smislu

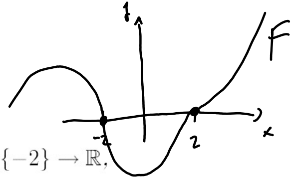
Ovdje ćemo, jednostavnosti radi i kad to ne bude imalo zasebnog utjecaja, nazivom **interval** i oznakom $I$ obuhvatiti sve mogućnosti (v. 1.1.3): $\langle a,b\rangle$, $\langle a,b]$, $[a,b\rangle$, $[a,b]$, $\langle\cdot,b\rangle$, $\cdots$, $\langle\cdot,\cdot\rangle=\mathbb{R}$. Štoviše, ponekad će $I$ označavati i neku uniju disjunktnih intervala, jer će, najčešće, definicijska područja promatranih funkcija biti ili intervali ili razlike nekih intervala i prebrojivih podskupova od $\mathbb{R}$.

# Primitivna $F'(x) = f(x)$ do u prebrojivo točaka

**Definicija 4.2.1** *Neka su dani interval (ili njihova unija) $I$, prebrojiv podskup $A \subset I$ funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, pri čemu je $I \setminus A \subset X \subseteq \mathbb{R}$. Svaku neprekidnu funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\boxed{F'(x) = f(x)}$ za svaki $x \in I \setminus A$, nazivamo **primitivnom funkcijom** za funkciju $f$ na intervalu $I$.*

**Primjer 4.2.1** Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2, & x < -2 \\ x^2 - 4, & -2 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2, & x \geq 2 \end{cases},$$




je primitivna funkcija za funkciju $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ 2x, & -2 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases},$$

jer je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ (v. crtež). (Ovdje je $I = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $A = \{-2, 2\}$.)

# Primitivna funkcija je antiderivacija

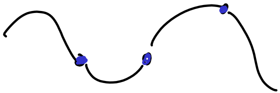
**Primjer 4.2.2** Za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$, su između ostalih i ove funkcije primitivne (na $I=\mathbb{R}$):

$F_1(x)=x^2$, $F_2(x)=x^2-3$, $F_3(x)=x^2+\sqrt{5}$ $(A=\emptyset)$.

Funkcija $x\mapsto G(x)=\arcsin x$ je primitivna za funkciju $x\mapsto g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $I=X=\langle -1,1\rangle$, $A=\emptyset$. (Primijetimo da se ovdje za $I$ smije uzeti i $[-1,1\rangle$, $\langle -1,1]$, $[-1,1]$ redom, s pripadnim suženjima od arcsin, čim je $A=\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1,1\}$ redom.) Funkcija $x\mapsto H(x)=\frac{1}{x}$ je primitivna za funkciju $x\mapsto h(x)=-\frac{1}{x^2}$ na $I=X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $A=\emptyset$. Napokon, primijetimo i to da je funkcija $F_1(x)=x^2$ primitivna ne samo za funkciju $f(x)=2x$ nego i za funkcije

$$f_1(x)=\begin{cases} 2x, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} 2x, & x\notin\mathbb{N}\\ 0, & x\in\mathbb{N}\end{cases}$$

# $F'(x) = f(x)$ moguće uz "rupice" u domeni



Zapamtite: za $F(x)$ primitivnu funkciju od $f(x)$ :

- $F$ mora biti neprekidna.
- $F'(x) = f(x)$ osim za prebrojivo mnogo (rupica) $x$.
- Ako se domena od $F$ može proširiti po neprekidnosti — slobodno.

# Sve primitivne funkcije od $f$ razlikuju se samo za konstantu

Za $F(x)$ primitivnu funkciju od $f(x)$ :

- Za svaki $c \in \mathbb{R}$ također $G(x) = F(x) + c$ je primitivna od $f$.

# Sve primitivne funkcije od $f$ razlikuju se samo za konstantu

- Ako su $F$ i $G$ primitivne funkcije od $f$ tada se razlikuju samo za konstantu

**Teorem 4.2.1** *Ako za danu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq X$, onda je svaka funkcija $G : I \to \mathbb{R}$, $G = F + c_r|_I$, gdje je $c_r$ konstantna funkcija u (bilo koji) $r \in \mathbb{R}$, primitivna za funkciju $f$. Štoviše, ako su $F, G : I \to \mathbb{R}$ derivabilne primitivne funkcije za $f$ i pritom je $F' = G'$, onda je $G = F + c_r|_I$, za neki $r \in \mathbb{R}$. (Sažeto: "Derivabilna primitivna funkcija je jednoznačno određena do na aditivnu konstantu".)*

**Dokaz.** Jasno, dostatno je dokazati drugu tvrdnju. Neka su $F$ i $G$ bilo koje dvije derivabilne primitivne funkcije za $f$ na $I$ i neka je $F' = G'$. Tada

je funkcija $H : I \to \mathbb{R}$, $H = G - F$, derivabilna i $H' = c_0|_I$. Promatrajmo bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Suženje $H|_{[x_1,x_2]}$ ima derivaciju jednaku nulkonstanti $c_0|_I$ pa je, po Teoremu 4.1.10, $H|_{[x_1,x_2]}$ neka konstantna funkcija $c_r|_{[x_1,x_2]}$. Prema tomu, $(G-F)|_{[x_1,x_2]} = c_r|_{[x_1,x_2]} \Rightarrow G(x) = F(x)+r$, $x \in [x_1, x_2]$. Budući da su $F$ i $G$ neprekidne funkcije i $x_1, x_2 \in I$ bilo koje točke, to je $G = F + c_r|_I$. ∎

# Prisjećanje: ako je derivacija nula funkcija je konstanta

**Teorem 4.1.10** *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *neprekidna na segmentu* $[a, b] \subseteq X$ *i derivabilna na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Ako je* $f'(x) = 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$, *onda je suženje* $f|_{[a,b]}$ *konstantna funkcija.*

# Neodređeni integral je skup svih primitivnih funkcija

Ako je $F'(x)=f(x)$

**Definicija 4.2.2** *Za danu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, skup svih njezinih primitivnih funkcija na intervalu (ili njihovoj uniji) $I$ nazivamo* ***neodređenim integralom*** *funkcije $f$ na intervalu $I$ i označujemo s $\int f(x)dx$.*

$$\int f(x)dx$$

U skladu s Teoremom 4.1.1, ima smisla pisati
$\int f(x)dx = F(x) + c$, $x \in I \setminus A$,
gdje $F$ neka (bilo koja) primitivna funkcija za $f$ na $I$, a $c$ oznaka za opću konstantu. Uobičajilo se funkciju $f$ nazvati **integrandom** (ili **podintegralnom funkcijom**), $x$ - **integracijskom varijablom**, a $c$ - **integracijskom konstantom**.

$$\|$$

$$\{F(x)+c : c\in\mathbb{R}\}$$

Kod računanja elementarnih integrala možemo se služiti tablicom derivacija, ali »čitamo je u obrnutom smjeru«.

DERIVACIJA →

| $F$ | $f = F'$ |
|---|---|
| $x^\alpha \ (\alpha \neq 0)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $\frac{-1}{\sin^2 x}$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |

← INTEGRACIJA

DERIVACIJA →

| $F$ | $f = F'$ |
|---|---|
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ |
| $\coth x$ | $\frac{-1}{\sinh^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\sinh^{-1} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\tanh^{-1} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| $\coth^{-1}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

← INTEGRACIJA

$$\int \alpha x^{\alpha-1} dx = x^\alpha + C$$

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{\cancel{(\alpha+1)}\cdot x^\alpha}{\cancel{\alpha+1}}$$

# Primjeri iz knjige. . .

**Primjer 4.2.3** (a) $\int \sin x dx = -\cos x + c$, jer je $(-\cos x + c)' = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, jer je $(\arcsin x + c)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

# Tko zna derivirati lako provjeri . . .

$\int \frac{1}{x} dx$

| | | |
|---|---|---|
| $\int 1 \, dx = x + C$ | $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ | $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$ |
| za $\alpha \neq -1$: $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\int \tan x \, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert$ | $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$ |
| $\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$ | $\int \cot x \, dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$ |
| $\int e^x \, dx = e^x + C$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arccos \left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$ |
| $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ | $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$ | $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = 1/2 \left[ x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right]$ |
| $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ | $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$ | $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 1/2 \left[ x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right] + C$ |

# Integral je neki način antiderivacije

**Vrijedi** (*slično kao za derivacije*): vidi Teorem 4.2.2. i 4.2.3. iz knjige

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c$$

$$\int a f(x)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x, \ (a \text{ konstanta})$$

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. . .

$$\int (a\cdot f)'\,dx = \int a\cdot \boxed{f'}^{\,g}\,dx$$

$$= a\cdot f = a\cdot \int \boxed{f'(x)}^{\,g}\,dx$$

$$\int a\cdot g(x)\,dx = a\cdot \int g(x)\,dx$$

# Ponekad "zaboravljamo" konstatnu $C$

Napomenimo da ubuduće u jednakostima sličnima onoj u Teoremu 4.2.3, opću konstantu $c$ $(c_1, c_2, k, \cdots)$ najčešće ne ćemo zapisivati, tj. u takvim "jednakostima" ćemo dopuštati da se lijeva i desna strana smiju razlikovati do na aditivnu konstantu.

**Primjer 4.2.4** $\int(4\cos x + \frac{x^3}{2} - 3)dx \overset{(1)}{=} 4\int \cos x dx + \frac{1}{2}\int x^3 dx - 3\int dx = 4\sin x + \frac{x^4}{8} - 3x + c$. (Naime, $\sin' x = \cos x$, $(\frac{x^4}{4})' = x^3$ i $(x)' = 1$.)

# Ne rastavljati integral po faktorima!

Za razliku od derivacija **nema formule za integraciju umnoška.**

- na primjer ne vrijedi:

$$\cancel{\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int x \, \mathrm{d}x}_{=\frac{x^2}{2}} \cdot \underbrace{\int \sin x \, \mathrm{d}x}_{=-\cos x}}$$

- ponekad se za umnoške pod integralom koristi parcijalna integracija. . .

# Ne rastavljati razlomak po zbroju u nazivniku!

$\frac{1}{2} = \frac{2}{2+2} \neq \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$

- vrlo česta greška:

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \cancel{\underbrace{\int \frac{x}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{=\ln|x|} + \underbrace{\int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{4}x^2}}$$

- općenito je
  zabranjeno rastaviti razlomak po zbroju u nazivniku

- integral razlomka je relativno težak: posebne (složene) metode riješavanja...
- ovaj gore može se riješiti jednostavnom supstitucijom...

# Parcijalna integracija

Formula za derivaciju umnoška:

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=(f(x)\cdot g(x))'$$

Integracija:

$$\begin{aligned}\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x+\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int (f(x)\cdot g(x))'\,\mathrm{d}x\\ &= f(x)\cdot g(x)+c\end{aligned}$$

Lijevo ostavimo samo dio izraza:

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\cdot\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\cdot\underbrace{g(x)}_{v}-\int \underbrace{f'(x)}_{du}\cdot\underbrace{g(x)}_{v}\,\mathrm{d}x,$$

Zamjenom varijabli $u=f(x)$ i $v=g(x)$ možemo pisati i ovako:

$$\begin{aligned}\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x &= uv-\int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x,\\ \int u\,\mathrm{d}v &= uv-\int v\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\begin{cases} u=f & ;\ du=f\,dx \\ dv=g'dx & ;\ v=\int g'=g \end{cases}$$

# Parcijalna integracija

## Primjer

Koristeći zamjenu $u = x$ i $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$ izračunati

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}u = u' = 1\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x; & v = \int \mathrm{d}v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$= uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$= \ldots$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

# Integracija supstitucijom

Deriviranje kompozicije funkcije:

$$F'(g(x)) \cdot g'(x) = (F \circ g)'(x).$$

Integrirajmo:

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x) = \int (F \circ g)'(x) = (F \circ g)(x) + c$$

Zaključak: Ako je $f$ neprekidna funkcija i $F$ njena primitivna funkcija (*čitaj:* $F'(x) = f(x)$), a uz to $g$ ima neprekidnu derivaciju tada

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(g(x)) + c.$$

## $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.$

Drugim riječima, napravili smo zamjenu varijabli $t = g(x)$:

$$
\begin{aligned}
\int f(\underbrace{g(x)}_{t}) \cdot \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{dt} &= \left\{ \begin{array}{c} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}(g(x)) = g'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} \\
&= \int f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F(t) + c \\
&= F(g(x)) + c
\end{aligned}
$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} t = x^2+2 \\ dt = \left(x^2+2\right)' dx = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + c$$

**Teorem**

*Kada je brojnik baš derivacija nazivnika integracija razlomka se može provesti supstitucijom.*

**Dokaz.**

$t = f(x)$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|f(x)| + c$$

$\square$

# Treba poznavati tehniku za svaki pojedini tip integrala

Integralni račun, tj određivanje primitivnih funkcija je, kao što smo već mogli primijetiti, tehnički složen posao. Jedna poteškoća proizlazi iz činjenice da primitivna funkcija za (i relativno jednostavnu) elementarnu funkciju ne mora biti elementarna. Druga, pak, jest sama bit integralnoga računa, tj. i kad je primitivna funkcija elementarna (tada se kaže da je integral *elementarno rješiv*), njezino je određivanje, osim u rijetkim slučajevima (tablični ili njima vrlo slični integrali) samo po sebi tehnički složen posao. Ovdje ćemo pokazati nekoliko tehnika integriralnoga računa u slučaju elementarno rješivih integrala.

Lagani neodređeni integrali:
- tablični
- izlučivanje konstantog faktora
- razdvojiti integral zbroja na zbroj integrala

Ostali neodređeni integrali mogu se pokušati riješiti:
- parcijalnom integracijom
- supstitucijom
- pogađanjem (pa deriviranje za provjeru)
- ~~razvojem funkcije u~~ red
- posebnom kombinacijom ovih tehnika
- ponekad neriješivi

# Ponavljanje

- Što je primitivna funkcija?
- Što je neodređeni integral?
- Formule za integraciju
  - parcijalna integracija
  - integracija supstitucijom