Matematika 2: Pitanja za usmeni ispit

Nastavnik na usmenom ispitu može tražiti da samostalno pred njim riješite bilo koji zadatak iz seminarske vježbenice ili pismenog ispita. Ocjena se stiče na usmenom ispitu, prema potpunosti danog odgovora na postavljena pitanja i broju bodova na pismenom ispitu. Potpuno nepoznavanje bilo kojeg pitanja povlači pad na ispitu.

P1

1. Neodređeni integral:

   - Što je primitivna funkcija? ZADANA $f(x)$ NJEZINA PRIMITIVNA $F(x)$ VRIJEDI $F'(x)=f(x)$
   - Kako provjeriti da je primitivna funkcija dobro izračunata? $F'(x) \overset{?}{=} f(x)$
   - Što je neodređeni integral? SKUP SVIH ZA ODREĐENU ZADANU
   - Navesti neka svojstva neodređenog integrala?
   - Formule za integraciju
     - (a) parcijalna integracija
     - (b) integracija supstitucijom
   - Kako riješiti neodređeni integral racionalne funkcije?

1. $\Big(\underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)}\Big)' = f(x)$

2. $\underbrace{\int \underbrace{f'(x)}_{}\,dx}_{f(x)} = f(x) + c$ $\quad \boxed{f'(x)^{+c'} = f'(x)}$

3. $\underbrace{\int a f(x)\,dx}_{} = a \underbrace{\int f(x)\,dx}_{}$

$\Big(a \cdot \int f(x)\,dx\Big)' = a \cdot \underbrace{\Big(\int f(x)\,dx\Big)'}_{f(x)} = a \cdot f(x)$

4. $\underbrace{\int f(x) + g(x)\,dx}_{} = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

ZATO ŠTO

$\Big(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\Big)' = \underbrace{\Big(\int f(x)\,dx\Big)' + \Big(\int g(x)\,dx\Big)'}_{f(x) + g(x)}$

PARC. INT.

$v = \int dv = \int g'(x)\,dx = g(x)$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$u \to f(x)$, $dv \to g'(x)\,dx$, $v \to g(x)$, $du \to f'(x)\,dx$

SUPSTITUCIJA

$$-\int f(x)\,g'(x)\,dx = \int f(x) = t$$

PRIMJER:

$$\int x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int t\,dt$$

$$\int \underbrace{(x+1)}_{t}{}^{2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x+1 = t \quad /' \\ dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= \int t^{2}\,dt$$

OPĆENITO:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{} = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t) = F(g(x))$$

$$\to \boxed{F'(x) = f(x)} \qquad F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\longrightarrow \quad = \underline{f(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$\int \underline{\text{rac f-je}}\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx =$$

AKO JE PRAVA $st(P) \geq st(Q)$

TREBA PODIJELITI $P(x) : Q(x) = R(x)$ ~~tost~~ $S(x)$

$st(S) < st\,Q$

AKO $st(P) < st(Q)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

$\to$ PARCIJALNE RAZLOMKE

$$\int R(x) + \int \text{PARCIJALNI} + \int \text{RAZLOMCI}$$

PO TIPOVIMA

$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ TIP C $\qquad \int \frac{3}{x-1}\,dx$ TIPA

$\int \frac{1}{x^2+1}$ TIP B

2. Određeni integral: P6 ; P7

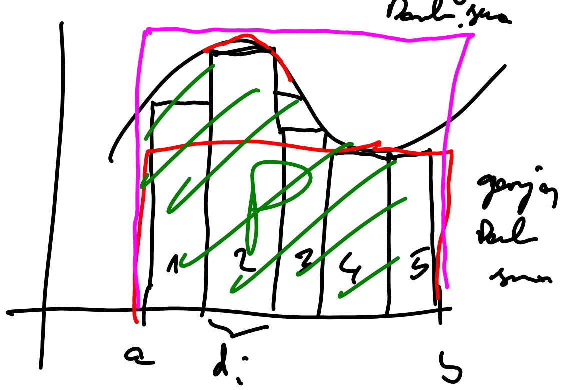
- A Što su Darbouxove sume?
- B Kakva mora biti funkcija da bi se mogle računati Darbouxove sume?
- Što je gornji (ili donji) Darbouxov integral?
- D Što je određeni integral?
- Što određeni integral intuitivno predstavlja?

POVRŠINU

sup (svih donjih Darb. suma)

inf (svih gornjih Darb. suma)

A



donja Darb. suma $\sum m_i d_i$

min inf

gornja Darb. suma $\sum M_i d_i$

max sup

D GORNJA DARB. INT. = DONJI DARB. INT.

PO TADA f INTEGRABILNA

$\int_a^b f(x)\,dx =$

B OGRANIČENA PODINTEGRALNA FUNKCIJA

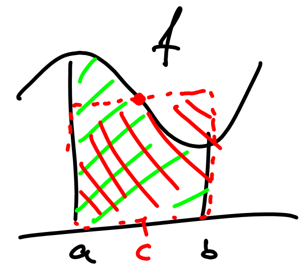
3. Diskutirati osnovni teorem integralnog računa: PG

A) • na koja pitanja želi odgovoriti

B) • pretpostavka teorema

C) • zaključci

D) • Newton-Leibnitzova formula i zašto je važna



KAKO RAČUNATI ODREĐENI INT. BEZ sup i inf?

A) KOJE SU F-JE INTEGRABILNE? ODGOVOR

B) NEPREKIDNA $\Rightarrow$ INTEGRABILNA

C) $\exists c \in [a,b]$ t.d. $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\boxed{F'(x) = f(x)}$

$F(a) = 0$

$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

$F(b) - F(a)$

C) $\int f(x)\,dx = G(x)$ PRIMITIVNA

D) $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

$\Rightarrow$

$\boxed{G(x) = F(x) + C}$

$G(b) - G(a)$

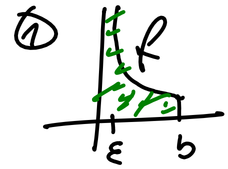
$F(b) \cancel{+c} - (F(a) \cancel{+c}) =$

4. Nepravi integral: P7

NA SEGMENTU OGRANIČENI F-JU

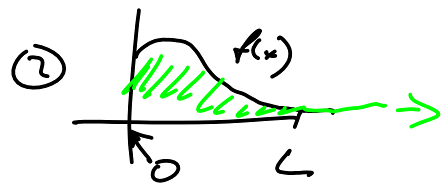
- Koja je razlika između određenog integrala i nepravog integrala?
- Navesti primjer nepravog integrala?
- Kako riješavati nepravi integral?

NA SEGMENTU NEOGRANIČENA F-JA



ili

NEOMEĐENO PODRUČJE INTEGRACIJE



POMOĆU LIMESA!

$$① \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$$② \lim_{L \to +\infty} \int_{0}^{L} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

AKO JE VIŠE "SINGULARITETA" SVE IH TREBA OVAKO "IZOLIRATI".

5. Numerička integracija: P12

- Zašto može biti potrebna numerička integracija? → PRIBLIŽNO IZRAČUNATI $\int_a^b f(x)\,dx$
- Zašto nekad Newton-Leibnitzova formula nije dovoljno dobra?
- Što podrazumijevamo pod greškom aproksimacije?
- Koje numeričke metode integriranja smo spominjali?
  - Koje su njihove formule na segmentu?
  - O čemu ovisi greška u spomenutim metodama aproksimacije?
  - Kako dobiti sve bolju aproksimaciju? SMANJUJEMO PODSEGMENT PODIJELOM SEGMENTA NA VIŠE DIJELOVA
  - Koja je spomenuta formula numeričke integracije najbolja?
- riješiti jednostavan primjer

→ AKO NE ZNAMO PRIMITIVNU FJU.

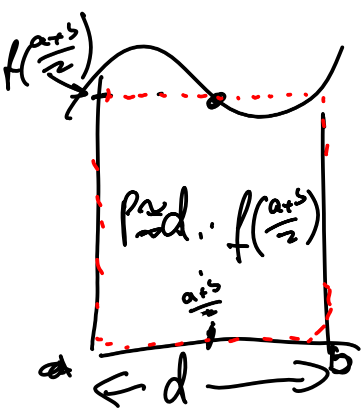
→ AKO ZNAMO VRIJEDNOSTI PODINTEGRALNE F-JE A NE ZNAMO FORMULU

→ AKO NE ZNAMO RAČUNATI SA PRIMITIVNOM

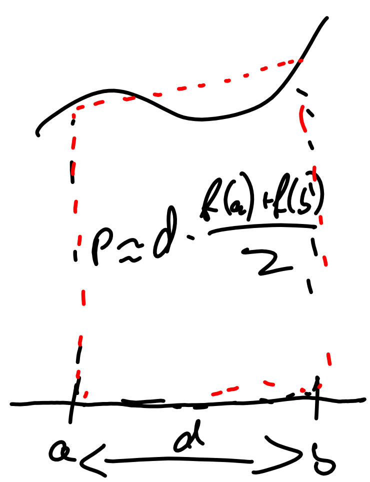
ODSTUPANJE OD TOČNOG REZULTATA

$$\text{relativna greška} = \cancel{\frac{\text{APROKSIMACIJE}}{\text{TOČNOG RJEŠENJA}}} = \frac{\text{APS GREŠKA}}{\text{TOČNO RJ.}} = \frac{\text{TOČNO} - \text{APROKSIMACIJA}}{\text{TOČNO}}$$

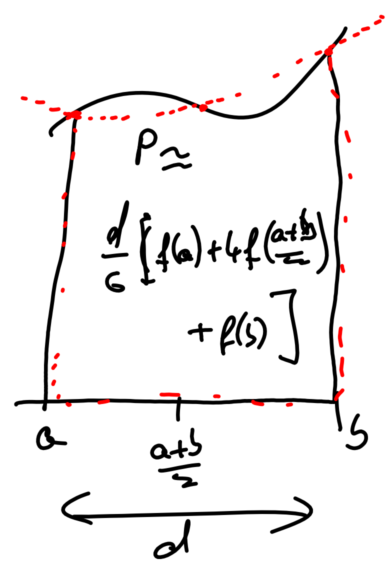
SREDNJA TOČKA



TRAPEZ



SIMPSON



$$\text{greška} \sim d^n \cdot f^{(n)}(c)$$

6. Obične diferencijalne jednadžbe: P3 P4 ← ZADATCI → P10 P11

$y' = f(x)$

- A Što podrazumijevamo pod izrazom ODJ? Kako se neodređeni integral može prikazati kao ODJ 1. reda?
- B Kako se mogu riješavati ODJ 1. reda?
- C Da li postoji neki rezultat koji uz određene uvjete tvrdi da ODJ 1. reda ima rješenje? TEŽE

  DA
- Navesti primjer separirane i linearne ODJ prvog reda i riješiti ih uz zadane početne uvjete.
- Navesti primjer homogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima. Nastavnik će tada zadati desnu stranu, a na studentu je da riješi.

A $\int f(x)\,dx$

ODJ: $\boxed{y'(x) = f(x)}$ RJEŠENJE $y(x)$

B ANALITIČKI, NUMERIČKI, GRAFIČKI

C
$$\boxed{\begin{array}{l} y(a) = b \\ F(y'(x), x) = 0 \\ y' = f(x,y) \end{array}}$$

$x \quad 2Cx \qquad 2Cx^2 \qquad y'(x) = 2Cx$

$x \cdot y'(x) = 2y \; \ldots \; y(x) = Cx^2$

$\boxed{y(0) = 0}$ $x=0$, $y=0$

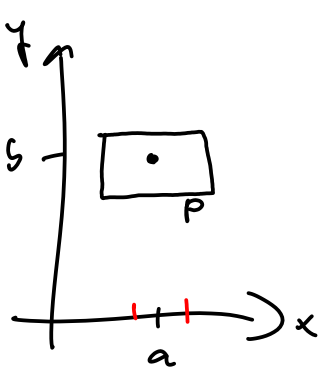
$y'(x) = \frac{2y}{x}$

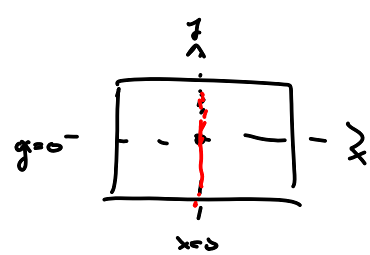
$f(x,y) = \frac{2y}{x}$

PICARDOV TEOREM:

UVJET: f NEPREKIDNA NA P

f ZADOVOLJAVA LIPSCHITZOV UVJET NA P





7. Skalarna funkcija:

P2

$X \subseteq \mathbb{R}^n$

$X \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{R}$

- A) Što znači izraz: skalarna funkcija?
- B) Što je razinska krivulja skalarne funkcije?
- C) Kako možemo vizualizirati skalarnu funkciju?
- D) U danom primjeru pročitati globalna svojstva iz grafički zadane skalarne funkcije.

A) FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI SA REALNIM VRIJEDNOSTI

DOMENA $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

B) $f(x, y, z, \ldots) = c$ ZADANA

SVE TAKVE TOČKE $T(x, y, z, \ldots)$ t.d. $f(T) = c$

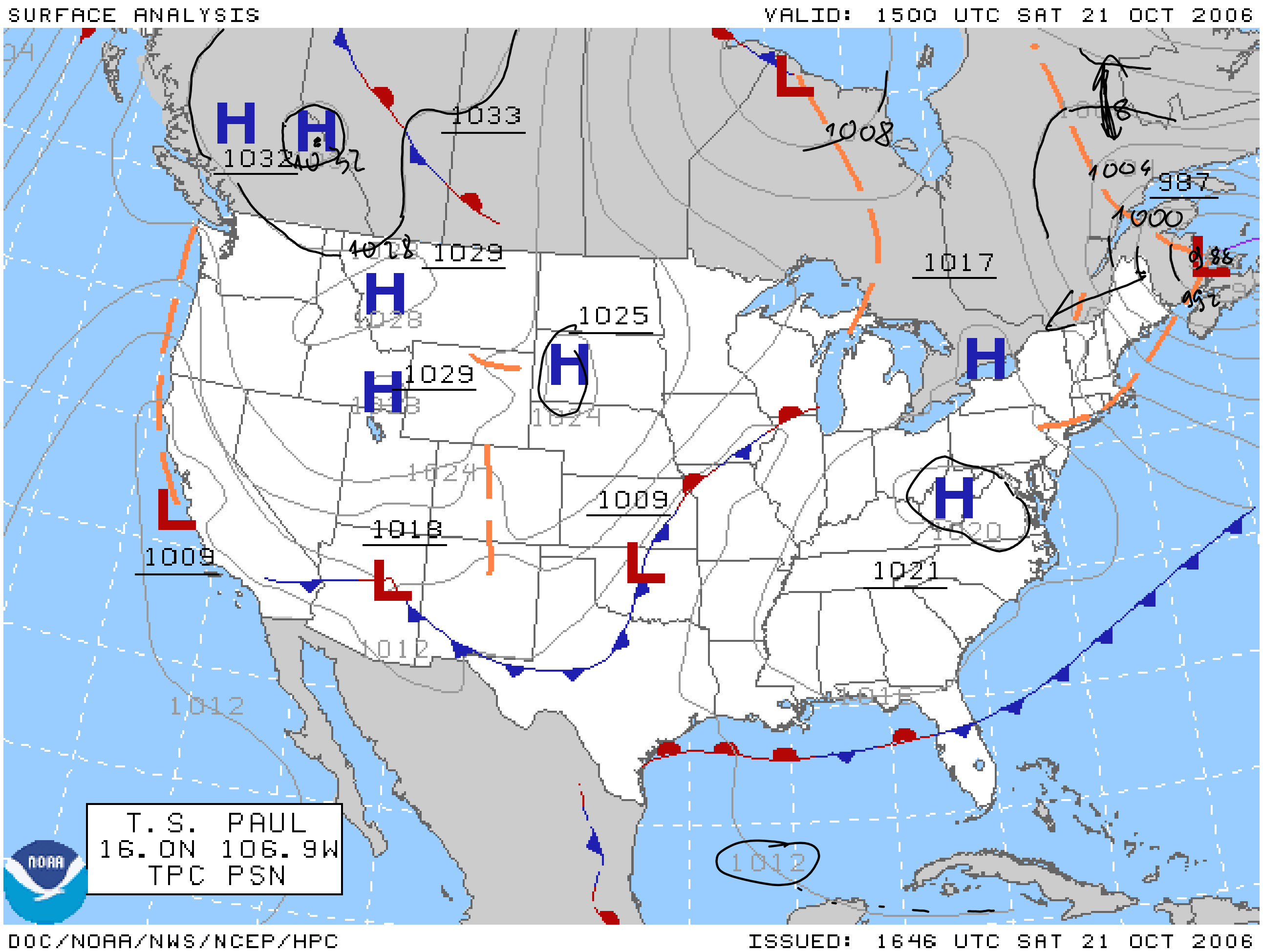
ČINE RAZINSKU KRIVULJU

C) PLOHE U 3D

RAZINSKE KRIVULJE

BOJAMA

D



RAZINSKE KRIVULJE ODGOVARAJU TLAKU ZRAKA

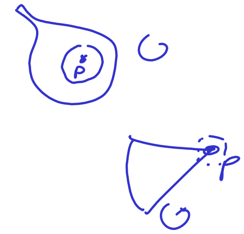
DOMENA: PROSTOR NAD ZEMLJOM KOJEG POKRIVA OVA SLIKA

SLIKA: IZMEĐU OKO 988 DO 1033

P2

8. Limes skalarne funkcije: (TEŽE)

okolina oko p je skup takav da $\exists$ otv. kugla $K(p,\varepsilon) \subseteq O$, $\varepsilon > 0$



A) • Koja je definicija kugle u $\mathbb{R}^n$?

B) • Što znači $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = v$ (definicija)?

C) • Ako postoji $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$ i ako $\mathbf{x}_n \to \mathbf{p}$ koliko tada iznosi $\lim\limits_{\mathbf{x}_n\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}_n)$? $= \lim\limits_{x\to p} f(x)$

B)

$$\lim_{x \to p} f(x) = v$$

mora biti gomilište

domena od f

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ d(p,x) < \delta \Rightarrow d(v, f(x)) < \varepsilon$$

$$|v - f(x)| < \varepsilon$$

$\underbrace{\text{(za svaku okolinu oko } v)}_{\langle v-\varepsilon,\, v+\varepsilon\rangle}$ $\underbrace{\text{(postoji okolina oko } p)}_{O}$ takva da je $f(O) \subseteq \langle v-\varepsilon, v+\varepsilon \rangle$

A)

OTVORENA KUGLA

$$K(x,\varepsilon) = \{ y : d(x,y) < \varepsilon \}$$

9. Neprekidnost skalarnih funkcija: P2 ; P10

A • Ako je skalarna funkcija neprekidna u točki **p** koliko iznosi $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$? $= f(p)$

B • Navesti neka svojstva neprekidnih skalarnih funkcija.

C • Kako ispitati da li je skalarna funkcija neprekidna?

B - OMEĐENA NA OMEĐENOM I ZATVORENOM SKUPU

- AKO JE NEKOG PREDZNAKA U TOČKI x ONDA $\exists$ OKOLINA OKO x T.D. JE FUNKCIJA ISTOG PREDZNAKA NA TOJ OKOLINI

C · AKO JE ZBROJ, RAZLIKA, UMNOŽAK I KOMPOZICIJA NEPREKIDNIH ONDA JE NEPREKIDNA, TAKOĐER RAZLOMAK GDJE NAZIVNIK NIJE NULA, PREKID NA SJECIŠTU RAZINSKIH KRIVULJA

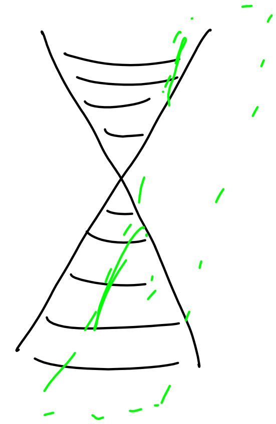
- limes skalarne funkcije:

$$f(p) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to p} f(x)$$

10. Navesti sve čunjosječnice i za svaku dati primjer jednadžbe koja je zadaje i osnovna svojstva.

KRIVULJE 2. REDA

PRESJEK RAVNINE I KONUSA



$e \in \langle 0,1 \rangle$ ELIPSA (KRUŽNICA) $(e=0)$

$e > 1$ HIPERBOLA

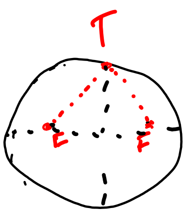
$e = 1$ PARABOLA

$x^2+y^2=1$

$S(0,0)$

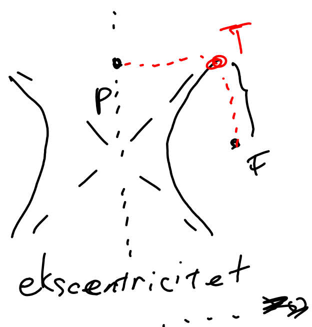
$R=1$

e ∈



$x^2-y^2=1$

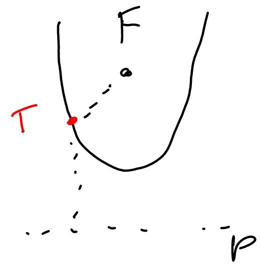
ASIMPTOTE



eksentricitet

$d(T,p)\, e = d(T,F)$

$y=x^2$



$d(T,F) = d(T,p)$

P5

11. Navesti nekoliko ploha drugog reda (kvadrika): naziv + primjer jednadžbe koja je zadaje.

P5

ELIPSOID

PR. KUGLA

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

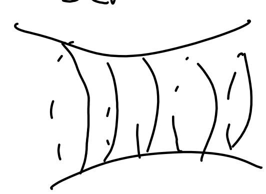
$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{kugla}$$

HIPERBOLOID

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

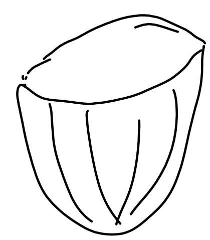
DUOKRILNI

JEDNOKRILNI



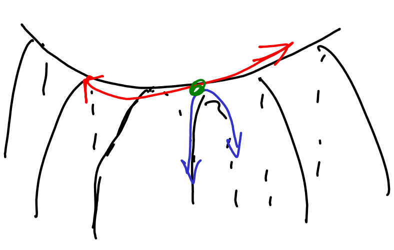
⇒ PARABOLOID ELIPTIČNI

$$(y-y_0)^2=2a(x-x_0)$$



⇒ PARABOLOID HIPERBOLIČNI

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\pm(z-z_0)=0$$



12. Parcijalne derivacije:

78

- Što je parcijalna derivacija skalarne funkcije?
- Navesti jedan primjer.
- O čemu govori Schwartzov teorem? Navesti primjer.

u (0,0)

$$\partial_{xy} f(x,y) = \frac{x}{y} \neq \partial_{yx} f(x,y$$

PRETPOSTAVKA: $\partial_x f$ i $\partial_y f$ POSTOJATI NA OKOLINI OKO (x_0, y_0)

$\partial_{xy} f$ NEPREKIDNA u (x_0, y_0)

ZAKLJUČAK: $\partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_{yx} f(x_0, y_0)$

P8 : P9

13. Diferencijabilnost skalarne funkcije:

A
- Kada je funkcija diferencijabilna i što je diferencijal? Navesti primjer.
- Koja je veza diferencijala u točki sa tangencijalnom ravninom na graf funkcije u točki? Kako pronaći tangencijalnu ravninu?

C
- Kako ispitati da li je skalarna funkcija diferencijabilna?

DIFERENCIJAL JE OVO:

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(T_0)}{\partial y} \cdot y = df(T_0)$$

ALI SAMO KADA

$$\lim_{T \to T_0} \frac{f(T) - \Big[\overbrace{\boxed{f(T_0) + df(T_0)(T - T_0)}}^{\text{aprox. tang. ravnina}}\Big]}{d(T, T_0)} = 0$$

KADA OVO VRIJEDI $\Leftarrow$ f JE diferencijabilna

C SLIČNO KAO ZA ISPITIVANJE NEPREKIDNOSTI UZ RAZUMNE ISPRAVKE ZA DIFERENCIJABILNOST.

14. Lokalni ekstremi skalarne funkcije:

$$\partial_{x_i} f(x_1, x_2, \dots) = 0$$

- Koji je nužan uvjet za lokalni ekstrem skalarne funkcije?
- Koji dovoljan uvjet za lokalni ekstrem skalarne funkcije 2 varijable je obrađen na predavanju i korišten na seminarima?

$T(x_0, y_0)$ . . . . $f(x, y)$ $\quad \partial_{xx} f(x_0, y_0) \neq 0$ ✓

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} > 0$$ ✓