Numerička integracija

Predavanje 12

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

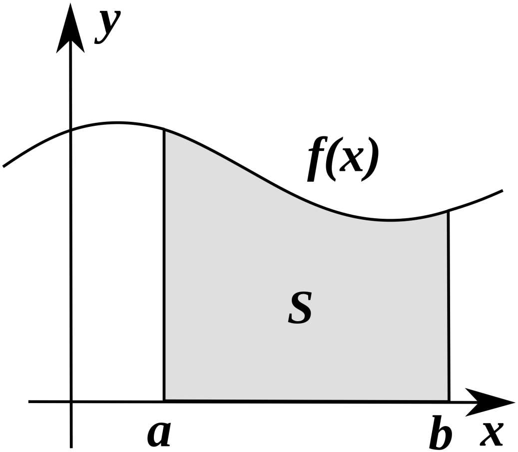
22. svibnja 2013.

Sadržaj predavanja

Zašto $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ nekad nije dovoljno dobro?

- f može biti poznat samo za određene parametre, dobiven uzorkovanjem i sl.,
- poznata formula za f, ali teško ili nemoguće pronaći elementarnu primitivnu funkciju. Npr. $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$
- znamo F primitivnu funkciju od f, ali možda je lakše numerički aproksimirati površinu nego izračunati primitivnu funkciju. Npr. primitivna funkcija je dana kao funkcijski red ili zahtjeva neke specijalne funkcije koje nemamo na kalkulatoru

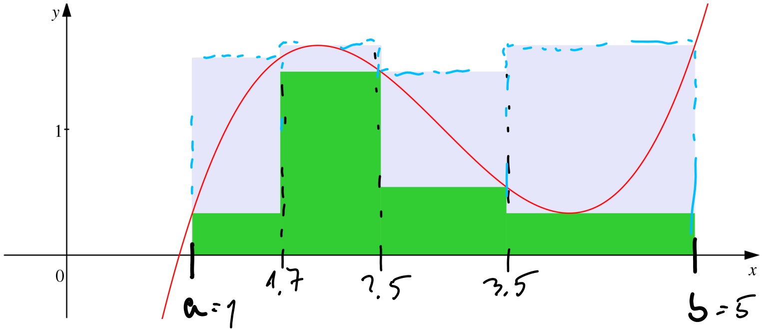
Numerička integracija



Slika: Numerička integracija je traženje **numeričke aproksimacije** površine područja označenog slovom S.

Najjednostavnija ocjena:

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\max_{[a,b]} f$$

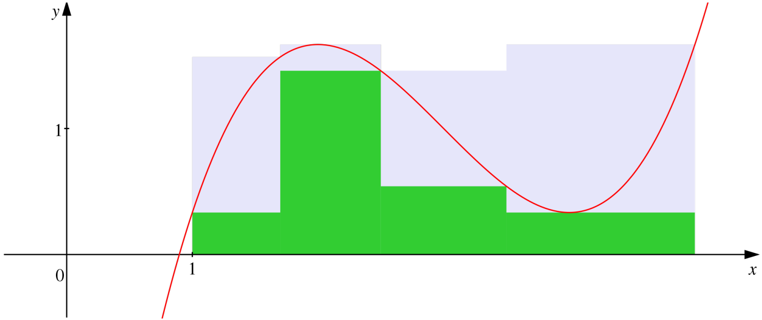


Slika: Donje (zeleno) i gornje (zeleno+plavkasto) Darbouxove sume funkcije $f(x) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t - 5$ za razdiobu segmenta na 4 dijela $R = (1, 1.7, 2.5, 3.5, 5)$.

Prednosti: točno određeni segment u kojem leži vrijednost

Mane: teško odrediti min i max, gruba ocjena, vrlo neprecizna

Izračunati aproksimaciju površine Darbouxovim sumama...



Slika: Donje (zeleno) i gornje (zeleno+plavkasto) Darbouxove sume funkcije $f(x) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t - 5$ za razdiobu segmenta na 4 dijela $R = (1, 1.7, 2.5, 3.5, 5)$.

Prednosti: točno određeni segment u kojem leži vrijednost, mogućnost proizvoljnog povećanja preciznosti profinjenjem razdiobe
Mane: teško odrediti min i max, općenito spora konvergencija (greška$\sim$ širina podsegmenata $= \frac{1}{n}$)

Greška aproksimacije

Neka je dana neka vrijednost v i njena aproksimacija v_{approx}.

Apsolutna greška je $|v - v_{approx}|$.

$99 \sim 100$

Relativna greška je $\dfrac{|v - v_{approx}|}{v} = 1 - \dfrac{v_{approx}}{v}$.

$1 - \dfrac{99}{100} = 0.01$

Postotna greška je $\dfrac{v - v_{approx}}{v} \cdot 100\% = \left(1 - \dfrac{v_{approx}}{v}\right) \cdot 100\%$

1%

Greška aproksimacije

Točna greška je u praksi uvijek nepoznata. Koristimo ocjene greške:

- maksimalnu grešku,
  - npr. ocjene pomoću min i max
- red konvergencije ovisi o širini segmenata $d \sim \frac{1}{n}$,
  - npr. kada profinjujemo razdiobu segmenta na n jednakih podintervala širine d, greška između Darbouxove sume i integrala integrabilne funkcije teži k nuli usporedivo kao niz $d \sim \frac{1}{n}$
  - $d^p = \frac{1}{n^p}$ brže konvergira k nuli čim je potencija p veća, bolje numeričke metode

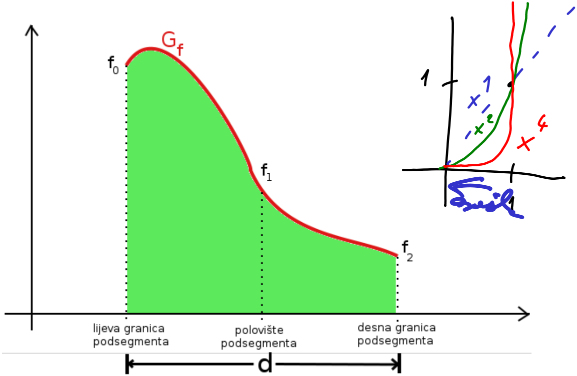
Pregled numeričkih metoda

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}\left(f_0 + f_2\right)$	$S = \frac{d}{6}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Želimo nekim jednostavnim postupkom približno odrediti zelenu površinu ispod grafa funkcije.

1

a



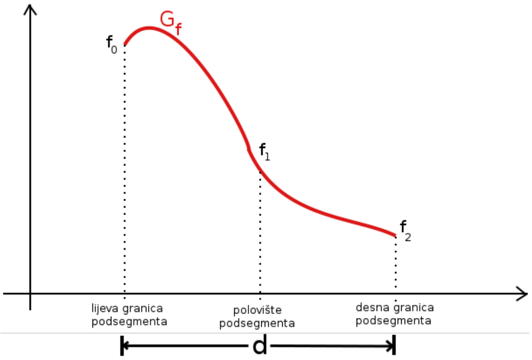
1

b

Pregled numeričkih metoda

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

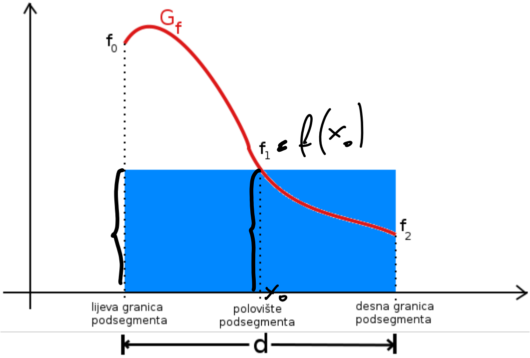
Obrađujemo samo metode koje segment dijele na n jednakih podsegmenata duljine d. Možemo koristiti vrijednosti funkcije u krajevima i u sredini podsegmenta.



Aproksimacija pravokutnikom određenim srednjom točkom

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Vrlo je jednostavno aproksimirati površinu sa pravokutnikom širine d, a visine određene vrijednošću funkcije na pola podsegmenta. Vrijednosti funkcije na krajevima podsegmenta ova metoda ne koristi.

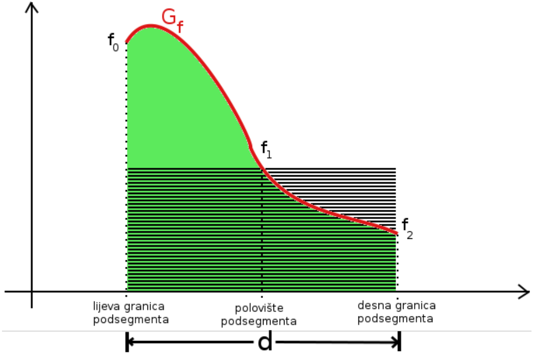


Aproksimacija pravokutnikom određenim srednjom točkom

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

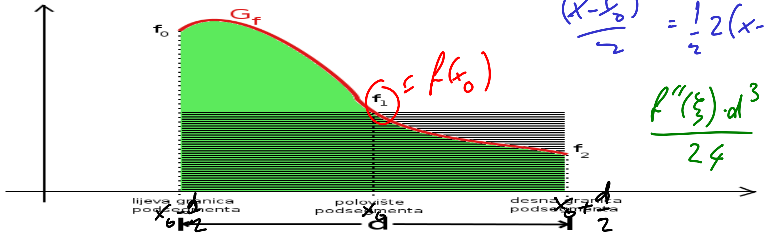
Greška je određena sa d^2. Kada je d vrlo mali ova aproksimacija je mnogo bolja od aproksimacije maksimumom ili minimumom.

a



1
5

Zašto je greška $\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24}\cdot d^2$?



$\left(\frac{(x-x_0)^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}2(x-x_0)'\cdot 1$

$\frac{f''(\xi)\cdot d^3}{24}$

$= f(x_0)$

a b

$x_0-\frac{d}{2}$ x_0 $x_0+\frac{d}{2}$

Taylorov razvoj oko polovišta x_0 podsegmenta $\left[x_0-\frac{d}{2}, x_0+\frac{d}{2}\right]$:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2}_{\text{tzv. ostatak}},\quad \xi\in\left[x_0-\frac{d}{2}, x_0+\frac{d}{2}\right] \quad \frac{1}{12}d^3$$

Integracija:

$$\int_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d} f(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d} dx + f'(x_0)\int_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d}(x-x_0)\,dx + \frac{f''(\xi)}{2}\int_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d}(x-x_0)^2\,dx$$

$$= f(x_0)\Big[x\Big]_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d} + f'(x_0)\cancel{\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d}} + \left[\frac{(x-x_0)^3}{3}\right]_{x_0-\frac12 d}^{x_0+\frac12 d}$$

$x_0+\frac12 d - x_0 + \frac12 d$

$\frac18 d^2 - \frac18 d^2$

$\frac13\left(\frac18 d^3+\frac18 d^3\right)$

$f(x_0)\cdot d = M$

$=0$

$\frac{1}{12}d^3$

Zašto je greška $\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$?

Segment $[a, b]$ na kojem integriramo dijelimo na n podsegmenata duljine $d = \frac{b-a}{n}$...

n podsegmenata

greška $\frac{f''(\xi)\cdot d^3}{24}$

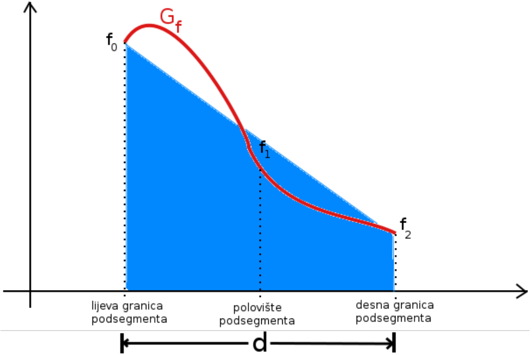
$b - a = n \cdot d$

$$n \cdot \frac{f''(\xi)\cdot d^3}{24} = \underbrace{n \cdot d}_{(b-a)} \cdot \frac{f''(\xi)\cdot d^2}{24} \quad \checkmark$$

Aproksimacija trapezom

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

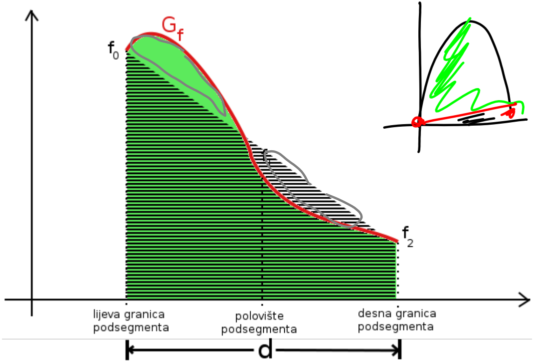
Intuitivno je aproksimirati površinu s trapezom širine d i vrhovima određenima vrijednošću u lijevom i desnom kraju podsegmenta. Vrijednost funkcije u sredini nije iskorištena.



Aproksimacija trapezom

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

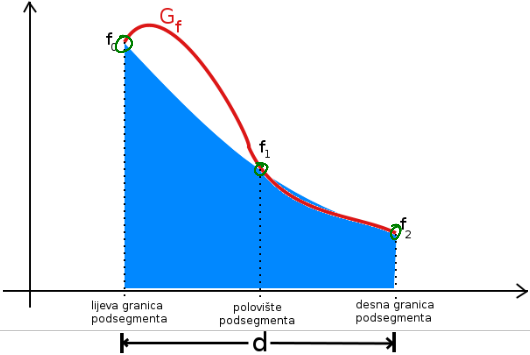
Greška je određena sa d^2, usporedivo sa metodom srednje točke. Kada je d vrlo mali ova aproksimacija je mnogo bolja od aproksimacije maksimumom ili minimumom.



Simpsonova formula

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

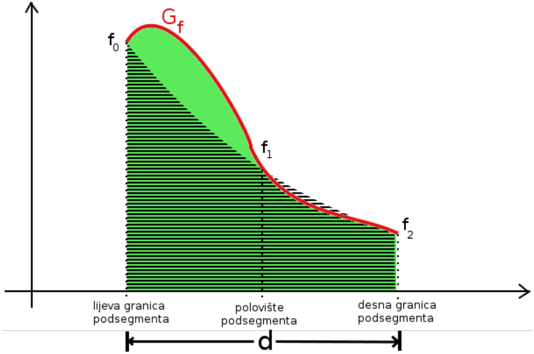
Simpsonova formula provlači parabolu kroz 3 istaknute točke i računa površinu ispod te parabole.



Simpsonova formula

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Kada je d jako malen, a graf funkcije gladak (nije izlomljen) greška se ponaša poput d^4 što daje aproksimaciju superiornu ranije spomenutima.



Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b - a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maksimalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b - a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b - a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.

Npr. ako:

- kod trapezne formule

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b - a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.

Npr. ako:

- želimo grešku aproksimacije manju od E
- kod trapezne formule

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}\left(f_0 + f_2\right)$	$S = \frac{d}{6}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b - a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.

Npr. ako:

- poznajemo M_2 tako da $\left|\max f^{(2)}\right| \leq M_2$ i
- želimo grešku aproksimacije manju od E
- kod trapezne formule

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b-a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.

Npr. ako:

- poznajemo M_2 tako da $\left|\max f^{(2)}\right| \leq M_2$ i
- želimo grešku aproksimacije manju od E
- kod trapezne formule
- zbog $E \leq \frac{(b-a)M_2}{12} d^2$

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b - a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.

Npr. ako:

- poznajemo M_2 tako da $\left|\max f^{(2)}\right| \leq M_2$ i
- želimo grešku aproksimacije manju od E
- kod trapezne formule
- zbog $E \leq \frac{(b-a)M_2}{12} d^2$
- potrebno je segment podijeliti u dijelove duljine $d \leq \sqrt{\frac{12E}{(b-a)M_2}}$

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}\left(f_0 + f_2\right)$	$S = \frac{d}{6}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Maximalna greška ovisi o

- duljini segmenata $b-a$,
- duljini podsegmenata (d) na koje je podijeljen, te
- nekoj višoj derivaciji (crveno).

Član s derivacijom može se ograničiti ekstremima te derivacije na segmentu.
U praksi često derivacija nije poznata!

Npr. ako:

- poznajemo M_2 tako da $\left|\max f^{(2)}\right| \leq M_2$ i
- želimo grešku aproksimacije manju od E
- kod trapezne formule
- zbog $E \leq \frac{(b-a)M_2}{12} d^2$
- potrebno je segment podijeliti u dijelove duljine $d \leq \sqrt{\frac{12E}{(b-a)M_2}}$

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Ukoliko unutar podsegmenta funkcija ima skok ili lom greška raste.

Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Ukoliko unutar podsegmenta funkcija ima skok ili lom greška raste.
Treba prelomiti segment upravo na problematičnim mjestima.

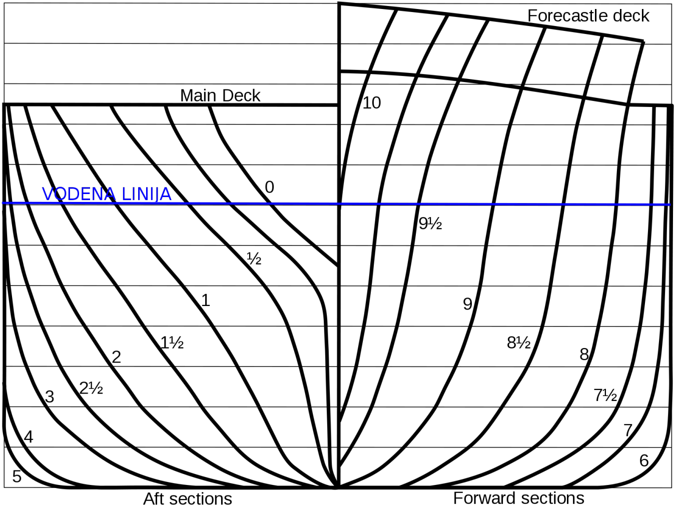
Ocjena greške

Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

Ukoliko unutar podsegmenta funkcija ima skok ili lom greška raste.
Treba prelomiti segment upravo na problematičnim mjestima.

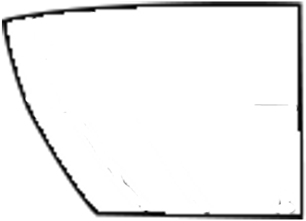
Ukoliko je funkcija izlomljena (nema prvu derivaciju) ili nema drugu derivaciju treba izbjegavati Simpsonovu metodu računanja površine.

Primjer: površina brodskog rebra iznad vodene linije



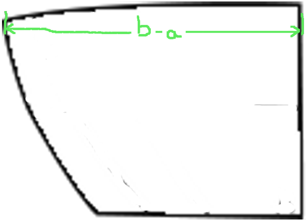
Slika: Linije brodskih rebara s istaknutom vodenom linijom

Primjer površine brodskog rebra



Npr. zadan je profil brodskog rebra iznad vodene linije:

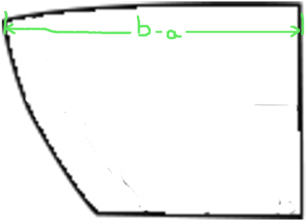
Primjer površine brodskog rebra



$b - a = 750$, 6 dijelova, $d_i = \frac{750}{6} = 125$

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine

Primjer površine brodskog rebra

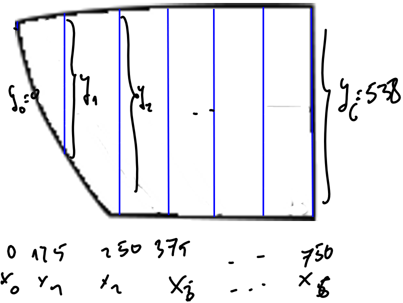


i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	125	250	375	500	625	750
y_i	24	354	520	522	528	533	538

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine

Primjer površine brodskog rebra

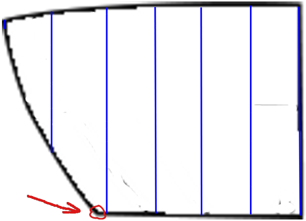


i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	125	250	375	500	625	750
y_i	24	354	520	522	528	533	538

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine
- Jednolika raspodjela nije optimalna zbog "loma".

Primjer površine brodskog rebra

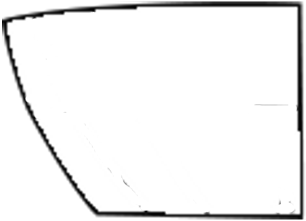


i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	125	250	375	500	625	750
y_i	24	354	520	522	528	533	538

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine
- Jednolika raspodjela nije optimalna zbog "loma".
- Na označenom mjestu aproksimacija pravcem i parabolom nije primjerena.

Primjer površine brodskog rebra

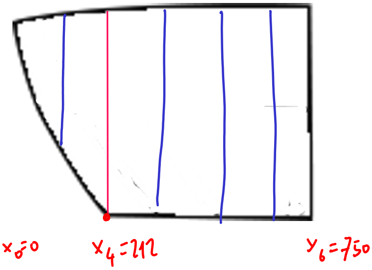


i	0						6
x_i	0						750
y_i	24						538

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.
- Mnogo je bolje od početka podijeliti segment na mjestu "loma".

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine
- Jednolika raspodjela nije optimalna zbog "loma".
- Na označenom mjestu aproksimacija pravcem i parabolom nije primjerena.

Primjer površine brodskog rebra

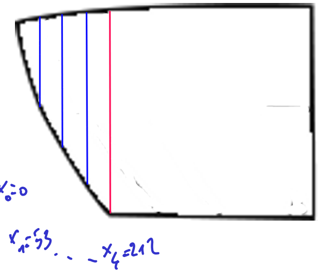


i	0				4		6
x_i	0				212		750
y_i	24				518		538

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine
- Jednolika raspodjela nije optimalna zbog "loma".
- Na označenom mjestu aproksimacija pravcem i parabolom nije primjerena.

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.
- Mnogo je bolje od početka podijeliti segment na mjestu "loma".
- Svi podsegmenti neće biti iste duljine, ali aproksimacija će biti bolja.

Primjer površine brodskog rebra

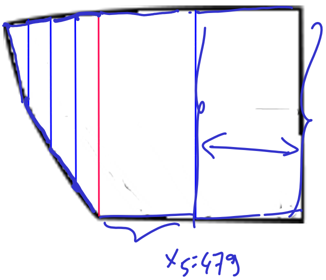


i	0	1	2	3	4		6
x_i	0	53	106	159	212		750
y_i	24	220	336	441	518		538

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine
- Jednolika raspodjela nije optimalna zbog "loma".
- Na označenom mjestu aproksimacija pravcem i parabolom nije primjerena.

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.
- Mnogo je bolje od početka podijeliti segment na mjestu "loma".
- Svi podsegmenti neće biti iste duljine, ali aproksimacija će biti bolja.
- Lijevo je profil nepravilniji (derivacije!) i stoga uvodimo više podsegmenata (iste) duljine.

Primjer površine brodskog rebra

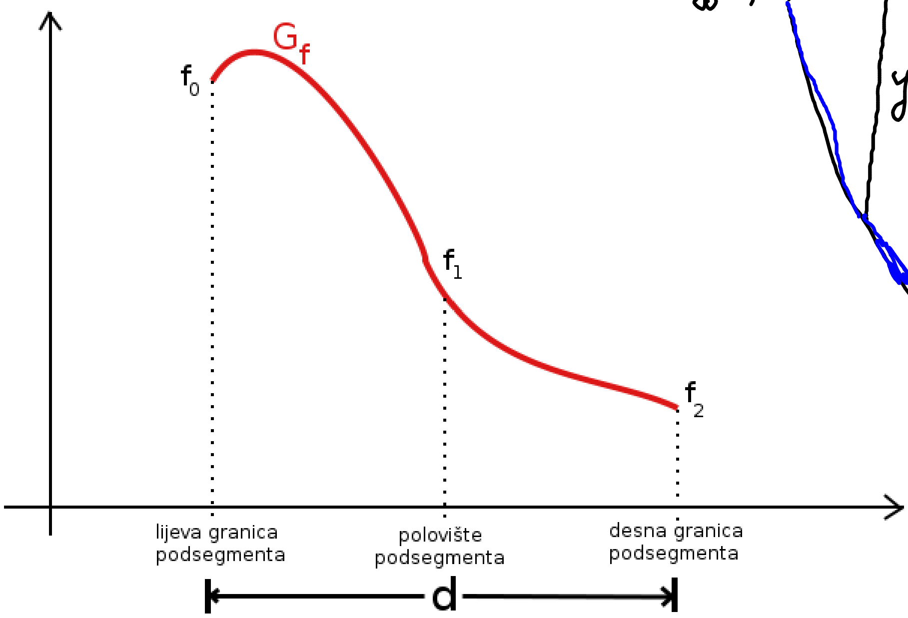


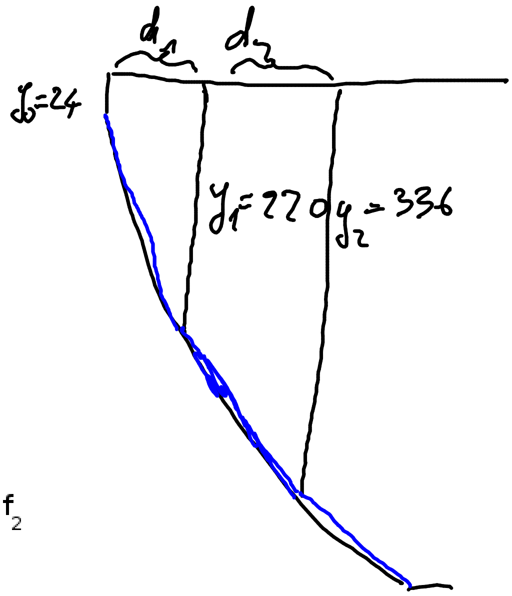
i	0 d_1	1 d_2	2 d_3	3 d_4	4 d_5	5 d_6	6
x_i	0	53	106	159	212	479	750
y_i	24	220	336	441	518	528	538

- Jednolika raspodjela dijeli segment na dijelove jednake duljine
- Jednolika raspodjela nije optimalna zbog "loma".
- Na označenom mjestu aproksimacija pravcem i parabolom nije primjerena.

- U tablicu upisujemo visinu rebra (y_i) na poziciji udaljenoj x_i slijeva.
- Mnogo je bolje od početka podijeliti segment na mjestu "loma".
- Svi podsegmenti neće biti iste duljine, ali aproksimacija će biti bolja.
- Lijevo je profil nepravilniji (derivacije!) i stoga uvodimo više podsegmenata (iste) duljine.
- Desno se profil malo mijenja i stoga manje dijelova (druge duljine).

Numerička integracija





Metoda	srednja točka	trapez	Simpson
Formula	$M = d \cdot f_1$	$T = \frac{d}{2}(f_0 + f_2)$	$S = \frac{d}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
Max. greška	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{24} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(2)}(\xi)}{12} \cdot d^2$	$\frac{(b-a)f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot d^4$

$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6$

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	53	106	159	212	479	750
y_i	24	220	336	441	518	528	538

$d_1 = (53-0) = 53$

$d_2 = (106-53) = 53$

$d_3 = \dots = 53$

$d_4 = \dots = 53$

$d_5 = (479-212) = 267$

$d_6 = 750-479 = 271$

TRAPEZNA FORMULA

$T_1 = \frac{53}{2}(24+220) = 6466$

$T_2 = \frac{53}{2}(220+336) = 14734$

$T_3 = \frac{53}{2}(336+441) = 20590,5$

$T_4 = \frac{53}{2}(441+518) = 25413,5$

$T_5 = \frac{267}{2}(518+528) = 139641$

$T_6 = \frac{271}{2}(528+538) = 144443$

$$T = \sum_{i=1}^{6} T_i = 351288$$

$$P \approx 351288$$

Numerička integracija: $\displaystyle\int_0^3 \sin\left(x^2\right) + 2\,\mathrm{d}x$

$= \int \sin(x^2)\,dx = \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x = \sqrt{t} \end{array}$

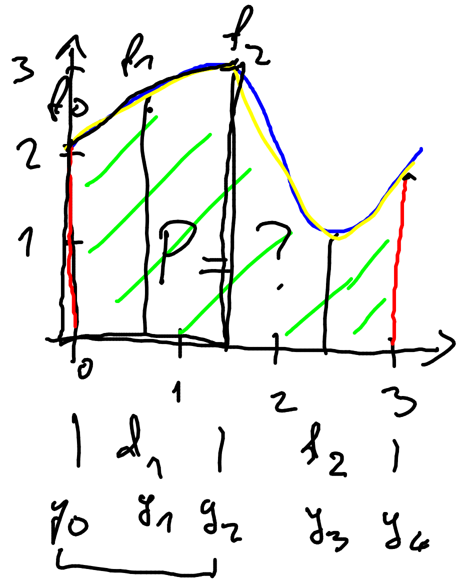
$= \int \sin t \,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = ???$

- Koristimo raspodjelu na podsegmenata () dok nismo zadovoljni točnošću
  - 2, 4, 8, . . .
- Ukoliko donekle poznajemo skicu grafa funkcije možemo preskočiti raspodjele segmenta koji očigledno neće dati rezultat tražene točnosti
- Demonstrirati ćemo ocjenu greške:
  - a posteriori (iz iterativnog postupka)
  - a priori (iz teoretske ocjene metode)

SIMPSONOVA METODA APROKSIMACIJE $f(x)=\sin(x^2)+2$

$\boxed{n=4}$

Primjer 2. $\int_0^3 \sin(x^2)+2\,dx = 6.794 \pm 1\%$



i	x_i	$y_i=f(x_i)$
0	0	2
1	0.75	2.53330
2	1.5	2.77807
3	2.25	1.06067
4	3	2.41212

$d_1 = 1.5$ (i = 0–2), $d_2 = 1.5$ (i = 2–4)

$$S_1 = \frac{1.5}{6}(2+4*2.53330+2.77807) = 3.72782$$
$$S_2 = \frac{1.5}{6}(2.77807+4*1.06067+2.41212) = 2.35822$$

$$S = \sum_{i=1}^{2} S_i = S_1 + S_2 = \boxed{6.08604}$$

$d = 1.5$

$\boxed{n=8}$

i	x_i	y_i
0	0	2
1	0.375	2.14016
2	0.75	2.53330
3	1.125	2.95380
4	1.5	2.77807
5	1.875	1.63463
6	2.25	1.06067
7	2.625	2.57077
8	3	2.41212

$d_1 = 0.75$, d_2, d_3, d_4

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 1.63674 \\ S_2 &= 2.14082 \\ S_3 &= 1.29716 \\ S_4 &= 1.71948 \end{aligned}\right\} S = \sum_{i=1}^{4} S_i = \boxed{6.79420}$$

$d = 0.75$

RAZLIKA $S(n=8) : S(n=4) = 0.70816$

PROCJENA JE DA $S(n=8)$ MNOGO BOLJE APROKSIMIRA TRAŽENI ODREĐENI INTEGRAL

STOGA JE GREŠKA APROKSIMACIJE $S(n=4)$ OKO 0.7

PROCJENA PONAŠANJA GREŠKA $\sim \frac{K}{n^4} = \frac{K}{2^4} = \frac{K}{16} \Rightarrow \frac{K}{16} \simeq 0.7$

$\Rightarrow K \simeq 11.2$

A ZA $S(n=8)$ GREŠKA $\sim \frac{K}{n^4} = \frac{K}{4^4} = \frac{K}{256} \simeq \frac{11.2}{256} = 0.045$

RELATIVNA GREŠKA JE OKO $\frac{0.045}{6.794} = 0.65\%$

$f' = 2x\cos(x^2)$

$f'' = \dots$

$f''' = \dots$

$$f^{(4)}(x) = \dots = \underbrace{-4\sin(x^2)}_{\leq 4} \underbrace{- 8x^2\cos(x^2)}_{\leq 8\cdot 9} \underbrace{- 8\sin(x^2)}_{\leq 8} \underbrace{- 16x^2\cos(x^2)}_{\leq 16\cdot 9}$$
$$\underbrace{- 24x^2\cos(x^2)}_{\leq 24\cdot 9} + \underbrace{16x^4\sin(x^2)}_{\leq 16\cdot 81}$$

$x \in [0,3]$

$x^2 \in [0,9]$

$x^3 \in [0,27]$

$x^4 \in [0,81]$

$$\max_{x\in[0,3]} |f^{(4)}(x)| \leq 1740$$

$$\text{MAX. GREŠKA} \leq \frac{3\cdot 1740}{2880} \cdot 0.75^4 = 0,57$$

$$\text{MAX. REL. GREŠKA} \leq \frac{0.57}{6.794} = 8\%$$

TOČNO RJEŠENJE (WOLFRAMALPHA.COM) 6.77356

$$\text{APS. GREŠKA} = |6.77356 - 6.79420| = 0.02064$$

$$\text{REL. GREŠKA} = \frac{0.02064}{6.77356} \approx 0.3\%$$