Nepravi integral

Matematika II, Predavanje 7

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

17. travnja 2013.

Sadržaj predavanja

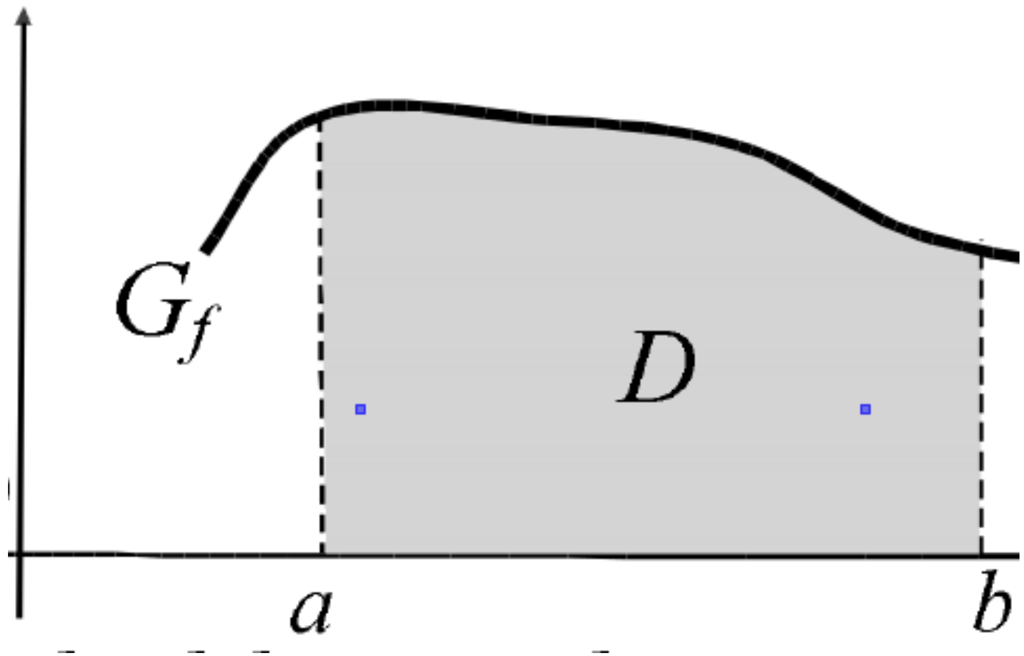
Primjene određenog integrala

Određeni integral:

- predstavlja površinu
- može poslužiti za izračun volumena
    - višestruki integral. . .

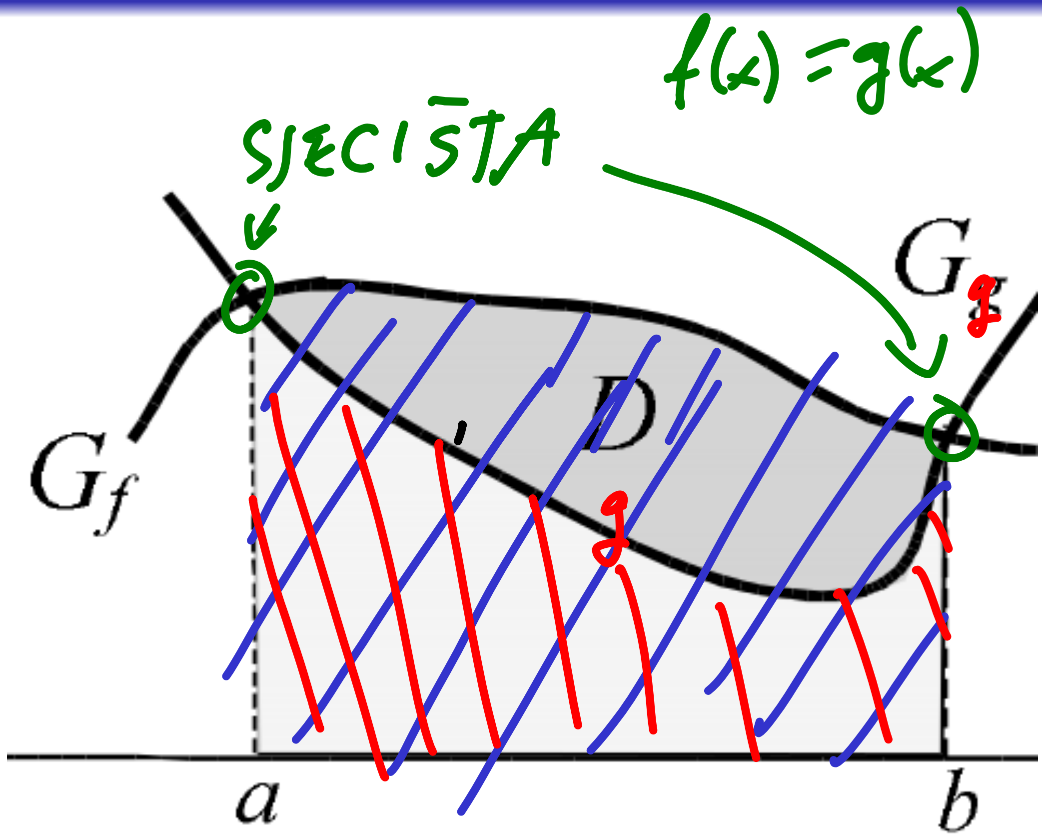
Slijede neki primjeri koji se svode na običan određeni integral. . .

Određeni integral kao površina ispod grafa funkcije



$$P(D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Površina ravninskog lika



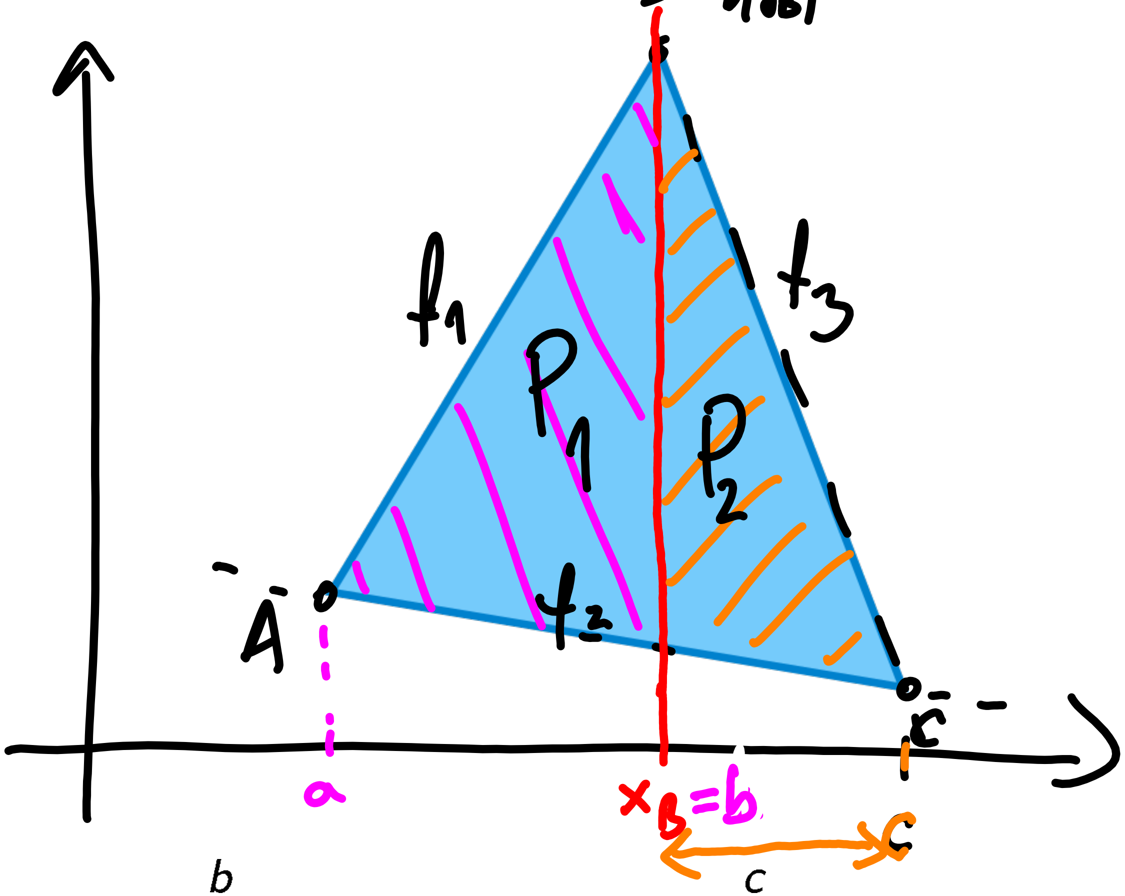
GORNJA DONJA

$$P(D) = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx} - \boxed{\int_a^b g(x)\,dx} = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Površina ravninskog lika podjelom na djelove

$(x-x_A)(y_B-y_A)=(y-y_A)(x_B-x_A)$

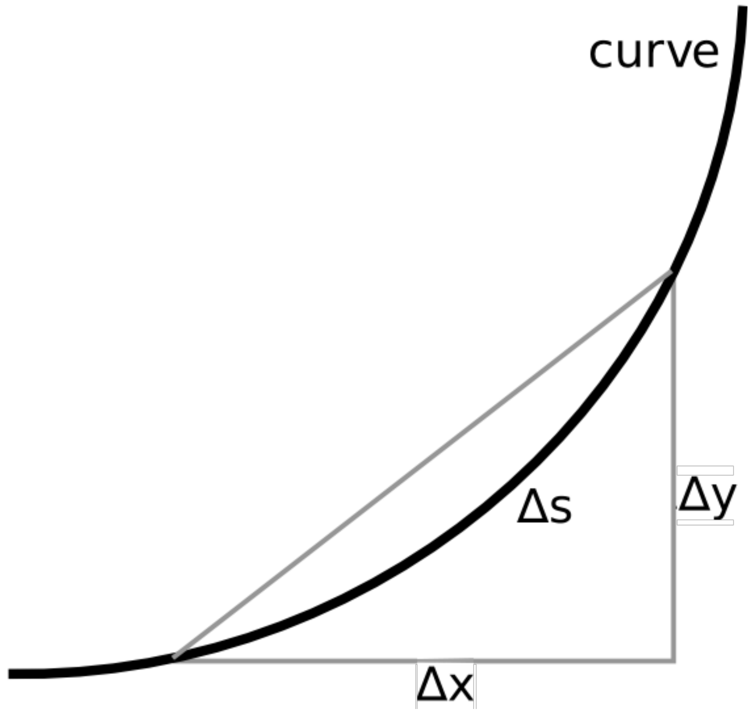
$y=$
$f(x)$



$$P=\underbrace{\int_a^b f_1(x)-f_2(x)\,\mathrm{d}x}_{P_1}+\underbrace{\int_b^c f_3(x)-f_2(x)\,\mathrm{d}x}_{P_2}$$

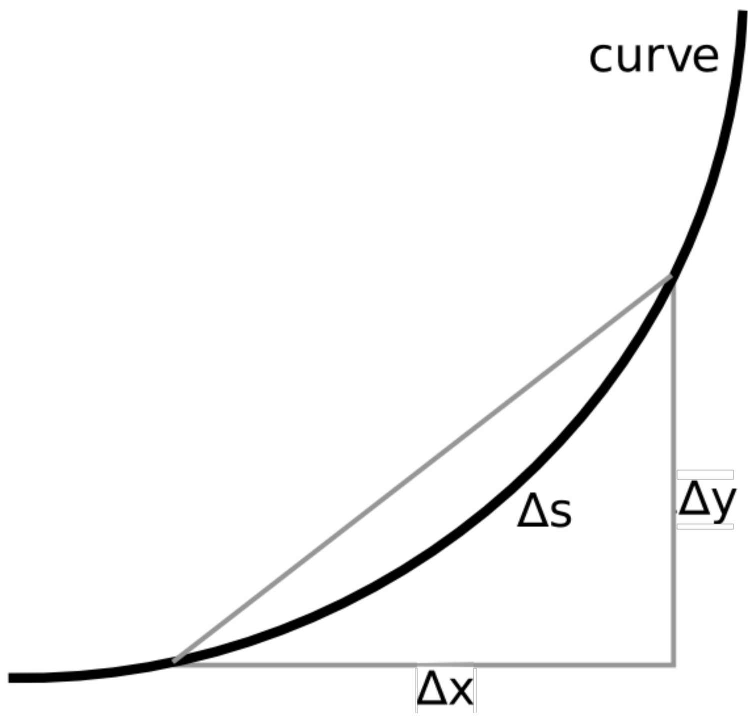
Duljina krivulje

Kako bi aproksimirali duljinu glatke krivulje podijelimo je na mnogo malih dijelova koji će tada biti približno ravne kao male dužine.
Što su djelovi krivulje manji to su sve bolje opisani tangentama.



Duljina krivulje

Kako bi aproksimirali duljinu glatke krivulje podijelimo je na mnogo malih dijelova koji će tada biti približno ravne kao male dužine.
Kako bi izračunali točan rezultat (koji nije aproksimacija) trebati će nam beskonačan broj dijelova (prelazak na limes), kao kod Riemanovih suma.



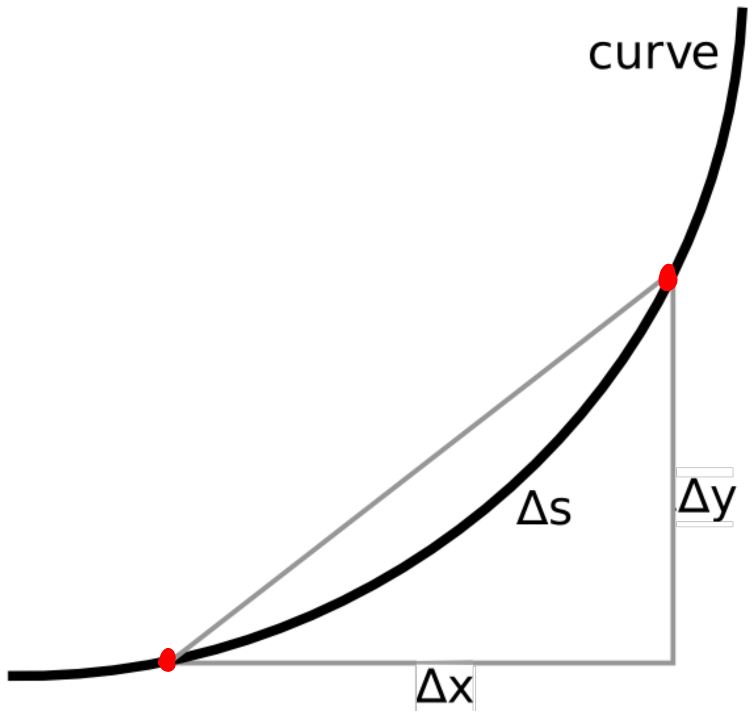
Duljina krivulje

Na slici desno je skica kako bi izgledale odgovarajuće aproksimacije sitnih dijelova krivulje dužinama. Prema Pitagorinom poučku:

$$\triangle s \approx \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2} \triangle x$$

$$\text{duljina} \approx \sum_{\substack{\text{po svim}\\ \text{dijelovima}}} \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$$



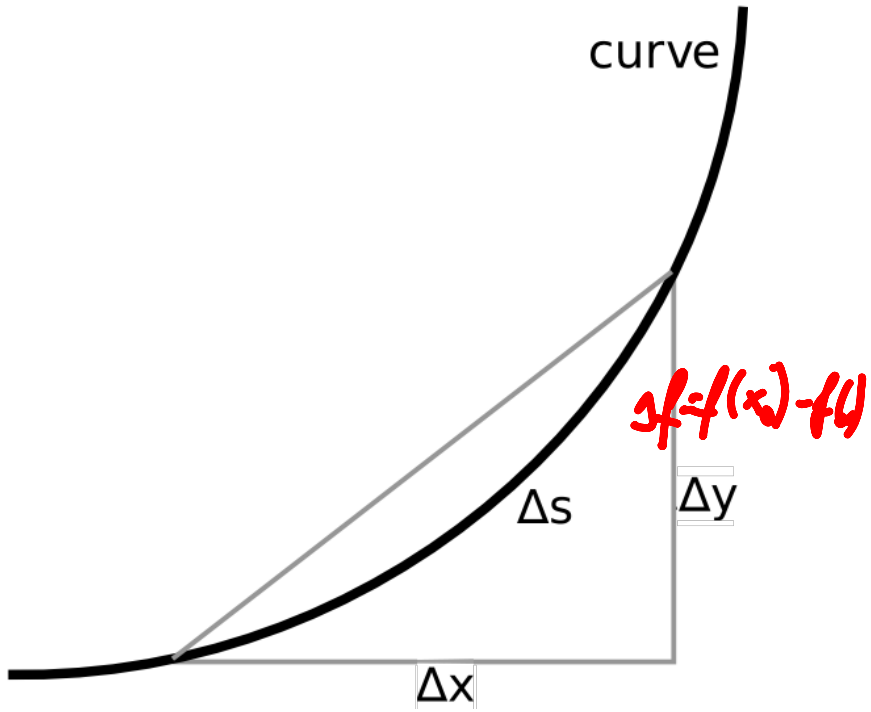
Duljina krivulje

Na slici desno je skica kako bi izgledale odgovarajuće aproksimacije sitnih dijelova krivulje dužinama. Prema Pitagorinom poučku:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad \checkmark$$

$$\text{duljina} = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\,\mathrm{d}x$$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

Duljina krivulje

Na primjer za graf krivulje $f(x) = x^2$
na segmentu $[0,1]$ po istoj formuli:

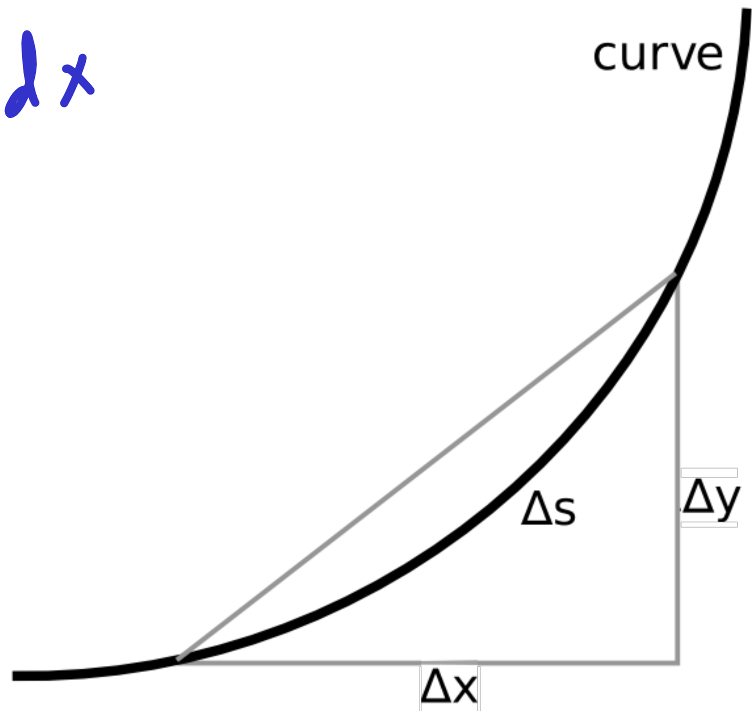
$$f'(x) = 2x$$

$$\text{duljina} = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx$$

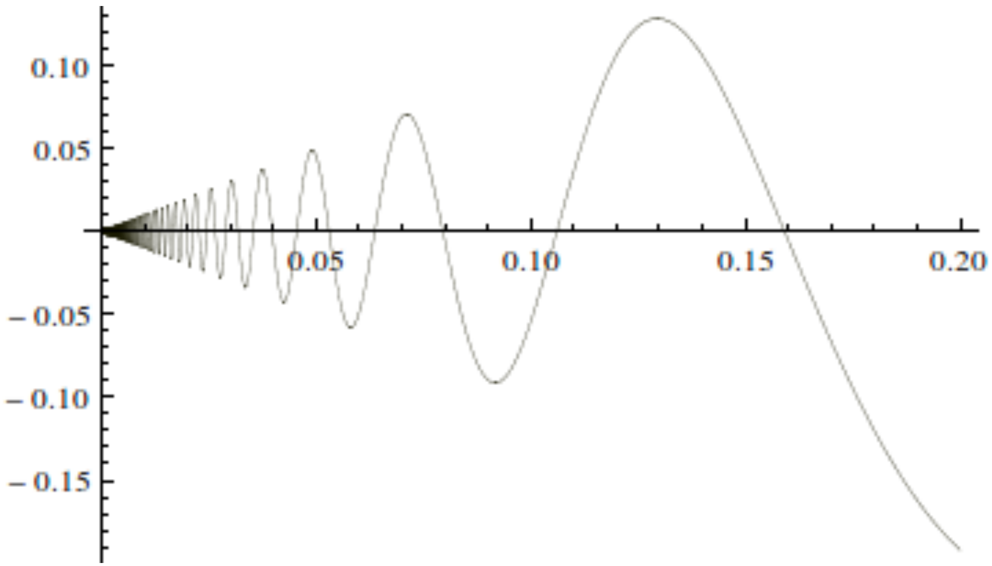
$$= [\text{primitivna funkcija}]_0^1$$

$$= 1.47894$$

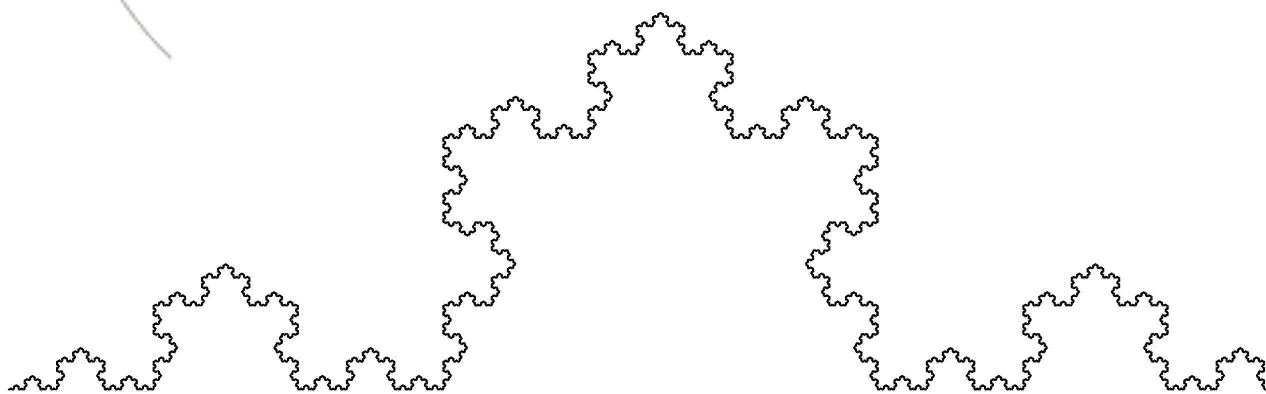


Krivulje beskonačne duljine iznad segmenta

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



. Kochova krivulja ↓



Što ako f nije ograničena ili je područje neograničeno?

Za ograničenu funkciju f na $[a, b]$:

- donja Darbouxova suma:

$$s(f;R) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

- gornja Darbouxova suma:

$$S(f;R) = \sum_{i=1}^{n} M_i d_i$$

- donji Darbouxov integral:

$$D_f = \sup\{s(f;R) : R \text{ razdioba od } [a,b]\}$$

- gornji Darbouxov integral:

$$G_f = \inf\{S(f;R) : R \text{ razdioba od } [a,b]\}$$

Ako je $D_f = G_f$ funkciju f zovemo integrabilnom, a taj broj zovemo određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označavamo:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = D_f = G_f$$

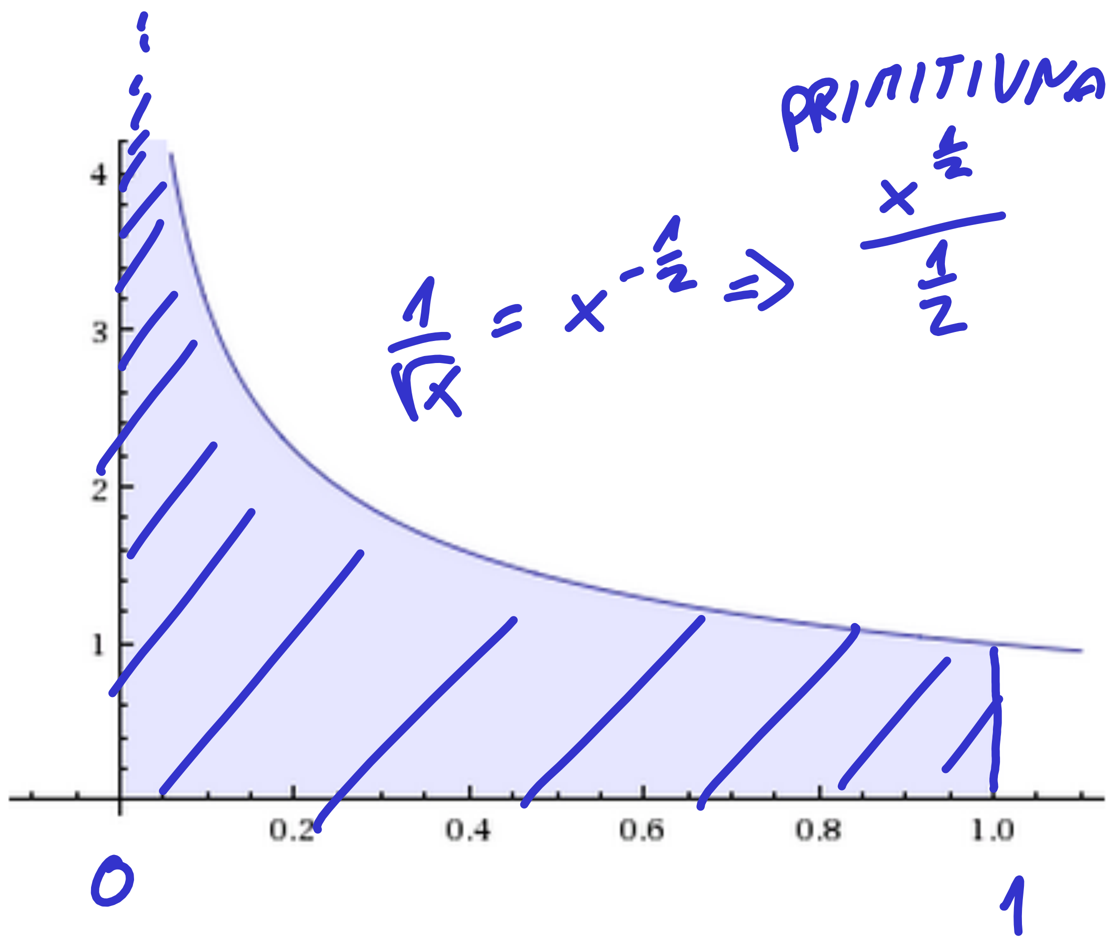
Da li možemo izračunati površinu?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = ?$$

$$= F(1) - F(0)$$

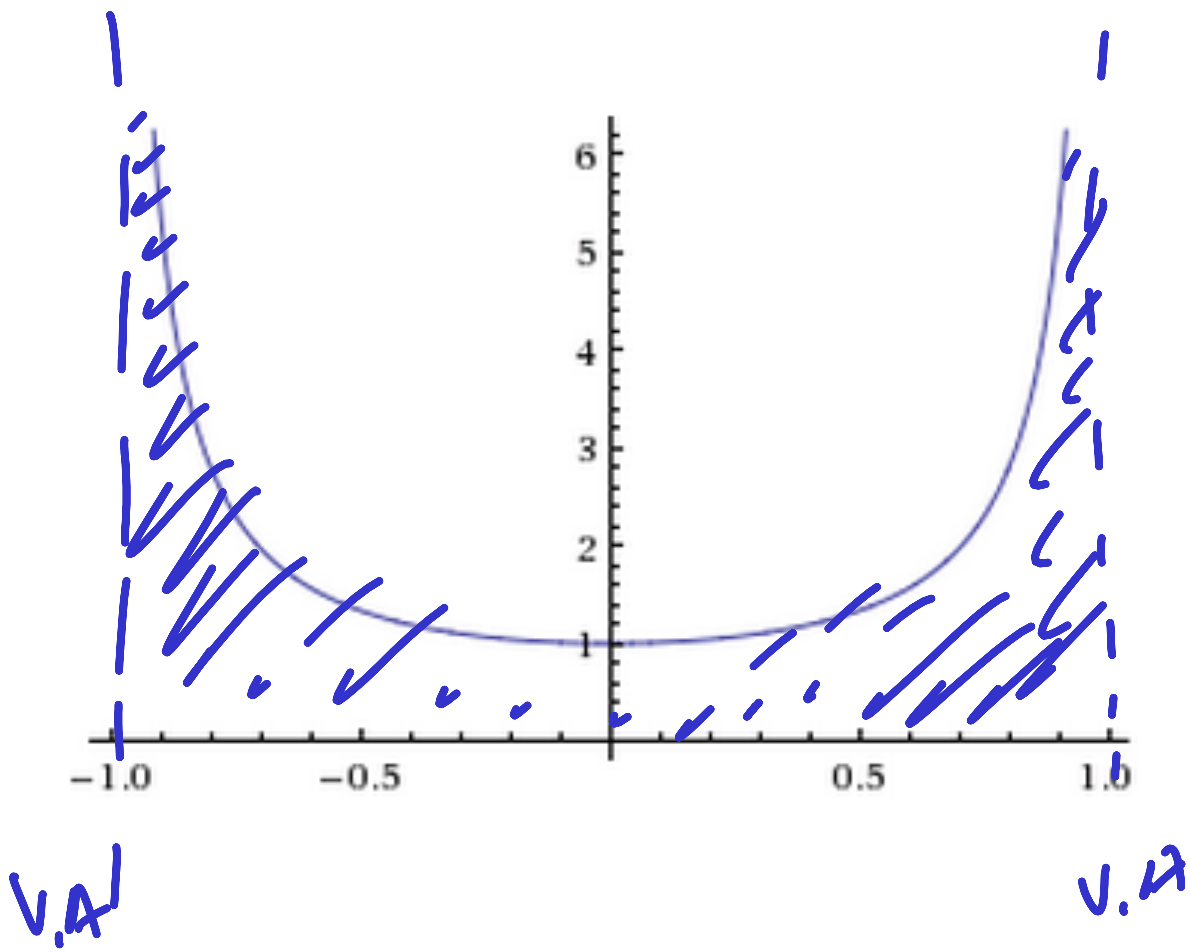
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{0}}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$= 2$$



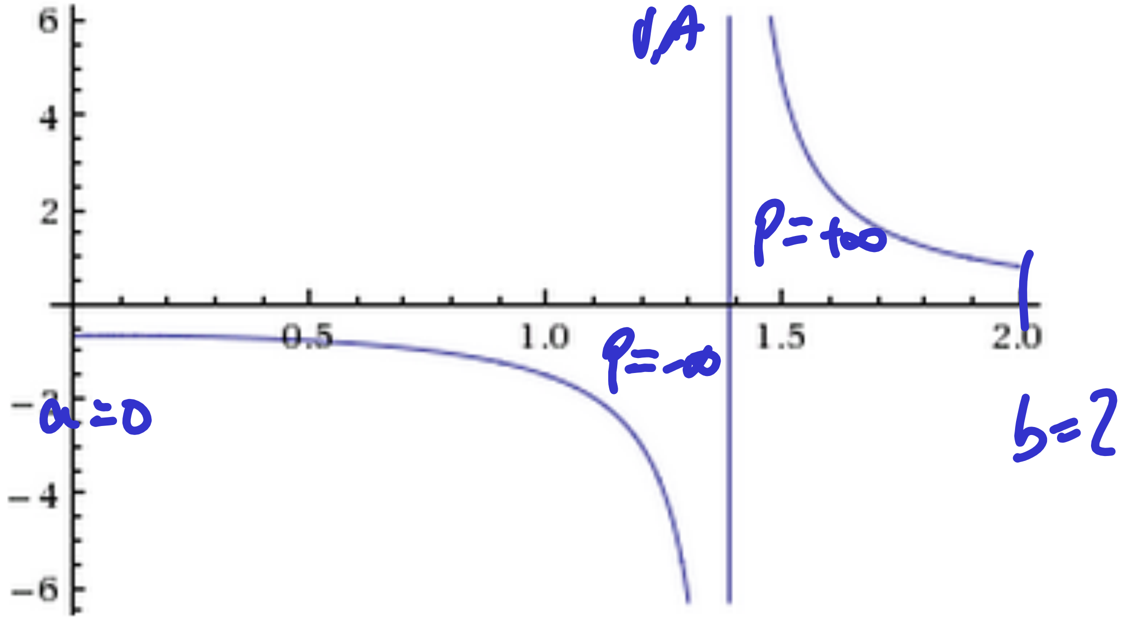
Da li možemo izračunati površinu?

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx = ?$$



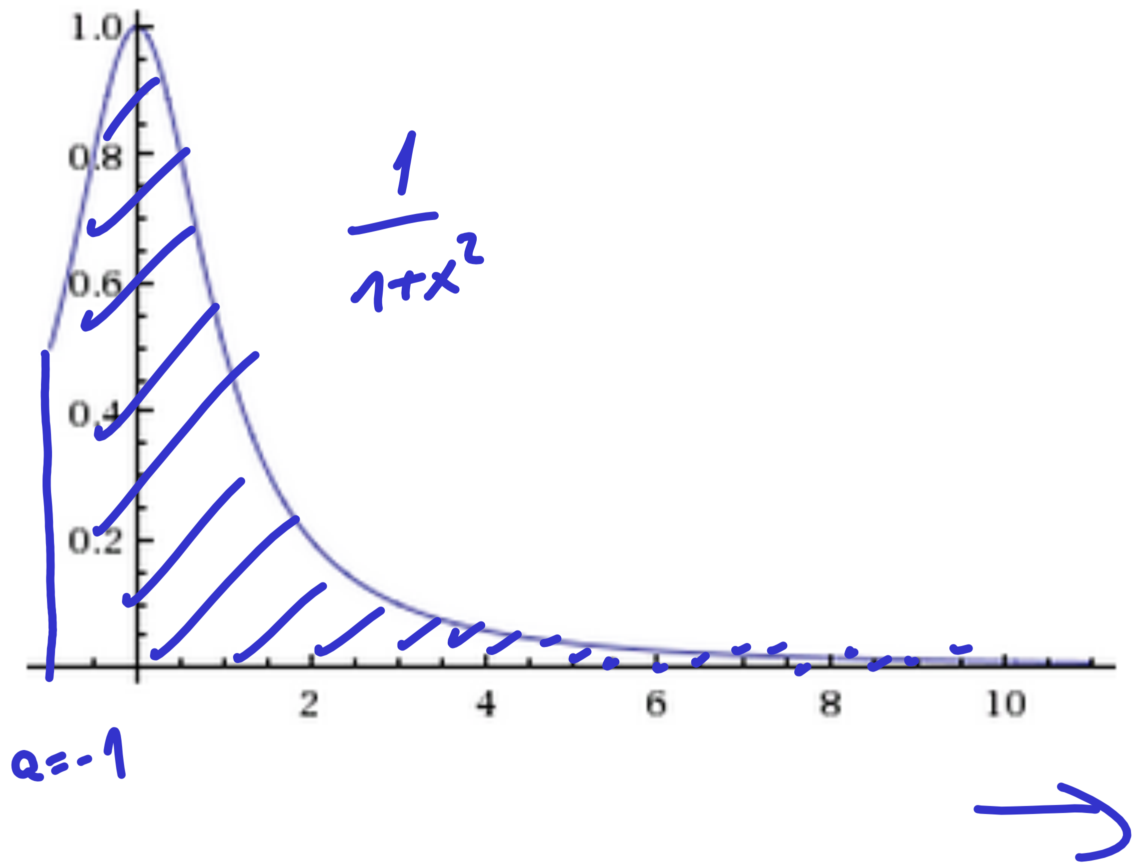
Da li možemo izračunati površinu?

$$\int_0^2 \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\,dx = ?$$



Da li možemo izračunati površinu?

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$$



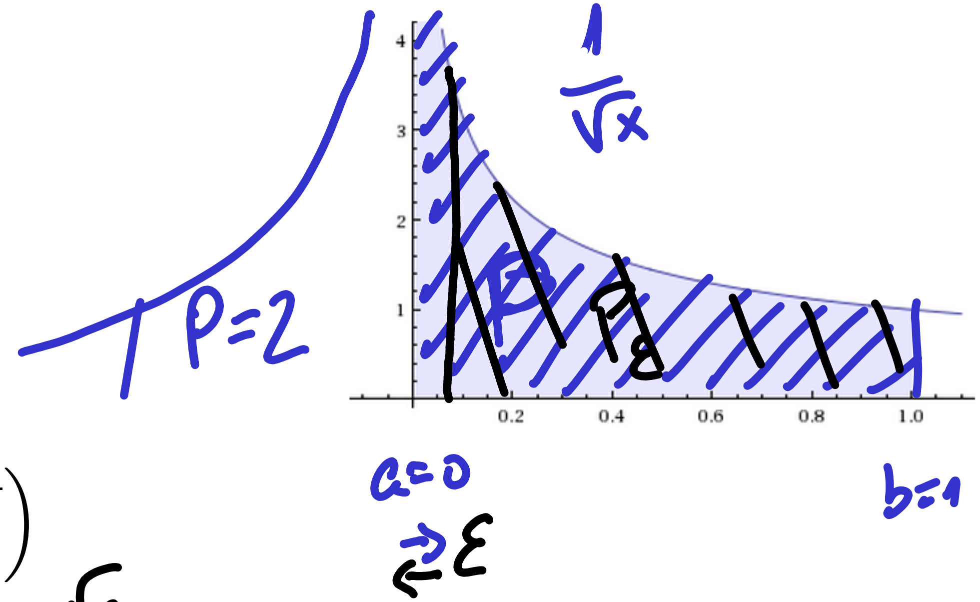
Granicu približavamo problematičnoj u limesu

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \overset{P_\varepsilon}{\boxed{\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\underbrace{2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}}_{P_\varepsilon = 2-2\sqrt{\varepsilon}}\Big)$$

$$=2$$



$$\frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

Granicu približavamo problematičnoj u limesu

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{a\to -1}\lim_{b\to 1}\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

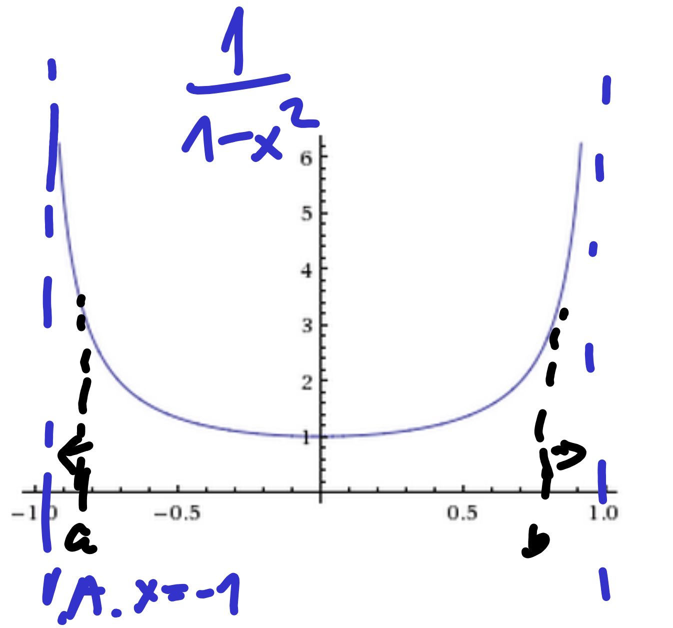
$$= \lim_{a\to -1}\lim_{b\to 1}\boxed{\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_a^b}$$

$$= \lim_{a\to -1}\lim_{b\to 1}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+a}{1-a}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left|\frac{2}{0}\right|}_{\ln\infty=+\infty} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left|\frac{0}{2}\right|}_{\ln 0=-\infty}$$

$$= N/P$$

$\lim_{b\to 1}$ $\lim_{a\to -1}$



$\to \varepsilon$ $\varepsilon \leftarrow$

$1-\varepsilon = b$

$\int$

$-1+\varepsilon = a$

Pogreška: funkcija nije ograničena na $[0,2]$

$$\int_0^2 \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\,dx = \left[-\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{11}{24}\ln\left|x-\frac{5}{3}\right|\right]_0^2 \checkmark$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|2+1| + \frac{11}{24}\ln\left|2-\frac{5}{3}\right|$$

$$+\frac{1}{8}\ln|0+1| - \frac{11}{24}\ln\left|0-\frac{5}{3}\right|$$

$$= -0.874985579282476383\,12 \checkmark$$

$$\| $$

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{11}{24}\frac{1}{x-\frac{5}{3}}$$

Pogreška: funkcija nije ograničena na $[0,2]$

$$\int_0^2 \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{11}{24}\ln\left|x-\frac{5}{3}\right|\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|2+1| + \frac{11}{24}\ln\left|2-\frac{5}{3}\right|$$

$$+ \frac{1}{8}\ln|0+1| - \frac{11}{24}\ln\left|0-\frac{5}{3}\right|$$

$$= -0.874985579282476383 12$$

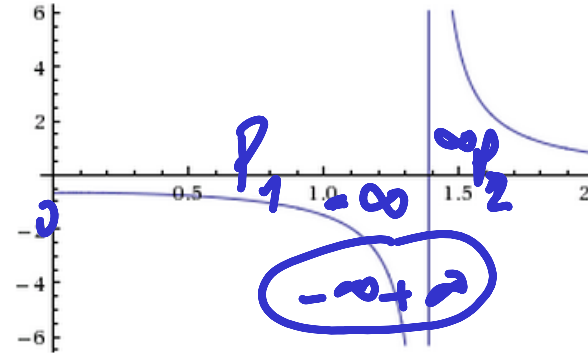
✓ GLAVNA VRIJEDNOST NEPRAVOG INTEGRALA

Gornji račun je pogrešan!!!

Primitivna funkcija ima vertikalne asimptote (nije definirana) za $x = -1$ i $x = \frac{5}{3}$.

Vrijednost $\int_0^{\frac{5}{3}} \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\mathrm{d}x = -\infty$ zbog čega gornji integral nema smisla (N/D)!

Izolirati područje uz vertikalne asimptote



asimptota $x = \frac{5}{3}$.

$$\int_0^2 \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\frac{5}{3}-}\int_0^a \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\mathrm{d}x$$

$$+ \lim_{b\to\frac{5}{3}+}\int_b^2 \frac{x+2}{3x^2-2x-5}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to\frac{5}{3}-}\left[-\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{11}{24}\ln\left|x-\frac{5}{3}\right|\right]_0^a \quad -\infty$$

$$+ \lim_{b\to\frac{5}{3}+}\left[-\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{11}{24}\ln\left|x-\frac{5}{3}\right|\right]_b^2$$

$$= \dots$$

$$= \left\{\lim_{a\to\frac{5}{3}-}\ln\left|x-\frac{5}{3}\right| = \ln 0 = -\infty\right\}$$

$$= N/P$$

Rastegnuti se u limesu prema beskonačno

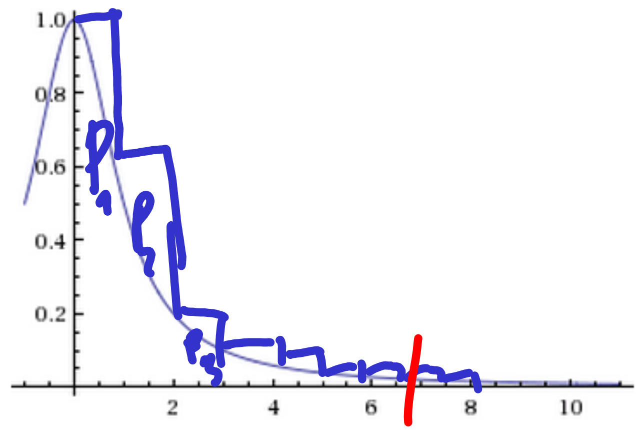
$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_{-1}^{b} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{b\to+\infty} [\arctan x]_{-1}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan(-1))$$

$$= \arctan(+\infty) - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \approx 2.3561944901923$$



$b \to +\infty$

Ispitno pitanje: nepravi integral

Nepravi integral je određeni integral (površina između grafa funkcije i x-osi) kod kojeg je:

1. funkcija neograničena (rub je V.A.) ili
2. integralno područje neograničeno (rub$\to\infty$)

Rješavamo ga ovako:

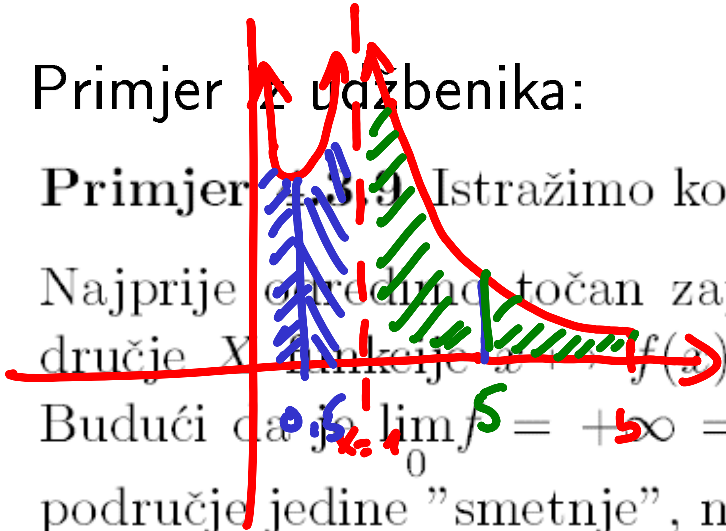
- kao limes određenog integrala
- rubna točka segmenta integracije približava se:
  - određenom broju (V.A.) ili
  - $\pm\infty$
- važno je na ovaj način izolirati sve problematične točke na segmentu integracije!
- nepravi integral divergira (površina nema smisla) ako bilo koji limes ispadne jednak $\pm\infty$

VAŽNO: Izolirati SVE problematične točke integracije

Primjer iz udžbenika:

V.A. $x=0$
V.A. $x=1$

$b \to \infty$ $\quad \frac{1}{x\ln^2 x}$



Primjer 4.3.9 Istražimo konvergira li nepravi integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Najprije odredimo točan zapis toga nepravog integrala. Definicijsko područje X funkcije $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ jest skup $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = \langle 0,1\rangle \bigcup \langle 1, \cdot\rangle$. Budući da je $\lim\limits_0 f = +\infty = \lim\limits_1 f$ i da su 0, 1 i neomeđeno integracijsko područje jedine "smetnje", naš nepravi integral ima ovaj zapis:

0.5 $\quad$ 5

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon}^{d} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{d}^{1-\delta} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{1+\eta}^{a} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x},$$

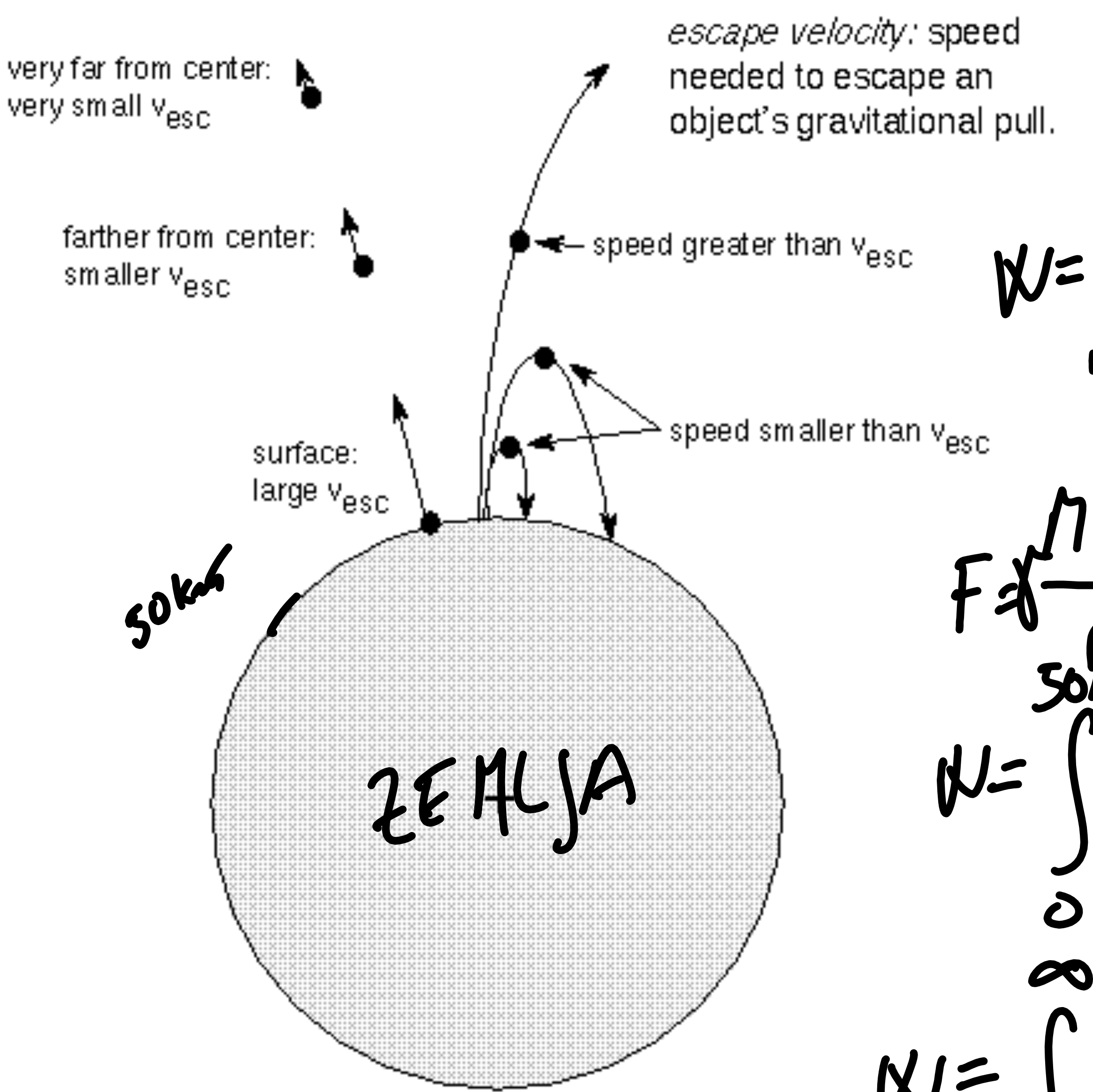
0.5 $\quad$ 5

pri čemu je $\epsilon, \delta, \eta > 0$, $0 < d < 1$ i $1 < a \leq b$. Primijetimo da je

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + c$$

pa je $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{\ln x}$, primitivna funkcija za f. Budući da je $\lim\limits_{1\pm 0} F = \pm\infty$, to promatrani nepravi integral divergira. Neka se čitatelj uvjeri (kako izravnim računom tako i primjenom kriterija za konvergenciju) da prvi i četvrti nepravi integral (pribrojnik) u zapisu gore konvergiraju.

Primjena nepravog integrala
Energija potrebna za izlazak iz orbite



$$\sum_{n=1}^{50\,000} F(h)\cdot\underbrace{\Delta h}_{=1}$$

$$W = mg\cdot h \quad \times$$

$$W = F\cdot s$$

$$F = \gamma\frac{Mm}{R^2} \quad \checkmark$$

$$W = \int_0^{50km} F(h)\cdot dh$$

$$W = \int_0^{\infty} F(h)\, dh$$

Slika: Nick Strobel,
http://www.astronomynotes.com/gravappl/s8.htm

Primjena nepravog integrala

Sila između planeta mase M i vozila mase m na udaljenosti x je

$$F = \gamma \frac{M \cdot m}{x^2} \quad \checkmark$$

$$\int x^{-2} = -\frac{1}{x}$$

Rad W za svladavanje sile F na putu $[d_0, d]$ je:

$$W = \int_{d_0}^{d} F(x)\mathrm{d}x = \int_{d_0}^{d} \gamma \frac{Mm}{x^2}\mathrm{d}x = \underline{\gamma Mm} \int_{d_0}^{d} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Ako će vozilo potpuno svladati gravitaciju treba uložiti

$$W = \gamma Mm \int_{d_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \gamma Mm \left[-\frac{1}{x}\right]_{d_0}^{\infty}$$

$$= \gamma Mm \left(\underbrace{-\frac{1}{\infty}}_{0} + \frac{1}{d_0}\right) = \frac{\gamma Mm}{d_0} \quad \checkmark$$