Još o ODJ

Matematika II, Predavanje 11

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

15. svibnja 2013.

Sadržaj predavanja

Definicija: ODJ

Kod obične diferencijalne jednadžbe *n*-tog reda nepoznanica je funkcija jednog parametra , a jednadžba opisuje međuovisnost:

- nepoznanice ,
- njene prve derivacije ,
- . . . ,
- njene *n*-te derivacije ,
- zadanih veličina ovisnih o parametru

Definicija: ODJ

Kod obične diferencijalne jednadžbe n-tog reda nepoznanica je funkcija jednog parametra $y(x)$, a jednadžba opisuje međuovisnost:

- nepoznanice y,
- njene prve derivacije y',
- $\ldots$,
- njene n-te derivacije $y^{(n)}$,
- zadanih veličina ovisnih o parametru x

Spomenutu međuovisnost možemo zapisati uz pomoć neke funkcije F kao

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

ili uz pomoć neke druge funkcije G kao

$$G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

Metode analitičkog riješavanja ODJ 1. reda

Tip	Naziv
$y' = g(x) \cdot h(y)$	Odjeljive (separirane) varijable
$y' + g(x) \cdot y = h(x)$	Linearna ODJ 1. reda
(vidi udžbenik)	Homogena ODJ. 1. reda
(vidi udžbenik)	Egzaktna ODJ
...	...

Svaka metoda analitičkog riješavanja odgovara samo jednom tipu ODJ. Tipova ima bezbroj...

Metode analitičkog riješavanja ODJ 1. reda

Tip	Naziv
$y' = g(x) \cdot h(y)$	Odjeljive (separirane) varijable
$y' + g(x) \cdot y = h(x)$	Linearna ODJ 1. reda
(vidi udžbenik)	Homogena ODJ. 1. reda
(vidi udžbenik)	Egzaktna ODJ
...	...

Svaka metoda analitičkog riješavanja odgovara samo jednom tipu ODJ. Tipova ima bezbroj...

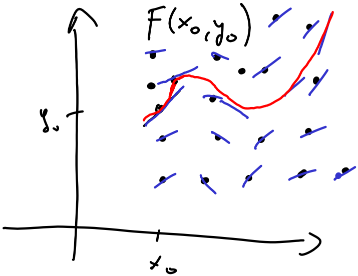
Kako riješiti ODJ 1. reda ako ne poznamo tip i način analitičkog rješavanja?

Polje smjerova

Ako je funkcija $y = f(x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$y' = F(x,y),$$

koje prolazi nekom točkom (x_0, y_0), tada je smjer tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0) dan upravo s $F(x_0, y_0)$. Kako se svaka derivabilna funkcija u maloj okolini odabranog argumenta ponaša kao tangenta, to se i rješenje $y = f(x)$ u okolini točke (x_0, y_0) ponaša približno slično kao pravac koji prolazi kroz točku (x_0, y_0) i ima koeficijent smjera $F(x_0, y_0)$.



skica

Polje smjerova

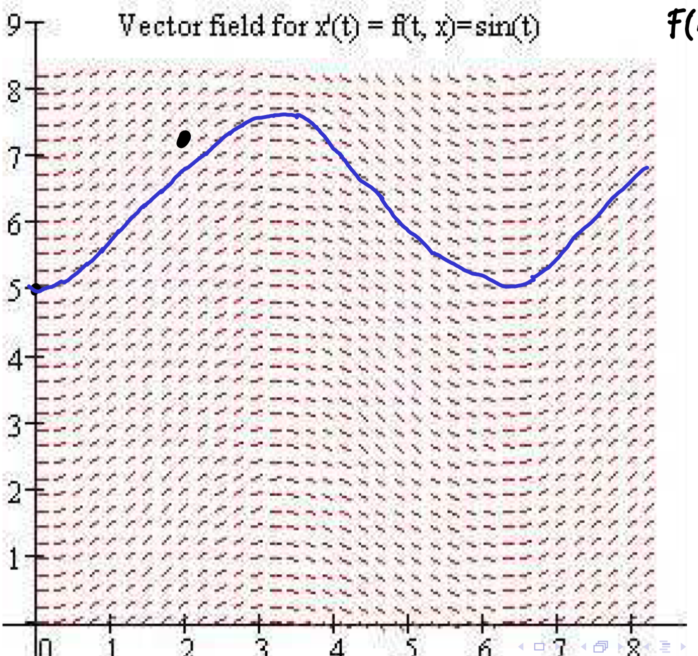
Temeljem ovog razmatranja možemo napraviti sljedeće:

- odaberimo skup pravilno raspoređenih točaka (x, y) u onom dijelu ravnine u kojem tražimo rješenje diferencijalne jednadžbe,
- kroz svaku od odabranih točaka nacrtamo mali dio pravca (segment) s koeficijentom smjera $F(x, y)$.

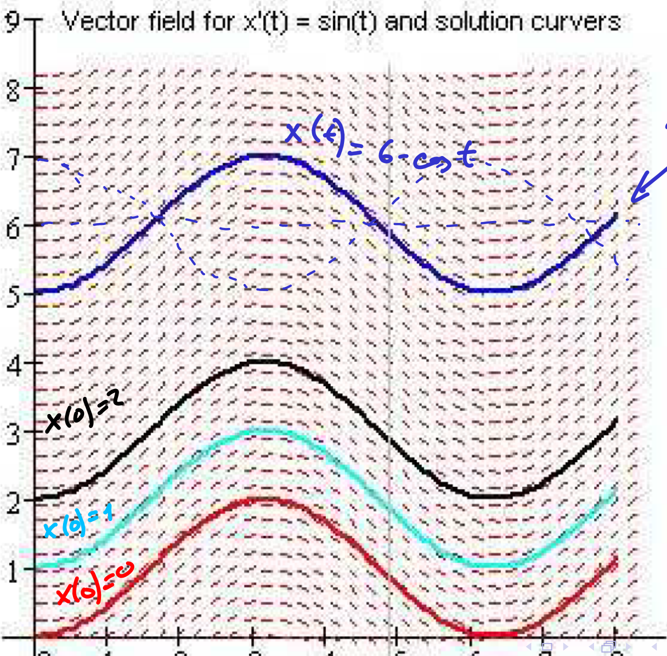
Na taj način dobili smo **polje smjerova** (*polje izoklina*) diferencijalne jednadžbe $y' = F(x, y)$. Polje smjerova nam najčešće daje dobru ideju o izgledu rješenja - krenemo li od početnog uvjeta, možemo skicirati krivulju $y = f(x)$ koristeći svojstvo da nam u svakoj točki nacrtani segment daje smjer kretanja krivulje.

Grafički riješiti ODJ $x' = \sin t$ uz početni uvjet $y(0) = 5$

$f(t,x) = \sin t$



Grafički riješiti ODJ $x' = \sin t$ uz početni uvjet $x(0) = 5$



TOČNO RJEŠENJE

$x' = \sin t \; / \int dt$

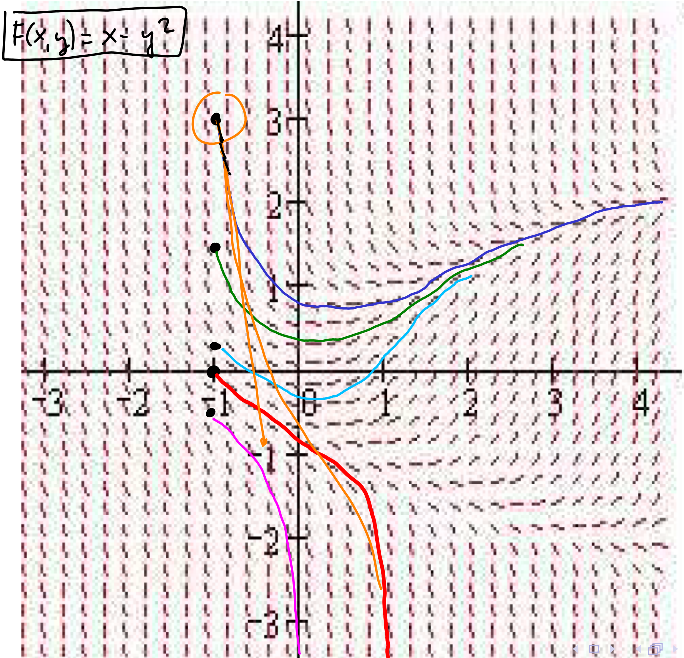
$x(t) = -\cos t + C$

$5 = x(0) = -\cos 0 + C$

$6 = C$

$x(t) = 6 - \cos t$

Primjer: polje smjerova za $y' = x - y^2$



Riješiti navedenu ODJ za svaki od navedenih početnih uvjeta zasebno:

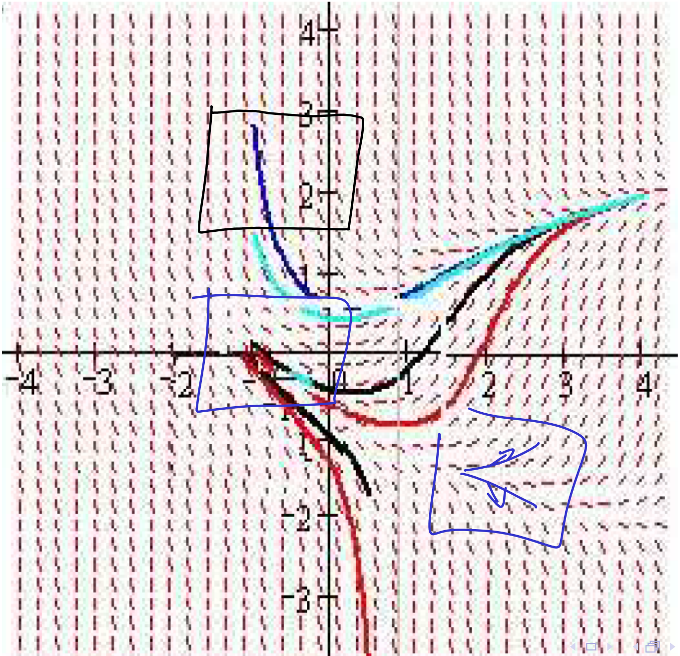
$y(-1) = 3$

.

$y(-1) = 1.5$

$y(-1) = 0$

Primjer: polje smjerova za $y' = x - y^2$



Riješiti navedenu ODJ za svaki od navedenih početnih uvjeta zasebno:

$y(-1) = 3$

.

$y(-1) = 1.5$

$y(-1) = 0$

Eulerova metoda

Grafičku metodu možemo lako pretvoriti u numeričku (neka računalo riješava...)

TANGENTA FUNKCIJE

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

RJEŠENJE' =

$$y' = f(y, x) \text{ uz } y(a) = b$$

možemo riješavati koristeći iterativno za neki mali $\triangle x$ počevši od $x_1 = a$ i $x_2 = x_1 + \triangle x$

$y(x_1) = b$

x_2 $y(x_2)$

$$y(x_2) = \overbrace{y(\underbrace{x_1}_{a})}^{b} + f(\overbrace{y(x_1)}^{=b}, \overbrace{x_1}^{a}) \cdot (\overbrace{x_2 - x_1}^{\triangle x})$$

Eulerova metoda demonstrira numerički način rješavanja ODJ. Postoje bolje numeričke metode, a ova je odabrana zbog svoje jednostavnosti i intuitivnosti.

Eulerova metoda

Grafičku metodu možemo lako pretvoriti u numeričku (neka računalo riješava...)

$$y' = f(y, x) \text{ uz } y(a) = b$$

možemo riješavati koristeći iterativno za neki mali $\triangle x$ počevši od $x_1 = a$ i $x_2 = x_1 + \triangle x$

$$y(x_2) = y(x_1) + f\,(\,y(x_1), x_1\,) \cdot (x_2 - x_1)$$

Eulerova metoda demonstrira numerički način rješavanja ODJ. Postoje bolje numeričke metode, a ova je odabrana zbog svoje jednostavnosti i intuitivnosti.

Zadatak. Eulerovom metodom riješiti $y'(t) = x - y(x)^2$ uz početni uvjet $y(-1) = 3$. Sami odabrati $\triangle x$

Zadatak: $y' = x - y^2$ uz $y(-1) = 3$

$f(y,x) = x - y^2$

Eulerova metoda: $\triangle x = 0.4$, $x_1 = -1$, $x_2 = -0.6$, $y(x_2) = y(x_1) + f\,(y(x_1), x_1) \cdot (x_2 - x_1)$

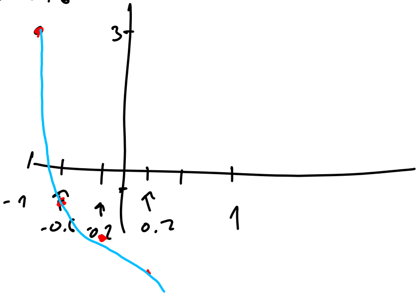
$x_1 = -1 \qquad y(x_1) = 3$

$x_2 = -1 + 0.4 = -0.6, \qquad y(-0.6) = 3 + (\underbrace{-1 - 3^2}_{=-10}) \cdot 0.4 = -1 = y_2$

$x_3 = -0.6 + 0.4 = -0.2 \qquad y(-0.2) = -1 + (\underbrace{-0.6 - 1}_{=-1.6}) \cdot 0.4 = -1.64 = y_3$

$x_4 = -0.2 + 0.4 = 0.2 \qquad y(0.2) = -1.64 + (-0.2 - 2.5) \cdot 0.4 = -2.6 = y_4$

$x_5 = 0.6 \qquad = y_5$



Picardov teorem: ODJ 1. reda

Neka je dana funkcija $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$ i točka $(x_0, y_0) \in X$ i neka postoji pravokutnik $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ takav da

- g je neprekidna na P i
- g udovoljava tzv. Lipschitzovom uvjetu na P po drugoj varijabli

y_2

y_0

x_1

$$\exists L > 0, \quad \forall (x_1, y_1) \in P, \forall (x_1, y_2) \in P \quad \text{tako da}$$

$$|g(x_1, y_1) - g(x_1, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

Tada ODJ 1. reda $\boxed{y' = g(x, y)}$ s početnim uvjetom $y(x_0) = y_0$ ima točno jedno rješenje f s domenom $\underbrace{[x_0 - h, x_0 + h]}$ i to rješenje je neprekidna funkcija.

Vrijedi $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ gdje je $M = \max_{(x,y) \in P} |g(x, y)|$.

Picardov teorem: sustav ODJ 1. reda

Neka su dane realne funkcije g_1, g_2, s domenom $X \subseteq \mathbb{R}^3$ i točka $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in X$ i neka postoji kvadar $K = [x_0 - a, x_0 + a] \times \left[y_0^1 - b, y_0^1 + b\right] \times \ldots$ takav da

- g_1, g_2 su neprekidne na K i
- g_1, g_2 udovoljavaju tzv. Lipschitzovom uvjetu na K po svim varijablama osim prve

$$\exists L > 0, \quad \forall (x_1, y_1^1, y_1^2) \in K, \forall (x_2, y_2^1, y_2^2) \in K \quad \text{tako da}$$

$$\left|g_i(x_1, y_1^1, y_1^2) - g(x_2, y_2^1, y_2^2)\right| \leq L\left(\left|y_1^1 - y_2^1\right| + \left|y_1^2 - y_2^2\right|\right)$$

Tada sustav ODJ 1. reda $\begin{aligned} y_1' &= g_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= g_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}$ s početnim uvjetima $\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_0^1 \\ y_2(x_0) &= y_0^2 \end{aligned}$ ima točno jedno rješenje (f_1, f_2) s domenom $[x_0 - h, x_0 + h]$ i to rješenje su neprekidne funkcije.

Vrijedi $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ gdje je $M = \max\{|g_1|, |g_2|\}$.

Zaključak

ODJ 1. reda uz početni uvjet:

1. Ponekad možemo riješiti **analitički**: separirana, linearna, ...

Zaključak

ODJ 1. reda uz početni uvjet:

1. Ponekad možemo riješiti **analitički**: separirana, linearna, ...
2. Uvijek možemo pokušati uz pomoć polja smjerova možemo **grafički skicirati** rješenje

Zaključak

ODJ 1. reda uz početni uvjet:

1. Ponekad možemo riješiti **analitički**: separirana, linearna, ...
2. Uvijek možemo pokušati uz pomoć polja smjerova možemo **grafički skicirati** rješenje
3. Uvijek možemo pokušati riješiti **numerički**: Eulerova metoda, ...

Zaključak

ODJ 1. reda uz početni uvjet:

1. Ponekad možemo riješiti **analitički**: separirana, linearna, ...
2. Uvijek možemo pokušati uz pomoć polja smjerova možemo **grafički skicirati** rješenje
3. Uvijek možemo pokušati riješiti **numerički**: Eulerova metoda, ...
4. Uvijek kada su zadovoljene pretpostavke **vrijedi teoretski rezultat** o lokalnom postojanju i jedinstvenosti rješenja

Sustav ODJ 1. reda

Ako je zadano nekoliko ODJ 1. reda tada govorimo o sustavu ODJ 1. reda

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots) \\
y_3' &= \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sustav dvije ODJ 1. reda

Ako su zadane dvije ODJ 1. reda tada govorimo o sustavu dvije ODJ 1. reda

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2)\\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2)
\end{aligned}
$$

Sustav dvije ODJ 1. reda

Ako su zadane dvije ODJ 1. reda tada govorimo o sustavu dvije ODJ 1. reda

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}$$

Sustav možemo riješavati numerički: npr. Eulerovom metodom

$$\begin{bmatrix} y_1(x_2) \\ y_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_1) \\ y_2(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) \\ f_2(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) \end{bmatrix} \cdot (x_2 - x_1)$$

Sustav dvije ODJ 1. reda

Ako su zadane dvije ODJ 1. reda tada govorimo o sustavu dvije ODJ 1. reda

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2)
\end{aligned}
$$

ili analitički: npr. ako deriviramo prvu jednadžbu i uvrstimo u drugu slijedi ODJ 2. reda.

Primjer: $$\begin{aligned} y' &= z + x \\ z' &= y - x \end{aligned}$$

$y(x)$
$z(x)$

Zapisati ODJ 2. reda koja slijedi ako deriviramo prvu jednadžbu i uvrstimo u drugu.

$$y'' = z' + 1$$

$$\boxed{y'' = y - x + 1}$$

ODJ. 2. REDA

dvije ODJ 1. reda ⇔ jedna ODJ 2. reda

Dvije ODJ 1. reda

$$y' = z + x$$
$$z' = y - x$$

uz početne uvjete $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zapisali smo kao ODJ 2. reda

$$y'' - y' = 1 - x$$

uz početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Činjenica

Ovo generalno vrijedi: sve što smo rekli o sustavu ODJ 1. reda vrijedi i za ODJ višeg reda.

Slobodne oscilacije: primjer mase na opruzi

m masa kuglice, k konstanta opruge

Homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ ili } \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$r^2 = -\frac{k}{m}$

$r^2 + \frac{k}{m} = 0$

$r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

$0 \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

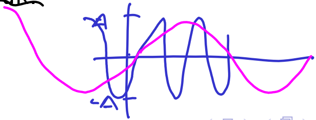
β $\quad \omega$

rješenje:

$$x(t) = (c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t))\underbrace{e^{0t}}_{=1}$$
$$= A\cos(\omega t - \varphi)$$

gdje je $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ amplituda, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ kružna frekvencija i

$\varphi = \arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$ fazni pomak.



slika

Prigušene oscilacije: primjer mase na opruzi

$\omega = \sqrt{k/m}$ kružna frekvencija, c konstanta trenja, $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ faktor prigušenja

Homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \text{ ili } \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{2\zeta\omega}_{=c/m}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\omega^2}_{=k/m}x = 0$$

karakteristična jednadžba s rješenjem:

$$r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0, \quad r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Bez prigušenja $\zeta = 0$ dolazimo do rješenja kao kod slobodnih oscilacija.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Prigušene oscilacije: primjer mase na opruzi

$\omega = \sqrt{k/m}$ kružna frekvencija, c konstanta trenja, $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ faktor prigušenja

Homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \text{ ili } \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{2\zeta\omega}_{=c/m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\omega^2}_{=k/m}x = 0$$

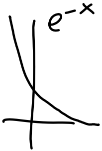
$$r_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega \pm \sqrt{4\zeta^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2}$$

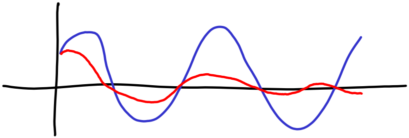
karakteristična jednadžba s rješenjem:

$$\rightarrow \quad r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0, \quad r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \underbrace{-\zeta\omega}_{\alpha} \pm \underbrace{\omega\sqrt{1-\zeta^2}\, i}_{\beta}$$

Ako je prigušenje podkritično $0 < \zeta < 1$ dolazimo do podkritičnih prigušenja sa oscilacijama frekcencije $\omega_1 = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ oko asimptote.

$$y(x) = \underbrace{e^{-\zeta\omega t}}_{A}\left(k_1\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) + k_2\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right)$$





Prigušene oscilacije: primjer mase na opruzi

$\omega = \sqrt{k/m}$ kružna frekvencija, c konstanta trenja, $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ faktor prigušenja

Homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \text{ ili } \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{2\zeta\omega}_{=c/m} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\omega^2}_{=k/m} x = 0$$

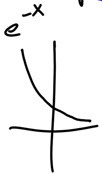
karakteristična jednadžba s rješenjem: $-\omega \pm 0 \cdot i$ 1 rješenje

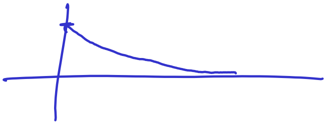
$$r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0, \quad r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Ako je prigušenje kritično $\zeta = 1$ sustav se vrlo brzo vraća u ravnotežu (asimptota).

$$y(x) = c_1 e^{-\omega t} + c_2 t e^{-\omega t}$$

$$\lim_{t \to \infty} t e^{-\omega t} = 0 \qquad \frac{e^{\omega t}}{\frac{1}{t}} \ldots$$





Prigušene oscilacije: primjer mase na opruzi

$\omega = \sqrt{k/m}$ kružna frekvencija, c konstanta trenja, $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ faktor prigušenja

Homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima:

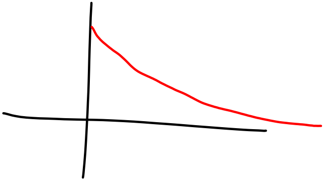
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \text{ ili } \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{2\zeta\omega}_{=c/m}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\omega^2}_{=k/m}x = 0$$

karakteristična jednadžba s rješenjem: 2 rješenja

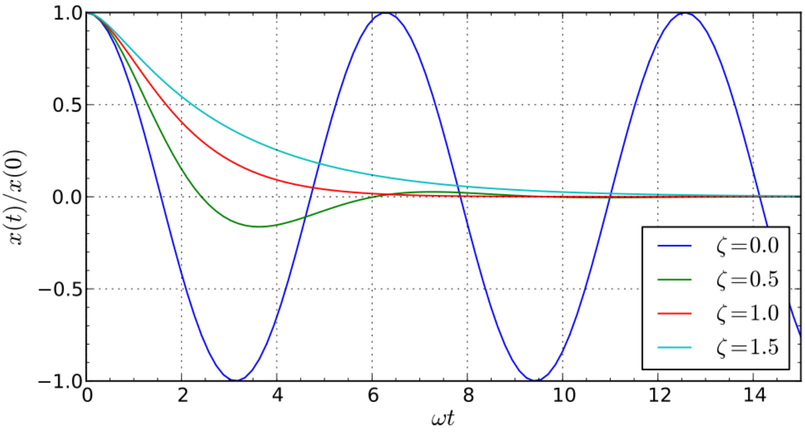
$$r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0, \quad r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\underbrace{\sqrt{\zeta^2 - 1}}_{<\zeta} < 0$$

Ako je prigušenje nadkritično $\zeta > 1$ sustav se polagano vraća u ravnotežni položaj (asimptota).

$$y(x) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$



Grafički prikaz rješenja za različite faktore prigušenja



Nehomogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = M_v \cos(\omega_v t)$$

$\alpha = 0$ ω_v $0 + \omega_v i$

Njeno rješenje je zbroj partikularnog rješenja nehomogene i općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe: $x(t) = x_P(t) + x_H(t)$.

Partikularno rješenje određuje odgovor sustava na pobudu:

$$\rightarrow x_P(t) = t^k \left(A\cos(\omega_v t) + B\sin(\omega_v t)\right), \quad \text{za neke realne } A \text{ i } B$$

$$= Ct^k \cos(\omega_v t - \alpha)$$

gdje je $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ amplituda, $\alpha = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ fazni pomak, a k je kratnost od $0 + \omega_v i$ među rješenjima karakteristične jednadžbe:

$$\rightarrow \quad r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0, \quad r_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \checkmark$$

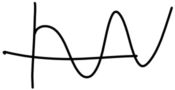
$$\boxed{\omega_v = \omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Prisilno titranje s periodičnom pobudom:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = M_v \cos(\omega_v t)$$

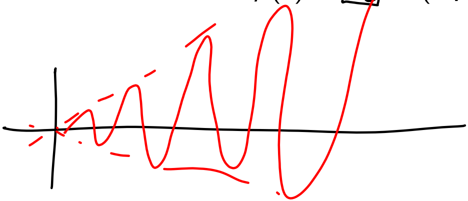
za $\omega_v \neq \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ ima partikularno rješenje

$$x_P(t) = C\cos(\omega_v t - \alpha)$$



za $\omega_v = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ ima partikularno rješenje

$$x_P(t) = C\,t\cos(\omega_v t - \alpha)$$



Rezonancija nastaje kada je frekvencija pobude ω_v jednaka frekvenciji sustava $\omega\sqrt{1-\zeta^2}$. Očituje se u rastućim amplitudama oscilacije sustava, unatoč umjerenoj snazi pobude.

Mathieu efekt — parametric resonance

On 1 October 1980 the RO/RO (roll-on/roll' off) ship Finneagle was close to the Orkney Islands and sailing mfollowing seas, that is with waves travelling in the same direction as the ship. All of a sudden three large roll cycles caused the ship to heel up to 40°. It is assumed that this large angle caused a container to break loose. Trimethylphosphate leaked from the container and reacted with the acid of a car battery. Because of the resulting fire the ship had to be abandoned. (page 204, A.B. Biran, *Ship Hydrostatics and Stability*, Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2003.)

Primjeri

Rezonancija plime i oseke

Električna rezonancija

Akustična rezonancija

Rušenje mosta Tacoma

Više primjera na `http://en.wikipedia.org/wiki/Resonance`.