ODJ drugog reda

Ako se u nekoj jednadžbi javlja derivacija nepoznate funkcije jedne varijable, ta jednadžba naziva se obična diferencijalna jednadžba (ODJ). Na primjer.

$$f'(x)^2 + f'''(x) \cdot (x+3) = f''(x).$$

Najveća derivacija određuje stupanj ODJ. Na primjer, prethodno navedena ODJ je 3. reda.

Primjer ODJ 2. reda:

$$xy'' + y' - x = 0.$$

Danas ćemo upoznati poseban tip ODJ drugog reda koja se nazova linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima.

Ponovimo neke termine koje smo upoznali ranije riješavajući ODJ 1. reda.

POSEBNO RJEŠENJE

Partikularno rješenje ODJ je naziv za bilo koje specifično rješenje određene ODJ.

Opće rješenje ODJ je naziv za skup svih rješenja određene navedene ODJ.

Eulerov zapis kompleksnog broja

$$x = r(\underbrace{\cos\varphi + i\sin\varphi}_{e^{i\varphi}}) = r\,\mathrm{cis}\,\varphi = re^{i\varphi}$$

Eulerova formula:

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

omogućuje nam da sa kompleksnim eksponentom poistovjetimo:

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{x}\left(\cos y + i \sin y\right), \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima

Zapis:

TRAŽI SE $y(x)$

$$y'' + ay' + by = g(x), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Ova jednadžba se još naziva **homogenom** linearnom ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima kada je $g(x) = 0$.

Prvo ćemo pronaći rješenje za homogenu linearnu ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima , a zatim ćemo se upustiti u rješavanje općeg slučaja linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima : kada $g(x) \neq 0$.

Teorem 7.3.1 Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ dva rješenja linearne homogene ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima onda je i $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ i $c_2 \in \mathbb{R}$ opet rješenje te jednadžbe.

Dokaz.

$$f_1''(x) + a f_1'(x) + b f_1(x) = 0 \qquad (*)$$

$$f_2''(x) + a f_2'(x) + b f_2(x) = 0 \qquad (**)$$

$$\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]'' + a\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]' + b\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] \overset{?}{=}$$

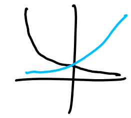
$$\overset{?}{=} \left(c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x)\right) + a\left(c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 f_2'(x)\right) + b\left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) =$$

$$c_1 \underbrace{\left(f_1''(x) + a f_1'(x) + b f_1(x)\right)}_{=0} + c_2 \underbrace{\left(f_2''(x) + a f_2'(x) + b f_2(x)\right)}_{=0} \overset{?}{=} 0$$

Definicija. Reći ćemo da su dva rješenja $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ linearne homogene ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima **linearno nezavisna** ako:

AKO $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \underset{c_1 \neq 0}{\Longrightarrow} c_1 f_1(x) = -c_2 f_2(x) \quad / \cdot \frac{1}{c_1}$

$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x)$



iz $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$ nužno slijedi $c_1 = c_2 = 0$.

LIN. ZAVISNE f_1 i f_2: AKO $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ILI $f_1 = \text{KONST.} \cdot f_2$ $\qquad e^x$, e^{-x}

Teorem 7.3.2 Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ dva *linearno nezavisna* rješenja linearne homogene ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima onda je opće rješenje iste jednadžbe $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$.

Dokaz. PRESKAČEMO.

VAŽNO: AKO NAĐEMO 2 RJEŠENJA KOJA SU LIN. NEZAVISNA TADA IZRAZ SADRŽI SVA RJEŠENJA, TZV. OPĆE RJEŠENJE.

Definicija. Za homogenu linearnu ODJ 2. reda s konstantnim koeficijntima

$$y'' + ay' + by = 0$$

njezina **karakteristična jednadžba** sa nepoznanicom r je

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$1 r^2 + ar + b = 0.$$

Rješenje karakteristične jednadžbe dano je formulom $r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Teorem 7.3.3 Ako karakteristična jednadžba homogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima ima dva realna rješenja r_1 i r_2 tada je opće rješenje promatrane homogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima

$$\underbrace{y(x) = c_1 \underbrace{e^{r_1 x}}_{f_1(x)} + c_2 \underbrace{e^{r_2 x}}_{f_2(x)}}.$$

AKO r_1 ZADOVOLJAVA

Dokaz. $$(e^{r_1 x})'' + a(e^{r_1 x})' + b(e^{r_1 x}) \overset{?}{=} r_1^2 e^{r_1 x} + a r_1 e^{r_1 x} + b e^{r_1 x} = e^{r_1 x}\underbrace{(r_1^2 + a r_1 + b)}_{=0} = 0$$

ONDA $e^{r_1 x}$ ZADOVOLJAVA

$$(e^{r_2 x})'' + a(e^{r_2 x})' + b(e^{r_2 x}) = \qquad = 0$$

$$f_1(x) = e^{r_1 x} \qquad f_2(x) = e^{r_2 x}$$

Definicija. Za homogenu linearnu ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima

$$y'' + ay' + by = 0$$

njezina **karakteristična jednadžba** sa nepoznanicom r je

$$r^2 + ar + b = 0.$$

$\alpha = -\frac{a}{2}$

$\beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$

Rješenje karakteristične jednadžbe dano je formulom $r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

Teorem 7.3.3 Ako karakteristična jednadžba homogene linearne ODJ 2. s konstantnim koeficijentima reda ima dva kompleksna rješenja $r_1 = \alpha - \beta i$ i $r_2 = \alpha + \beta i$ tada je opće rješenje promatrane homogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)\right).$$

Dokaz.

$$f_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$f_1'(x) = \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$f_1''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$f_1''(x) + a f_1'(x) + b f_1(x) \stackrel{?}{=} e^{\alpha x}\Big[\cos(\beta x)\big[\underbrace{\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b\cdot 1}_{\underbrace{\frac{a^2}{4} - \frac{4b-a^2}{4} + a\cdot\frac{-a}{2} + b}_{=0}}\big] + \sin(\beta x)\big[\underbrace{-2\alpha\beta - \beta a}_{\underbrace{-2\frac{-a}{2}\cdot\beta - \beta\cdot a}_{=0}}\big]\Big]$$

$= 0$

$$f_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$f_2'(x) = \ldots$$

$$f_2''(x) = \ldots$$

Teorem 7.3.4 Opće rješenje homogene linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima

$$y'' + ay' + by = 0$$

$r_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = 0$

$a^2 - 4b = 0$

$4b = a^2$

$b = \frac{a^2}{4}$

u slučaju kada njena karakteristična jednadžba ima samo jedno realno rješenje $r = -\dfrac{a}{2}$ jest

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

$f_1(x) = e^{rx}$ $\qquad$ $f_2(x) = xe^{rx}$

Dokaz.

$f_2'(x) = e^{rx} + rxe^{rx}$

$f_2''(x) = re^{rx} + re^{rx} + r^2xe^{rx}$

$= 2re^{rx} + r^2xe^{rx}$

$(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + a(e^{rx} + rxe^{rx}) + b \cdot xe^{rx} \overset{?}{=} e^{rx}\left(2r + a + x(\underbrace{r^2 + ar + b})\right)$

$\underbrace{2\frac{-a}{2} + a}_{=0}$ $\qquad$ $\underbrace{\frac{a^2}{4} + a\frac{-a}{2} + \frac{a^2}{4}}_{=0}$

$= 0$

Primjer 7.3.4 (udžbenik str. 360) Pronaći opće rješenje: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Pronašli smo način riješavanja homogene linearne ODJ 2. reda s konstatnim koeficijentima , zato se sada možemo upustiti u rješavanje općeg slučaja linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima :

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = g(x), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1

Teorem 7.3.5 Opće rješenje linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima može se dobiti pribrajanjem jednog njenog partikularnog rješenja i općeg rješenje pripadne homogene ODJ s konstantnim koeficijentima .

Dokaz. RECIMO DA IMAM 1 POSEBNO RJEŠENJE ODJ $(*)$; $y_p(x)$

$$y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) = g(x)$$

$$\underbrace{\left(y_H(x) + y_p(x) \right)''}_{?} + a \left(y_H(x) + y_p(x) \right)' + b \left(y_H(x) + y_p(x) \right) = g(x)$$

$$\left(y_H''(x) + a y_H'(x) + b y_H(x) \right) + \underbrace{\left(y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) \right)}_{(*) \; = \; \cancel{g(x)}} = \cancel{g(x)}$$

$$y_H''(x) + a y_H'(x) + b y_H(x) = 0 \qquad (**)$$

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

y_H – OPĆE RJEŠENJE HOMOGENE ODJ $(**)$

y_p – 1 RJEŠENJE ODJ $(*)$

Sada odgovaramo na pitanje: kako pronaći jedno partikularno rješenje linearne ODJ. 2. reda s konstatnim koeficijentima?

Činjenica. Partikularno rješenje linearne ODJ 2. reda s konstatnim koeficijentima

$$y'' + ay' + by = \underbrace{e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\right)}_{g(x)}$$

gdje su a, b, r i γ realni brojevi, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stupnja m i n može se naći u obliku

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}\left(S_N(x)\cos(\beta x) + T_N(x)\sin(\beta x)\right)$$

gdje je su S_N i T_N polinomi stupnja $N = \max\{m, n\}$, a k je tzv. kratnost od $\alpha + i\beta$ među rješenjima karakteristične jednadžbe $r^2 + ar + br = 0$ i iznosi:

- $k = 0$ kada $\alpha + i\beta$ nije među rješenjima karakteristične jednadžbe $r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a}}{2}$,
- $k = 1$ kada postoje 2 različita rješenja karakteristične jednadžbe, a $\alpha + i\beta$ je upravo jedno od njih,
- $k = 2$ ako je $\beta = 0$, a $r = -a/2 = \alpha$ upravo jedno i jedino rješenje karakteristične jednadžbe.

Polinome S_N i T_N tražimo metodom neodređenih koeficijenata i uvrštavanjem u polaznu ODJ.

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $4y'' - y = 2x \sin x$. $/ \cdot \frac{1}{4}$

$$y = y_P + y_H$$

$$y'' - \frac{1}{4}y = \frac{x}{2}\sin x$$

HOMOGENA ODJ

$$4y_H'' - y_H = 0$$

$$y_H'' - \frac{1}{4}y_H = 0$$

KARAKTERISTIČNA

$$r^2 + 0r - \frac{1}{4} = 0$$

$$r_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \qquad r_1 = \frac{1}{2} \qquad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{-1}{4}}}{2}$$

$$y_H(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$e^0 \cdot 0 \cdot \cos x + e^{\boxed{0}} \cdot \frac{x}{2}\sin(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\right)$$

$$\alpha = ? = 0$$

$$\beta = ? = 1$$

$$P_m = ? = 0 \quad \ldots \quad m = 0$$

$$Q_n = ? = \frac{x}{2} \quad \ldots \quad n = 1$$

$$\Rightarrow N = 1$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i\cdot 1 = i \quad \Rightarrow k = 0$$

$$y_p = \underbrace{x^0}_{1}\,\underbrace{e^{0x}}_{1}\left(S_1(x)\cos(1x) + T_1(x)\sin(1x)\right)$$

$$y_p = \underbrace{(A + Bx)}\cos x + \underbrace{(C + Dx)}\sin x$$

$$y_p' = B\cos x - (A+Bx)\sin x + D\sin x + (C+Dx)\cos x$$
$$= (B + C + Dx)\cos x + (D - A - Bx)\sin x$$

$$y_p'' = D\cos x - (B + C + Dx)\sin x + (-B)\sin x + (D - A - Bx)\cos x$$
$$= (2D - A - Bx)\cos x + (-2B - C - Dx)\sin x$$

$$y_p'' - \frac{1}{4}y_p = \frac{x}{2}\sin x$$

$$(2D - A - Bx)\cos x + (-2B - C - Dx)\sin x - \frac{1}{4}\left[(A+Bx)\cos x + (C+Dx)\sin x\right] = \frac{x}{2}\sin x$$

Provjeri dobiveno rješenje! $\left(2D - A - Bx - \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}Bx\right)\cos x + \left(-2B - C - Dx - \frac{1}{4}C - \frac{1}{4}Dx\right)\sin x = \frac{x}{2}\sin x$

$$2D - A - Bx - \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}Bx = 0$$

$$-2B - C - Dx - \frac{1}{4}C - \frac{1}{4}Dx = \frac{x}{2}$$

$$2D - A - \frac{1}{4}A = 0 \qquad -D - \frac{1}{4}D = \frac{1}{2}$$

$$-B - \frac{1}{4}B = 0 \qquad -2B - C - \frac{1}{4}C = 0$$

$$B = 0 \qquad C = 0$$

$$-\frac{5}{4}D = \frac{1}{2} \quad / \cdot \frac{-4}{5} \qquad D = -\frac{2}{5}$$

$$2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{5}{4}A = 0$$

$$-\frac{5}{4}A = \frac{4}{5} \quad / \cdot \frac{-4}{5}$$

$$A = \frac{-16}{25}$$

NASTAVAK

~~**Primjer:** Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $4y'' - y =$ [illegible]~~

$$y_p(x) = \frac{-16}{25}\cos x - \frac{2}{5}x\sin x$$

OPĆE RJEŠENJE POLAZNE ODJ;

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = -\frac{16}{25}\cos x - \frac{2}{5}x\sin x + c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2{}^{-\frac{1}{2}x}$$

Provjeri dobiveno rješenje!

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $\overbrace{9y''-6y'+y}^{g(x)}=xe^{-x}$ uz početne uvjete $y(0)=0$ i $y'(0)=1$.

NIJE POTREBNO ;)

$\cancel{y''-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{9}y=\frac{x}{9}e^{-x}}$

KARAKTERISTIČNA JEDNADŽBA

$r^2-\frac{2}{3}r+\frac{1}{9}=0$

$9r^2-6r+1=0$

$r_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2\cdot 9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

RJEŠENJE HOMOGENE ODJ:

$y_H(x)=C_1e^{\frac{1}{3}x}+C_2xe^{\frac{1}{3}x}$

$xe^{-x}=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\underbrace{\cos(\beta x)}_{\cos(0)=1}+Q_n(x)\underbrace{\sin(\beta x)}_{\sin 0=0}\right)$

$\alpha=-1$

$\beta=0$

$Q_n=0 \ldots n=0$

$P_m=x \ldots m=1$

$k \ldots \alpha+\beta i=-1+0i=-1$
$\Rightarrow k=0$

$N=1$

PARTIKULARNO RJEŠENJE TRAŽIM U OBLIKU

$y_p(x)=e^{-x}(Ax+B)$

$y_p'(x)=-e^{-x}(Ax+B)+e^{-x}(A)=e^{-x}(A-B-Ax)$

$y_p''(x)=-e^{-x}(A-B-Ax)+e^{-x}(-A)=e^{-x}(B-2A+Ax)$

$9e^{-x}(B-2A+Ax)-6e^{-x}(A-B-Ax)+e^{-x}(Ax+B)=xe^{-x}$

$e^{-x}(9B-18A+9Ax-6A+6B+6Ax+Ax+B)=xe^{-x}$

$9B-18A+9Ax-6A+6B+6Ax+Ax+B=1x+0$

$9A+6A+A=1 \Longrightarrow A=\frac{1}{16}$

$9B-18A-6A+6B+B=0$

$-24\cdot\frac{1}{16}+16B=0 \Rightarrow B=\frac{-\cancel{24}^{\,3}}{16\cdot\cancel{16}_{\,2}}=\frac{-3}{32}$

$y_p(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{32}x\right)$

Provjeri dobiveno rješenje!

$y(x)=y_p(x)+y_H(x)$

$=e^{-x}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{32}x\right)+C_1e^{\frac{1}{3}x}+C_2xe^{\frac{1}{3}x}$

$\boxed{y'(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{32}x\right)+e^{-x}\cdot\frac{-3}{32}+\frac{1}{3}C_1e^{\frac{1}{3}x}+\frac{1}{3}C_2xe^{\frac{1}{3}x}+C_2e^{\frac{1}{3}x}}$

$C_1=-\frac{1}{16}-C_2 \Leftarrow 0=y(0)=\frac{1}{16}+C_1+C_2$

$1=y'(0)=\underbrace{-\frac{1}{16}-\frac{3}{32}}_{\frac{-4}{32}=-\frac{1}{8}}+\frac{1}{3}C_1+C_2$

$1=-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{16}-C_2\right)+C_2$

$1=\underbrace{-\frac{1}{8}-\frac{1}{48}}_{\frac{-6-1}{48}}+\frac{2}{3}C_2$

$\frac{2}{3}C_2=\frac{48+7}{48}=\frac{55}{48} \quad /\cdot\frac{3}{2}$

$C_2=\frac{165}{96}$

$C_1=-\frac{1}{16}-\frac{55}{32}=\frac{-57}{32}$

NASTAVAK

~~**Primjer.** Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $9y'' - 6y' + y = xe^{-x}$ uz početne uvjete $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.~~

$c_2 = \frac{55}{32}$

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{32}x\right) - \frac{57}{32}e^{\frac{1}{3}x} + \frac{55}{32}xe^{\frac{1}{3}x}$$

$$y(0) = \frac{1}{16} - \frac{57}{32} \neq 0$$ NEŠTO KRIVO

Provjeri dobiveno rješenje!

Teorem 7.3.9 Ako je u linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima izgleda

$$y'' + ay' + by = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)$$

tada je njezino posebno (partikularno rješenje) zbroj od po jednog posebnog (partikularnog) rješenja svake pripadne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = g_j(x), \qquad j = 1, \ldots, n$$

Dokaz.

Primjer 7.3.5 (udžbenik str. 361) Riješiti $y'' - y = \overbrace{-x + 1}^{P}$ i odredimo posebno rješenje koje udovoljava početnom uvjetu $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$.

HOMOGENA

$y'' - y = 0$

KARAKTERISTIČNA

$r^2 - 1 = 0$

$r_{1,2} = \pm 1$

$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$

$y_1'' - y_1 = -x$

$-x+1$

$-x = \underbrace{e^{\alpha x}}_{1} \left(P(x) \underbrace{\cos(\beta x)}_{1} + Q \underbrace{\sin(\beta x)}_{0} \right)$

$\alpha = 0$ $\quad \alpha + \beta i = 0$

$\beta = 0$

$P(x) = -x \ldots$ stupanj $= 1$

$N = 1$

$y_1 = Ax + B$

$y_1' = A$

$y_1'' = 0$

$0 - Ax + B = -x$

$A = 1$

$B = 0$

$\boxed{y_1 = x}$

$y_2'' - y_2 = 1$

$1 = \underbrace{e^{\alpha x}}_{1} \left(P(x) \underbrace{\cos(\beta x)}_{=1} + \cancel{Q(x) \sin(\beta x)} \right)$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

$P(x) = 1 \quad n = 0$

$y_2 = C$

$y_2' = 0$

$y_2'' = 0$

$0 - C = 1$

$\boxed{C = -1}$

$\boxed{y_2 = -1}$

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + x - 1$

Provjeri dobiveno rješenje!

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3x} + 1$.

Provjeri dobiveno rješenje!

Primjer 7.3.6 (udžbenik str. 362) Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' + 2y' + 5y = x^2 \mathrm{e}^{3x} + \sin(2x)$.

Provjeri dobiveno rješenje!

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' - y = x^2 - xe^x$.

Provjeri dobiveno rješenje!

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' - 2y' = 2\mathrm{e}^x$ s početnim uvjetom $x = 1$, $y = -1$, $y' = 0$.

Provjeri dobiveno rješenje!

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y'' + y = 2x - \pi$ s rubnim uvjetima $x = 1$, $y = 0$ i $x = \pi$, $y = 0$.

Provjeri dobiveno rješenje!