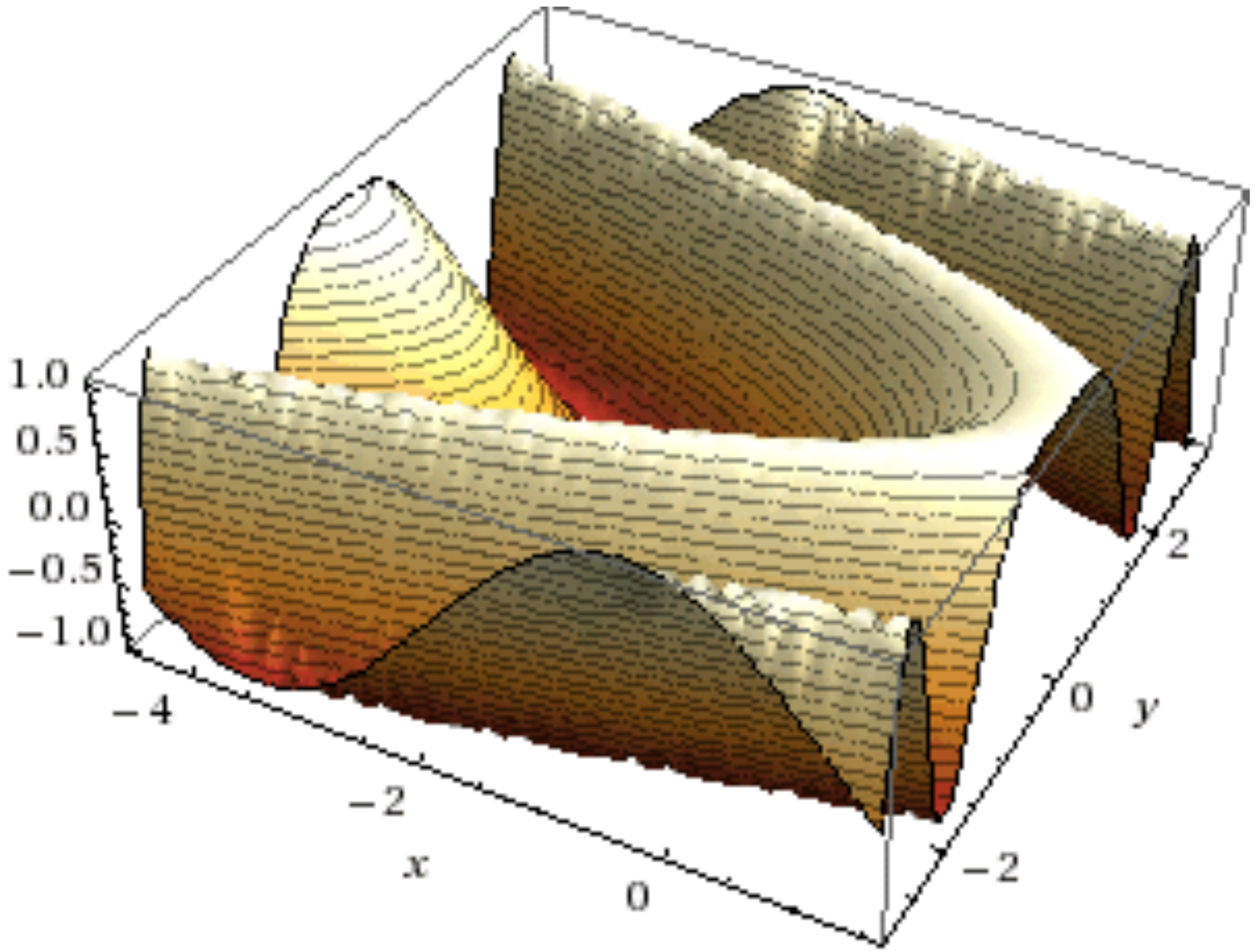
Generalizacija deriviranja

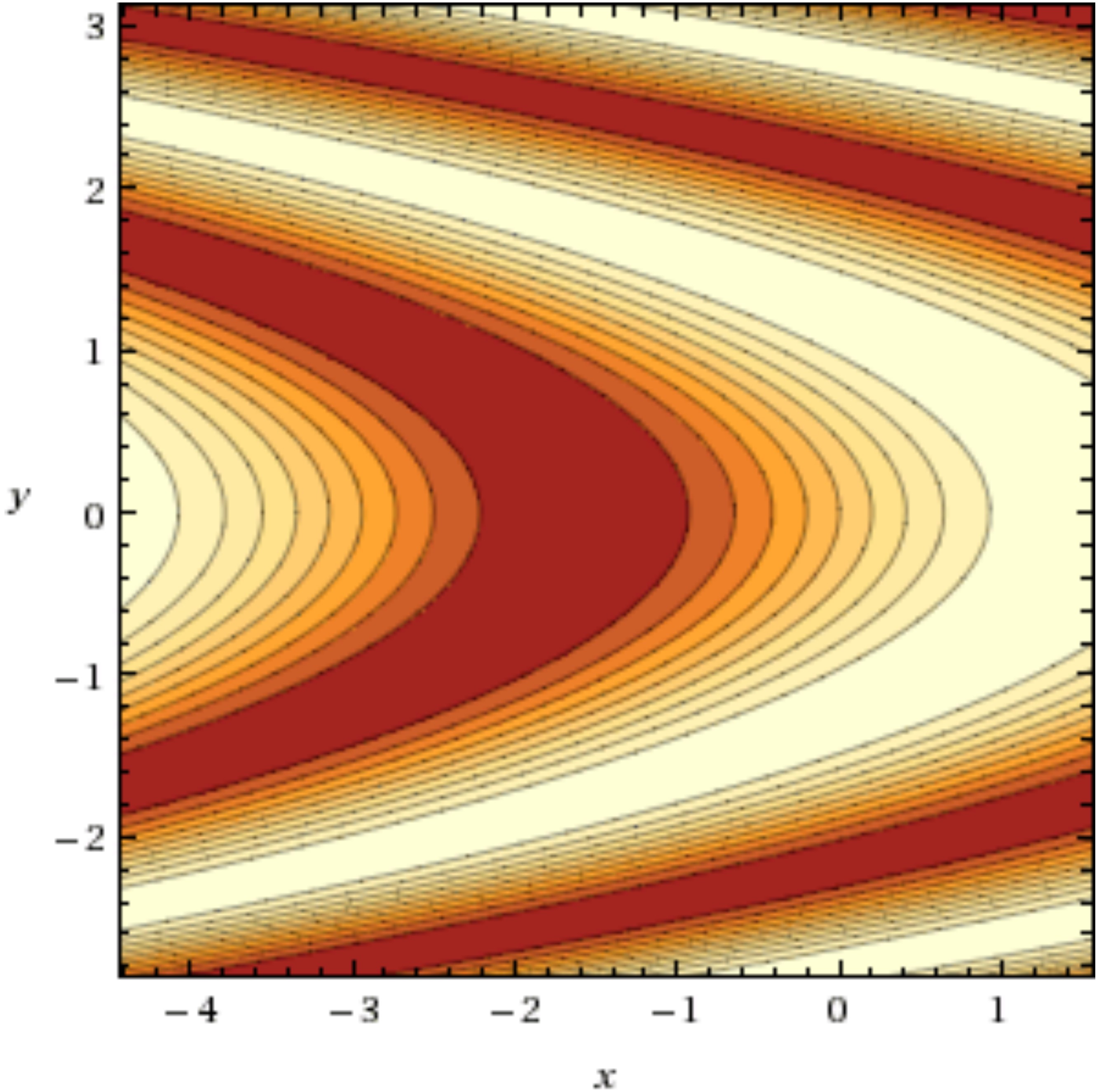
$$f'(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\sqrt{\Delta x + \Delta y}} \;?$$

Izravno i formalno poopćenje derivabilnosti (u točki) s funkcija jedne varijable na funkcije više varijabla nije moguće, jer je varijabla bitno promijenila karakter. Naime, umjesto realnog broja x sada se promatra vektor $x = (x^1, \cdots, x^m)$, pa odgovarajući količnik $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ("vektor dijeli broj") više nema smisla. Međutim, učvrste li se sve osim jedne koordinate, promatrana funkcija (suženje) postaje, zapravo, funkcijom jedne varijable pa se smije govoriti o njezinoj (ne)derivabilnosti. To onda vodi k pojmu parcijalne derivacije po varijabli-koordinati.

Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$



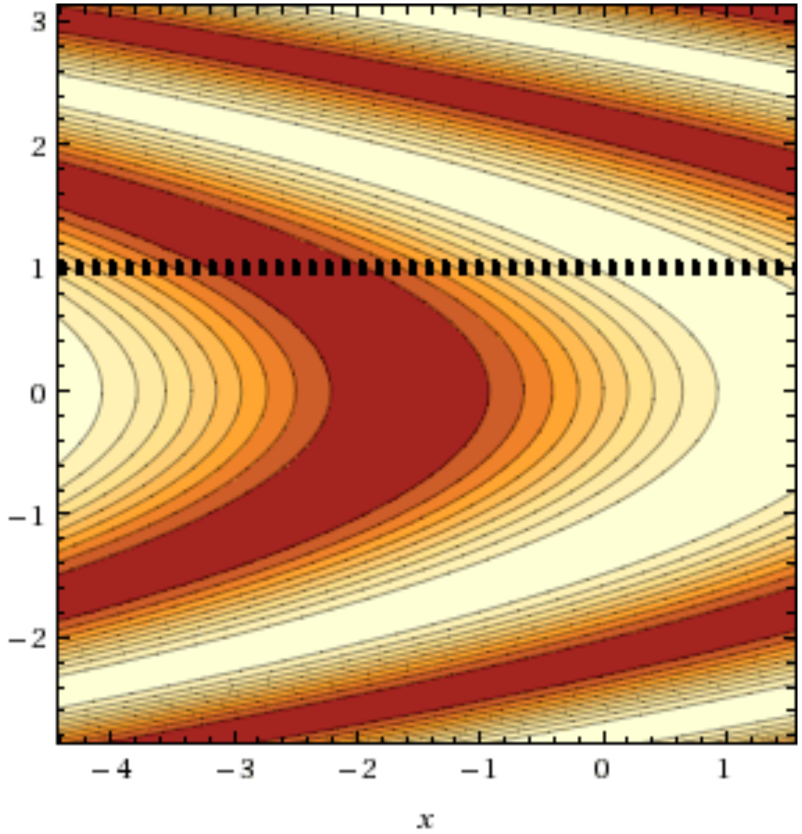
Primjer: $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$



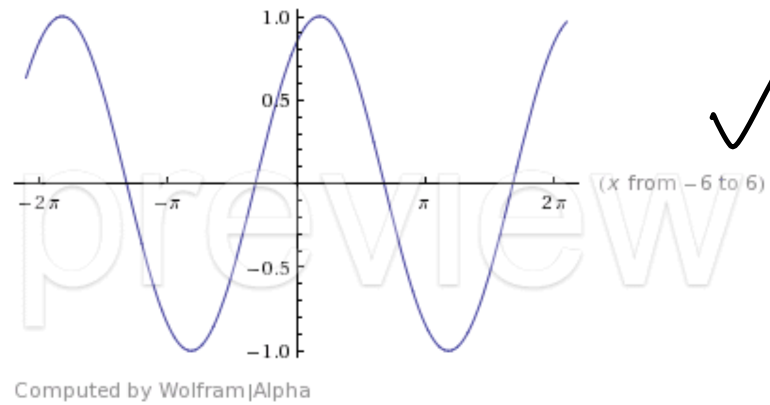
$f(x,y) = \sin\left(x + \cancel{y^2}\,1\right)$ i fiksiramo $y = 1$

Preko razinskih krivulja skalarne funkcije $F(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ ucrtan je pravac $y = 1$.

$y = 1$



Zamisli da se krećeš slijeva na desno u ravnini po pravcu uz fiksan $y = 1$. Opisivao bi graf funkcije $f(x) = \sin(x+1)$

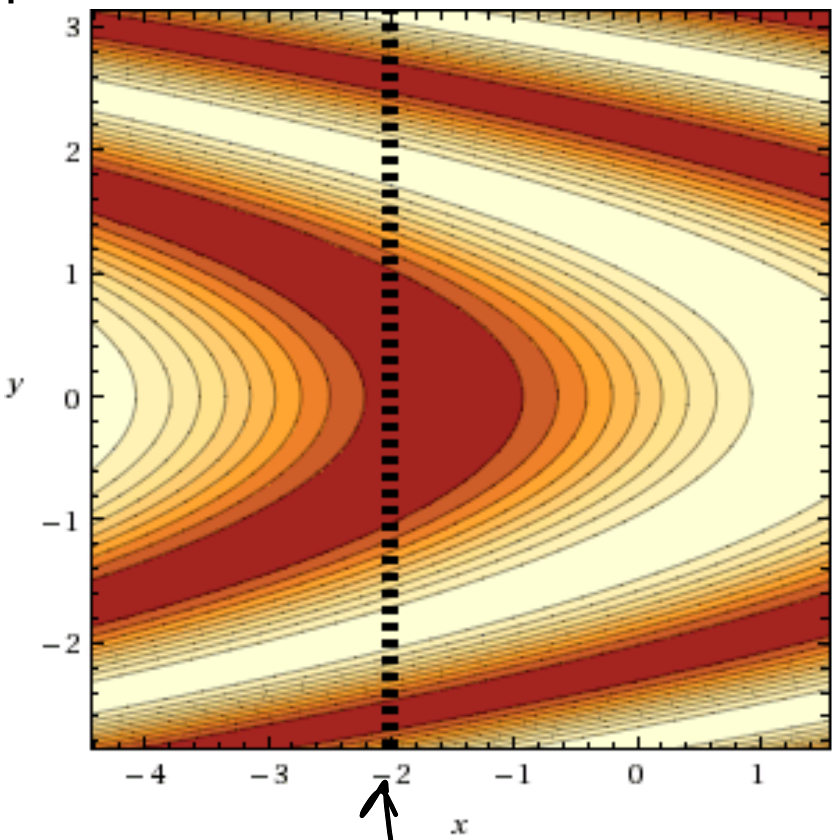


Izračunaj derivaciju:
$f'(x) = \cos(x+1)$
Za neki drugi fiksan y derivacija bi bila:

$$f'(x) = \cos\left(x + y^2\right)$$

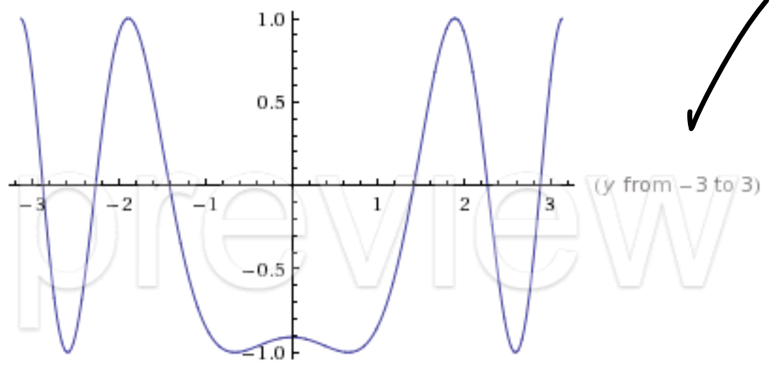
$f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ i fiksiramo $y = 1$

Preko razinskih krivulja skalarne funkcije $F(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$ ucrtan je pravac $x = -2$.



x=2

Zamisli da se krećeš odozdo na gore u ravnini po pravcu uz fiksan $x = -2$. Opisivao bi graf funkcije $f(x) = \sin\left(-2 + y^2\right)$



Computed by Wolfram|Alpha

Izračunaj derivaciju:
$f'(y) = \cos\left(-2 + y^2\right) \cdot 2y$

Za neki drugi fiksan x derivacija bi bila:

$$f'(y) = \cos\left(x + y^2\right) \cdot 2y$$

Parcijalna derivacija

Definicija

Zadana je skalarna funkcije (više varijabli) $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}_{\text{sve varijable}} \overset{f}{\longmapsto} f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

i zadano je $n-1$ konstanti $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Sada ako funkcija jedne varijable

$$(\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}}_{\text{konstante}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{varijabla}}}{x_i}, \underbrace{x_{i+1}, \ldots, x_n}_{\text{konstante}}) \longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

ima derivaciju ta derivacija se naziva još parcijalnom derivacijom funckije f po i-toj varijabli ili po x_i, označava se ovim oznakama

$$\cancel{\frac{df}{dx_i}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_i f, \quad \partial_{x_i} f, \quad f'_{x_i}$$

Primjeri parcijalnog deriviranja

Primjer

$$f(x,y,z) = x + \ln\left(xy + \sqrt{z}\right) \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

Definicije

Ako je izraz kojim je dana parcijalna derivacija po varijabli x^i određuje neprekidnu skalarnu funkcija tada kažemo da funkcija ima neprekidnu parcijalnu derivaciju po varijabli x^i

Ako su sve parcijalne derivacije neke funkcije neprekidne tada govorimo o neprekidno derivabilnoj funkciji.

Primjeri parcijalnog deriviranja

Primjer

$$f(x,y,z) = x + \ln\left(xy + \sqrt{z}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{xy + \sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ?\ 0 + \frac{1}{xy+\sqrt{z}} \cdot (x + 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

Definicije

Ako je izraz kojim je dana parcijalna derivacija po varijabli x^i određuje neprekidnu skalarnu funkcija tada kažemo da funkcija ima neprekidnu parcijalnu derivaciju po varijabli x^i
Ako su sve parcijalne derivacije neke funkcije neprekidne tada govorimo o neprekidno derivabilnoj funkciji.

Primjeri parcijalnog deriviranja

Primjer

$$f(x,y,z) = x + \ln\left(xy + \sqrt{z}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{xy + \sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy + \sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ? \quad 0 + \frac{1}{xy + \sqrt{z}} \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

Definicije

Ako je izraz kojim je dana parcijalna derivacija po varijabli x^i određuje neprekidnu skalarnu funkcija tada kažemo da funkcija ima neprekidnu parcijalnu derivaciju po varijabli x^i

Ako su sve parcijalne derivacije neke funkcije neprekidne tada govorimo o neprekidno derivabilnoj funkciji.

Primjeri parcijalnog deriviranja

Primjer

$$f(x,y,z) = x + \ln\left(xy + \sqrt{z}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{xy + \sqrt{z}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy + \sqrt{z}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{xy + \sqrt{z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Definicije

Ako je izraz kojim je dana parcijalna derivacija po varijabli x^i određuje neprekidnu skalarnu funkcija tada kažemo da funkcija ima neprekidnu parcijalnu derivaciju po varijabli x^i
Ako su sve parcijalne derivacije neke funkcije neprekidne tada govorimo o neprekidno derivabilnoj funkciji.

Parcijalna derivacija

Sjeti se da je derivacija kod funkcije jedne varijable:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$

Činjenica

Ako označimo točku $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ *i prirast i-te varijable* $\triangle x_i = x_i - a_i \in \mathbb{R}$ *tada je po definiciji:*

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \lim_{\triangle x_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \triangle x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(\mathbf{a})}{\triangle x_i}$$

Parcijalno deriviranje po odabranoj varijabli skalarne funkcije svodi se na standardno deriviranje držeći konstantnima sve varijable osim one odabrane.