Krivulje i plohe

Matematika II, Predavanje 5

M. Kosor[1]

[1]Pomorski odjel Sveučilišta u Zadru

3. travanj 2013.

Sadržaj predavanja

Krivulja i primjer (kružnica)

Definicija

Krivulja je zakrivljena linija. Uz veću dozu formalizma možemo reći da je to slika neprekidne funkcije koja segment brojeva preslikava u ravninu (krivulja u ravnini) ili neki drugi skup (krivulja u prostoru).

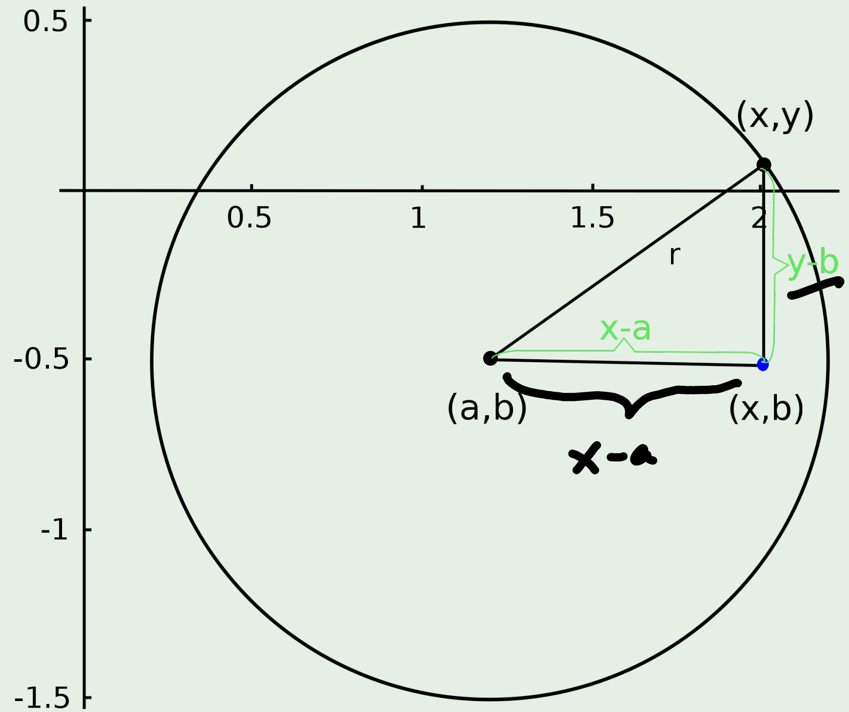
Činjenica

Važne krivulje karakteriziraju lijepa svojstva kojima su opisane.

Krivulja i primjer (kružnica)

Primjer

Definirajuće svojstvo:
Kružnica je skup točaka ravnine jednako udaljenih od zadanog središta.



Trukut na slici je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Gornja jednadžba analitički zadaje kružnicu radijusa r sa središtem u točki (a, b).

Krivulja i primjer (kružnica)

Definicija

Krivulja je zakrivljena linija. Uz veću dozu formalizma možemo reći da je to slika neprekidne funkcije koja segment brojeva preslikava u ravninu (krivulja u ravnini) ili neki drugi skup (krivulja u prostoru).

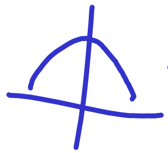
Činjenica

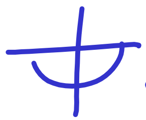
Važne krivulje karakteriziraju lijepa svojstva kojima su opisane.

Činjenica

Svojstva krivulje često se prevode u jednadžbe koje zadovoljavaju točke te krivulje.

Implicitno zadavanje krivulje (funkcije)

$y = \sqrt{1-x^2} \longrightarrow$  $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ ✓

$y = -\sqrt{1-x^2} \longrightarrow$  $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ ✓

Primjer (kružnica sa centrom u ishodištu i radijusom $r = 1$)

Neka je $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Tada $F(x,y) = 0$ (drugim riječima $\underline{x^2 + y^2 - 1 = 0}$) određuje kružnicu radijusa 1 sa središtem u ishodištu na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Imlicitno su zadane dvije funkcije:

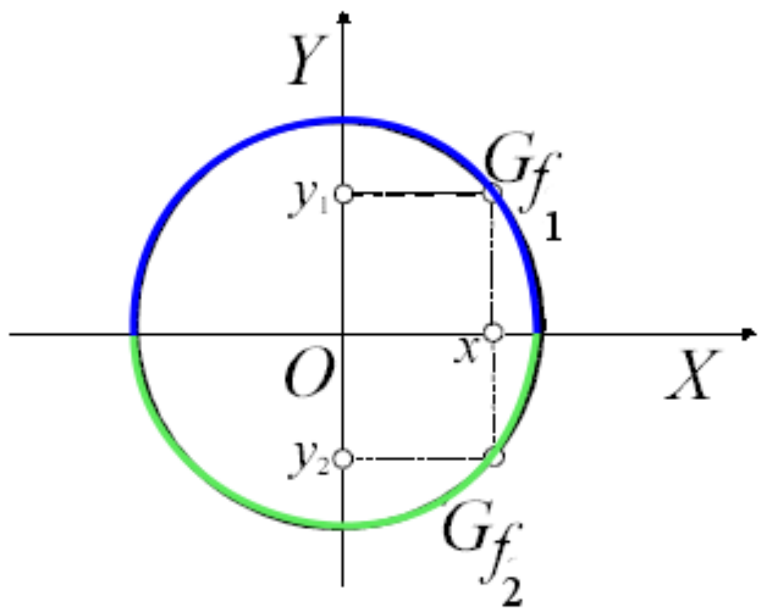
- $y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ određuje "gornju polukružnicu"
- $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ određuje "donju polukružnicu"

Implicitno zadavanje krivulje (funkcije)

Primjer (kružnica sa centrom u ishodištu i radijusom $r = 1$)

Neka je $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Tada $F(x,y) = 0$ (drugim riječima $x^2 + y^2 - 1 = 0$) određuje kružnicu radijusa 1 sa središtem u ishodištu na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Imlicitno su zadane dvije funkcije:

- $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ određuje "gornju polukružnicu"
- $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ određuje "donju polukružnicu"



Implicitno zadavanje krivulje (funkcije)

Primjer (kružnica sa centrom u ishodištu i radijusom $r = 1$)

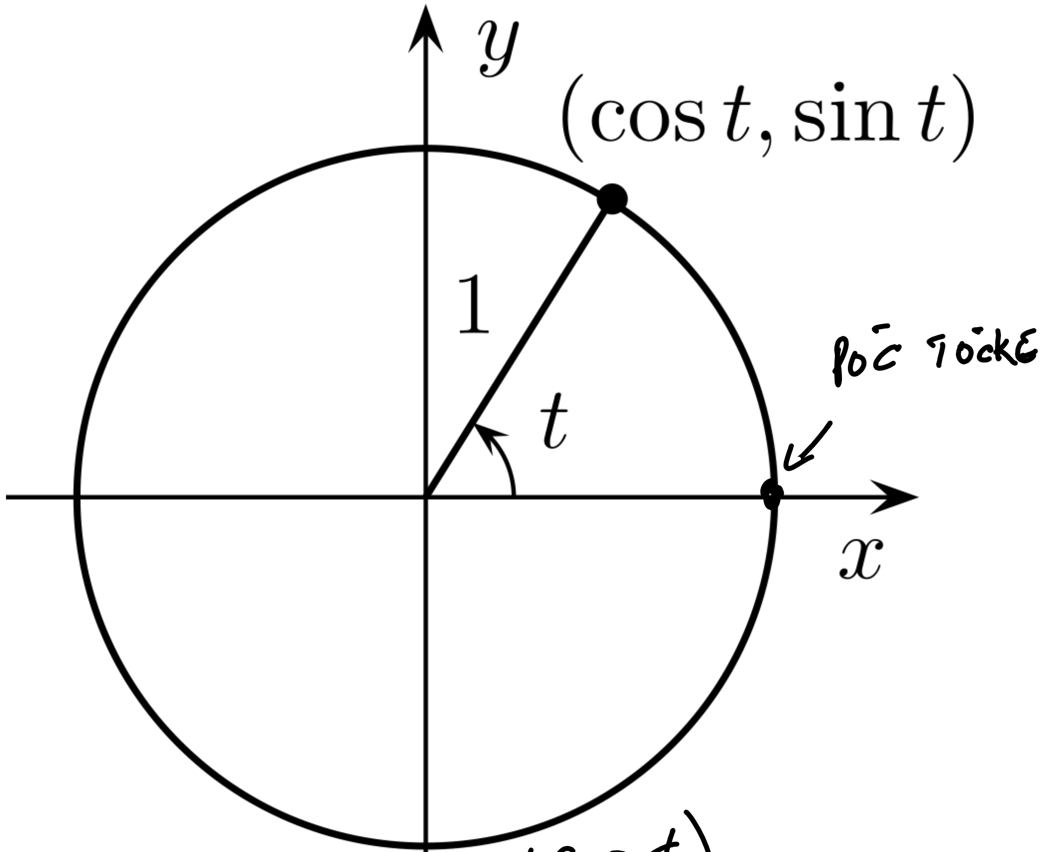
Neka je $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Tada $F(x,y) = 0$ (drugim riječima $x^2 + y^2 - 1 = 0$) određuje kružnicu radijusa 1 sa središtem u ishodištu na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Imlicitno su zadane dvije funkcije:

- $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ određuje "gornju polukružnicu"
- $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ određuje "donju polukružnicu"

Promatrajmo sada jednadžbu $F(x,y) = 0$ u kojoj dano pravilo F povezuje realne nepoznanice x i y. Ako se na nekom podskupu $X \subseteq \mathbb{R}$ svakom elementu $x \in X$ može pridružiti točno jedan element $y \in \mathbb{R}$ tako da uređeni par (x,y) zadovaljava polaznu jednadžbu, onda kažemo da je jednadžbom $F(x,y) = 0$ **implicitno zadana** funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$. U tomu je slučaju, dakle, $F(x, f(x)) = 0$ za svaki $x \in X$. U praksi se često pojavljuje slučaj da jednadžba $F(x,y) = 0$ dopušta, za svaki x iz nekog podskupa $X \subseteq \mathbb{R}$, više (od jedne) vrijednosti za y, pa se tada kaže da ta jednadžba određuje ~~više implicitno zadanih funkcija.~~ **KRIVULJU.**

Parametarsko zadavanje funkcije

Jedinična kružnica oko ishodišta poslužila je za definiciju trigonometrijskih funkcija.



$t \in [0, 2\pi]$, $r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Kada variramo parametar $t \in \mathbb{R}$ točke s koordinatama

$$x = \cos t \quad \checkmark$$
$$y = \sin t$$

odgovaraju točkama na kružnici.

Pomoću ove parametrizacije možemo neprekinuto preslikati (namotati) segment $\underline{[0, 2\pi]}$ na jediničnu kružnicu.

Parametarsko zadavanje krivulje (funkcije)

Promatrajmo dvije funkcije $\phi, \psi : T \to \mathbb{R}$ definirane na istomu skupu $T \subseteq \mathbb{R}$. Za svaki $t \in T$ označimo pripadne funkcijske vrijednosti s $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$. Ako je funkcija ϕ injektivna, njezino suženje $\phi : T \to \phi[T] \equiv X$ je bijekcija, pa postoji njoj inverzna funkcija $\phi^{-1} : X \to T$, $\phi^{-1}(x) = t$ čim je $x = \phi(t)$. Tada je dobro definirana kompozicija $\psi\phi^{-1} \equiv f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\psi\phi^{-1})(x)$. Pritom kažemo da je dobivena funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ **parametarski zadana** jednadžbama $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ (ili funkcijama ϕ i ψ). Prijelaz s jednadžaba $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ na eksplicitni oblik $y = f(x)$ nazivamo **eliminacijom parametra** t.

Primjer (Kružnica)

Za $t \in [0, \pi]$ i $x \in [1, -1]$:

$$\begin{cases} x = \cos t \to & t = \arccos x \searrow \\ y = \sin t \to & \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow = \sin(\arccos t) \end{cases}$$

Dobili smo eksplicitni oblik funkcije: $f(x) = \sin \arccos x$ kojoj graf opisuje samo gornju polukružnicu.

Parametarsko zadavanje krivulje (funkcije)

Promatrajmo dvije funkcije $\phi, \psi : T \to \mathbb{R}$ definirane na istomu skupu $T \subseteq \mathbb{R}$. Za svaki $t \in T$ označimo pripadne funkcijske vrijednosti s $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$. Ako je funkcija ϕ injektivna, njezino suženje $\phi : T \to \phi[T] \equiv X$ je bijekcija, pa postoji njoj inverzna funkcija $\phi^{-1} : X \to T$, $\phi^{-1}(x) = t$ čim je $x = \phi(t)$. Tada je dobro definirana kompozicija $\psi\phi^{-1} \equiv f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\psi\phi^{-1})(x)$. Pritom kažemo da je dobivena funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ **parametarski zadana** jednadžbama $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ (ili funkcijama ϕ i ψ). Prijelaz s jednadžaba $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ na eksplicitni oblik $y = f(x)$ nazivamo **eliminacijom parametra** t.

Primjer (Kružnica)

Za $t \in [0, \pi]$ i $x \in [1, -1]$:

$$\begin{cases} x = \cos t \to \quad t = \arccos x \searrow \\ y = \sin t \to \quad \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow = \sin(\arccos t) \end{cases}$$

Dobili smo eksplicitni oblik funkcije: $f(x) = \sin \arccos x$ kojoj graf opisuje samo gornju polukružnicu.

Iz usporedbe s drugim zapisom iste funkcije: $\sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$

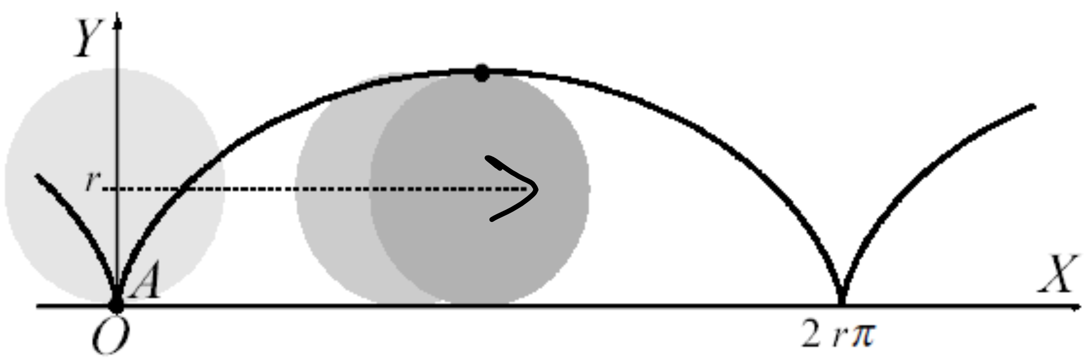
Cikoida

$$r(t) = \begin{bmatrix} R(t - \sin t) \\ R(t - \cos t) \end{bmatrix}$$

Primjer 2.3.5 Parametarske jednadžbe

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

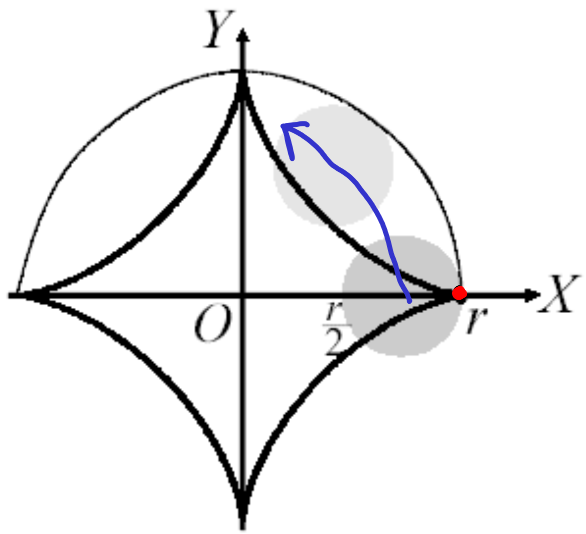
određuju ravninsku krivulju koju nazivamo **cikloidom** (v. crtež dolje). Cikloida opisuje "putanju" kojom se giba točka $A = (0,0,0)$ na kružnici $\mathcal{K}$ $\cdots$ $x^2 + (y-r)^2 = r^2$, $z = 0$, dok se $\mathcal{K}$ "kotrlja" po X-osi.



Cikloida.

Poveznica na Wikipedijin članak

Astroida



Astroida.

Primjer 2.3.6 Jednadžbe

$$x = r\cos^3 t,\ y = r\sin^3 t,\ z = 0, \quad t \in [0, 2\pi\rangle\ , \tag{28}$$

predstavljaju parametarski zapis ravninske krivulje **astroide**, što ju opisuje točka $A = (r, 0, 0)$ na kružnici $\mathcal{K}' \cdots \ (x - \frac{3r}{4})^2 + y^2 = (\frac{r}{4})^2,\ z = 0$, dok se $\mathcal{K}'$ "kotrlja" iznutra po kružnici $\mathcal{K} \cdots \ x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0$, ne izlazeći iz ravnine $z = 0$.

Eliminiranjem parametra t dobivamo jednadžbu $(z = 0)$

$$\boxed{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.} \tag{28'}$$

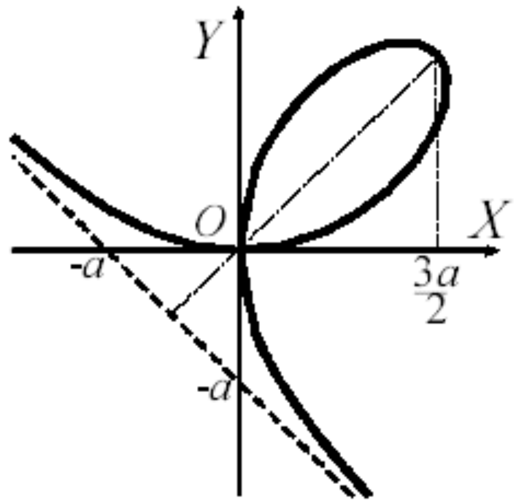
Poveznica na Wikipedijin članak

Descartesov list

Primjer 2.3.7 Za danu konstantu $a > 0$, parametarske jednadžbe

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \; y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \; z = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

određuju tzv. **Descartesov list**

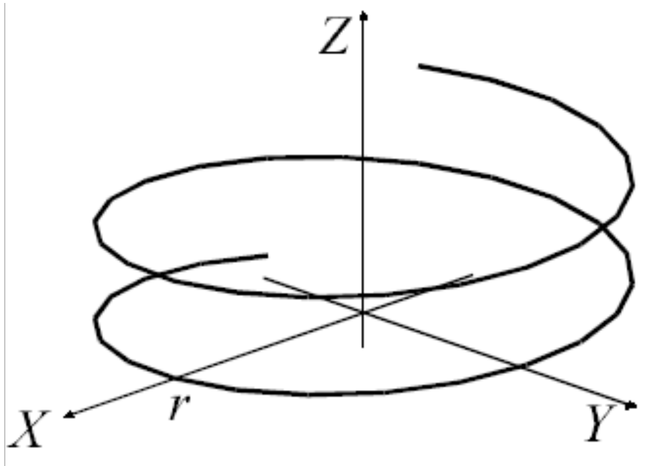


Descartesov list.

Eliminiranjem parametra t dobivamo jednadžbu $(z = 0)$

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0.}$$

Kružna uzvojnica (primjer u 3D)



Kru žna uzvojnica.

Primjer 2.3.8 Za dane konstante a i $r > 0$, parametarske jednadžbe

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = at, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

predstavljaju **kružnu uzvojnicu** (ili **cilindričnu spiralu**) - prostornu krivulju koju opisuje točka što se na udaljenosti r vrti oko pravca $p \cdots\ x = 0$, $y = 0$, i istodobno se stalnom brzinom a giba usporedno s tim pravcem.

Poveznica na Wikipedijin članak

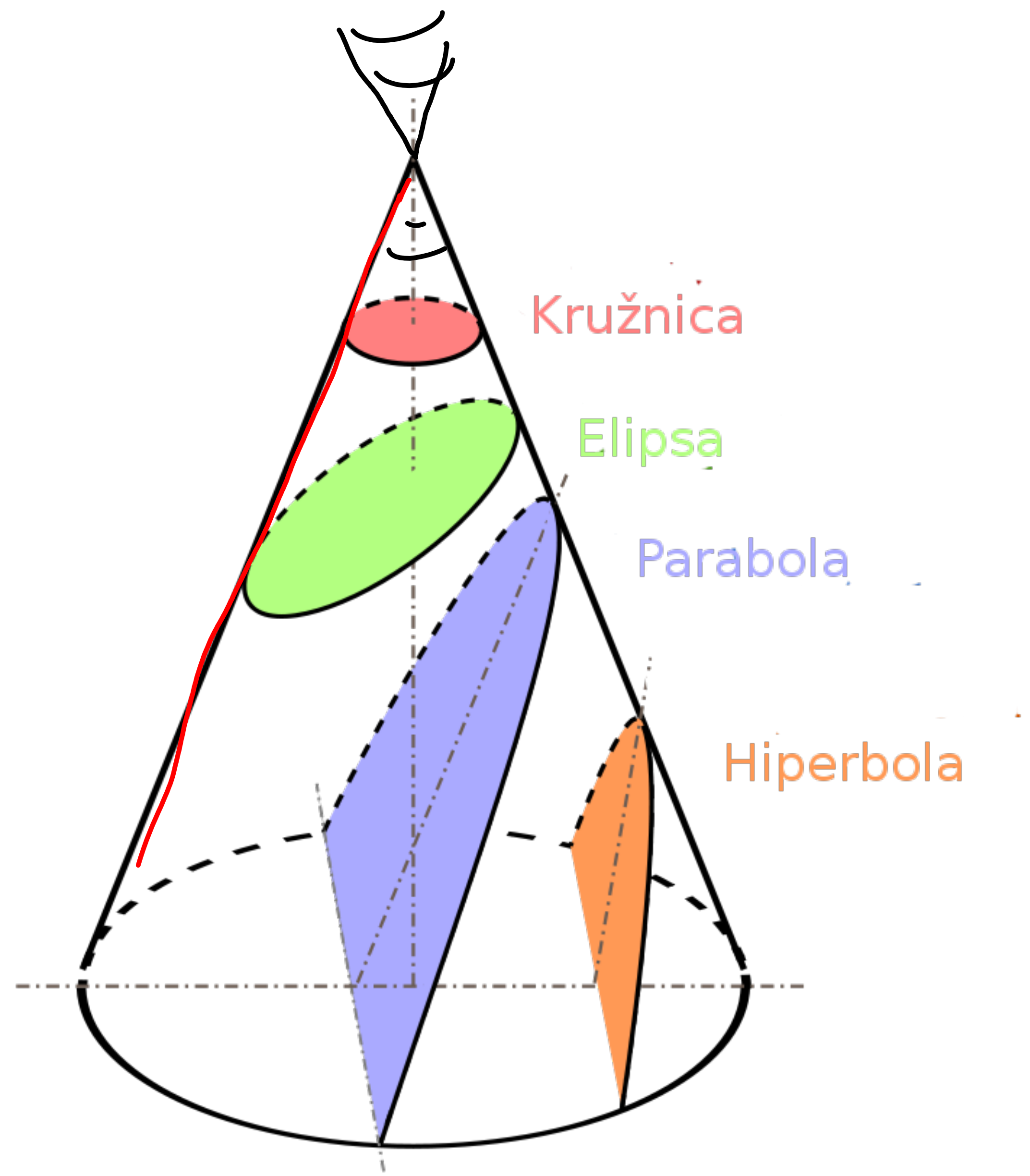
Krivulje drugog reda (čunjosječnice)

Pozabavimo se najprije tzv. krivuljama drugoga reda. Neka je u ravnini ρ dan pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Pod **krivuljom drugoga reda** podrazmijevamo skup svih točaka $T = (x, y)$ u ravnini ρ koordinate kojih zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

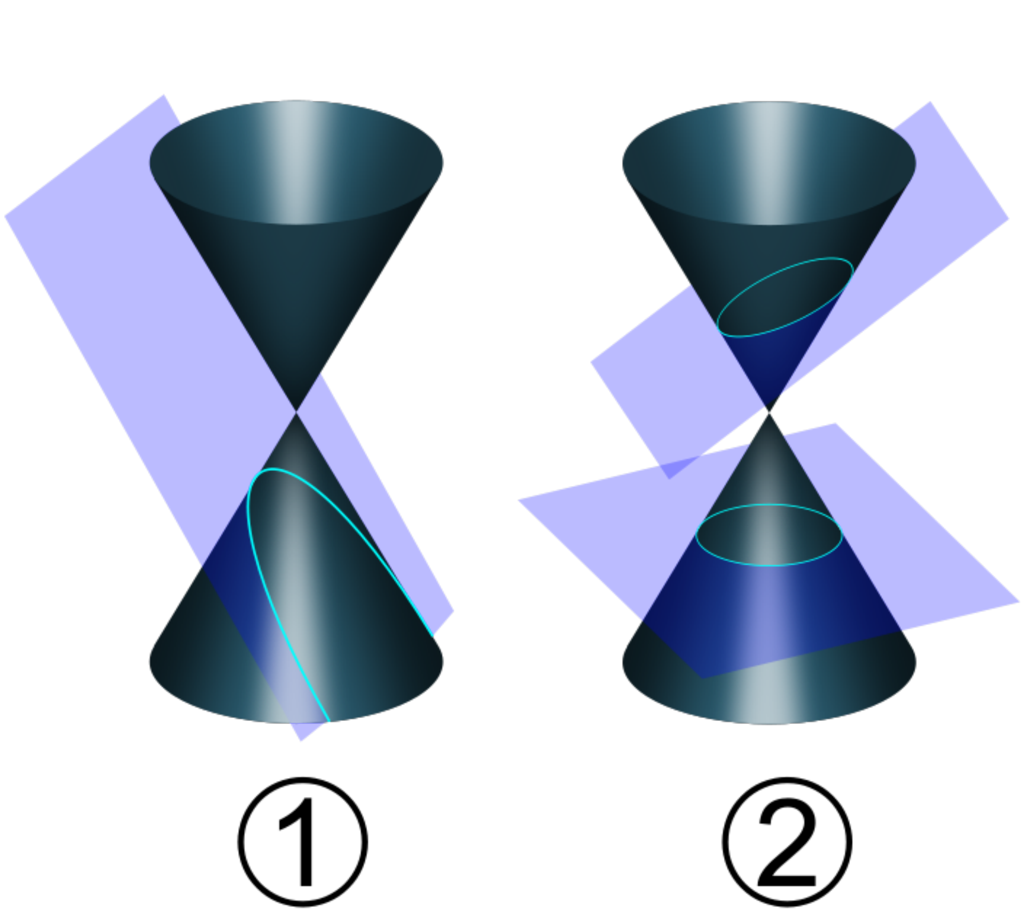
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \checkmark \tag{18}$$

s danim realnim koeficijentima $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, takvima da je barem jedan od A, B ili C različit od nule. Sve krivulje s općom jednadžbom (18) mogu se dobiti kao presjeci ravnina i stožnih plaštova - stoga ih nazivamo i **čunjosječnicama**. Sada ćemo malo bolje upoznati kružnicu, elipsu, hiperbolu i parabolu, tj. njihove jednadžbe u nekim posebnim položajima s obzirom na odabrani koordinatni sustav.

Krivulje drugog reda (čunjosječnice)



Krivulje drugog reda (čunjosječnice)



Slika: Čunjosječnice: 1. parabola, 2. elipsa i kružnica, 3. hiperbola

Zajednička svojstva čunjosječnica

Čunjosječnice su one krivulje koje za zadane:

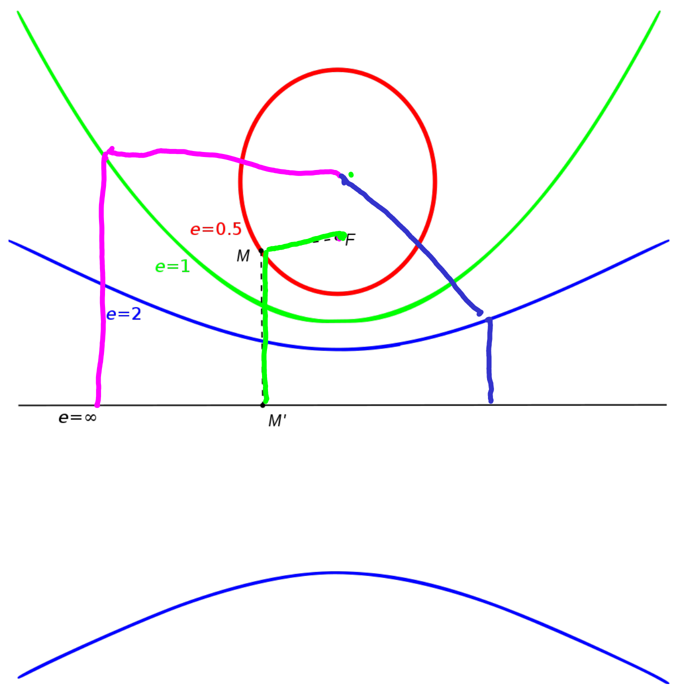
1. točku F (žarište ili fokus),
2. pravac P (ravnalica ili direktrisa) koji ne prolazi fokusom i
3. pozitivni broj e (ekcentricitet),

sadrže točke T kojima je udaljenost do F jednaka e puta udaljenost do D:

$$d(T,F) = e \cdot d(T,D)$$

Klasifikacija:

- "$e = 0$" kružnica
- $e \in \langle 0,1 \rangle$ elipsa
- $e = 1$ parabola $\checkmark$
- $e > 1$ hiperbola



Klasifikacija obzirom na jednadžbu drugog stupnja

Neka A, B i C nisu svi nula, tada jednadžba:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}} = 0$$

$$\dashrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax + \frac{B}{2}y + \frac{D}{2}\cdot 1 \\ \frac{B}{2}x + Cy + \frac{E}{2}\cdot 1 \\ \frac{D}{2}x + \frac{E}{2}y + F \end{bmatrix} = 0$$

$$Ax^2 + \frac{B}{2}xy + \frac{D}{2}x + \frac{B}{2}xy + Cy^2 + \frac{E}{2}y + \frac{D}{2}x + \frac{E}{2}y + F = 0$$

Klasifikacija obzirom na jednadžbu drugog stupnja

Neka A, B i C nisu svi nula, tada jednadžba:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

u matričnom zapisu:

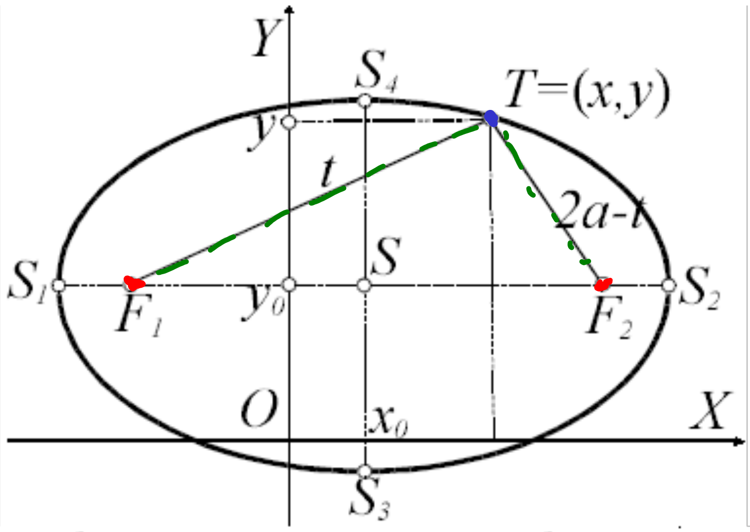
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + Dx + Ey + F = 0$$

determinantom $AC - \frac{B^2}{4}$ (diskriminatom $\triangle = B^2 - 4AC$) određuje:

- elipsu ako $AC - \frac{B^2}{4} > 0$ ($\triangle < 0$),
  - kružnicu ako je $A = C$ i $B = 0$ (podtip elipse),
- parabolu ako $AC - \frac{B^2}{4} = 0$ ($\triangle = 0$) i
- hiperbolu ako $AC - \frac{B^2}{4} < 0$ ($\triangle > 0$),
  - asimptote hipebole zatvaraju pravi kut ako $A + C = 0$ (podtip),

Elipsa

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$



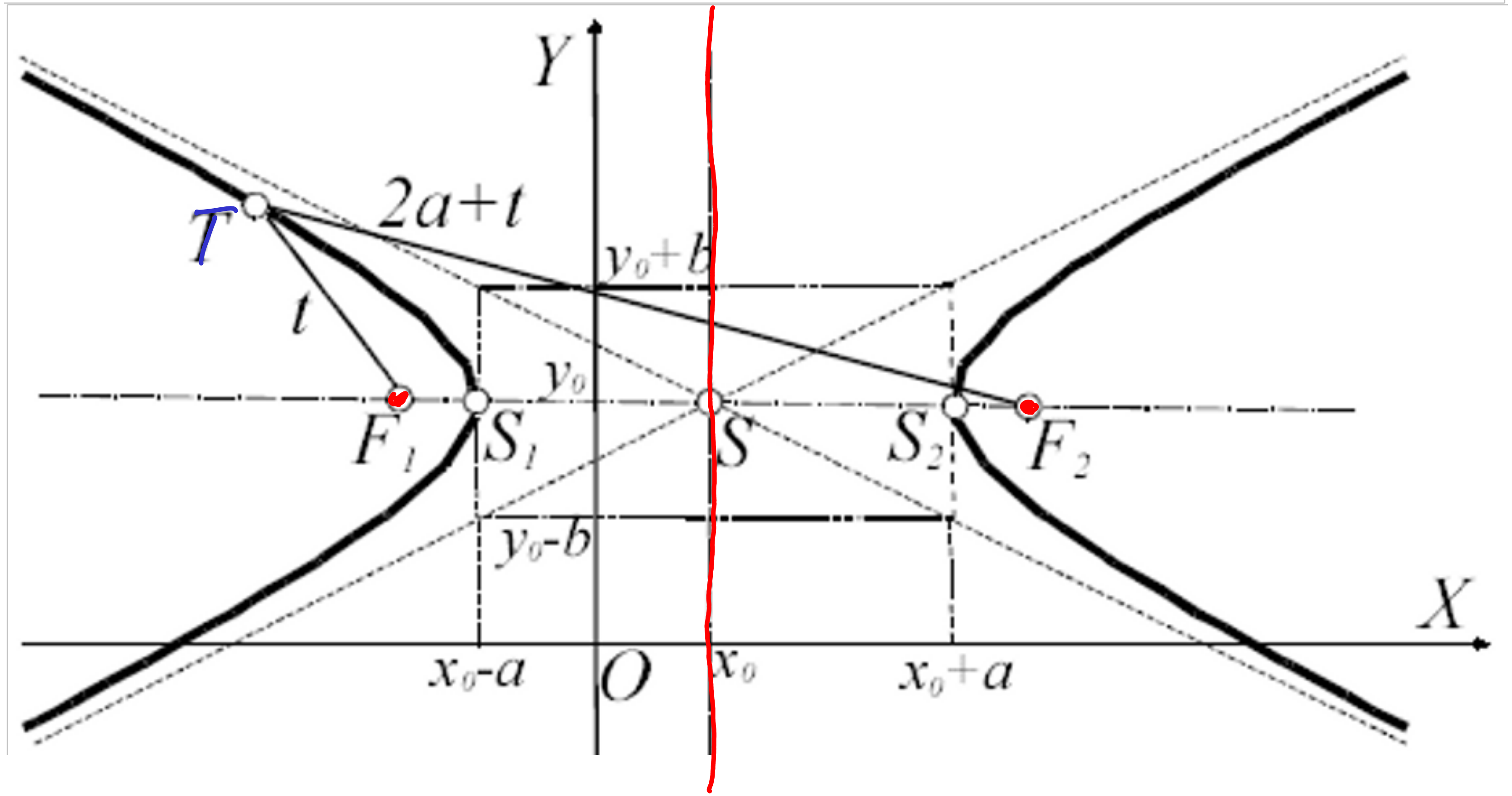
$d(T,F_{1,2}) = e\,d(T,p)$

$0 < e < 1$

Neka su F_1 i F_2 točke u ravnini ρ i neka je a takav realni broj da je $2a > d(F_1, F_2)$. Tada točkovni podskup $\mathcal{E}(F_1, F_2; a) = \{T \mid d(F_1, T) + d(F_2, T) = 2a\}$ od ρ nazivamo **elipsom**. Točke F_1, F_2 zovemo **žarištima** (ili **fokusima**), a broj $e \equiv \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$ **geometrijskim ekscentricitetom** promatrane elipse. (U slučaju $e = 0$, tj. $F_1 = F_2 \equiv F$, elipsa $\mathcal{E}$ postaje kružnicom $\mathcal{K}$; $S = F$ i $r = a$.) Dužinu $\overline{S_1S_2}$, gdje su S_1 i S_2 presječne točke od $\mathcal{E}$ pravcem F_1F_2, nazivamo **velikom osi**; primijetimo da je duljina $d(S_1, S_2)$ velike osi $2a$ i da je $e < a$. Točku $S = (x_0, y_0)$ nazivamo **središtem**, a dužinu $\overline{S_3S_4}$ **malom osi** od $\mathcal{E}$; duljina $d(S_3, S_4)$ male osi jest $2b$. Nalaze li se elipsina žarišta na pravcu usporednom s Y-osi, pripadna jednadžba će biti oblika (20) u kojoj su $x - x_0$ i $y - y_0$ izmijenili mjesta.

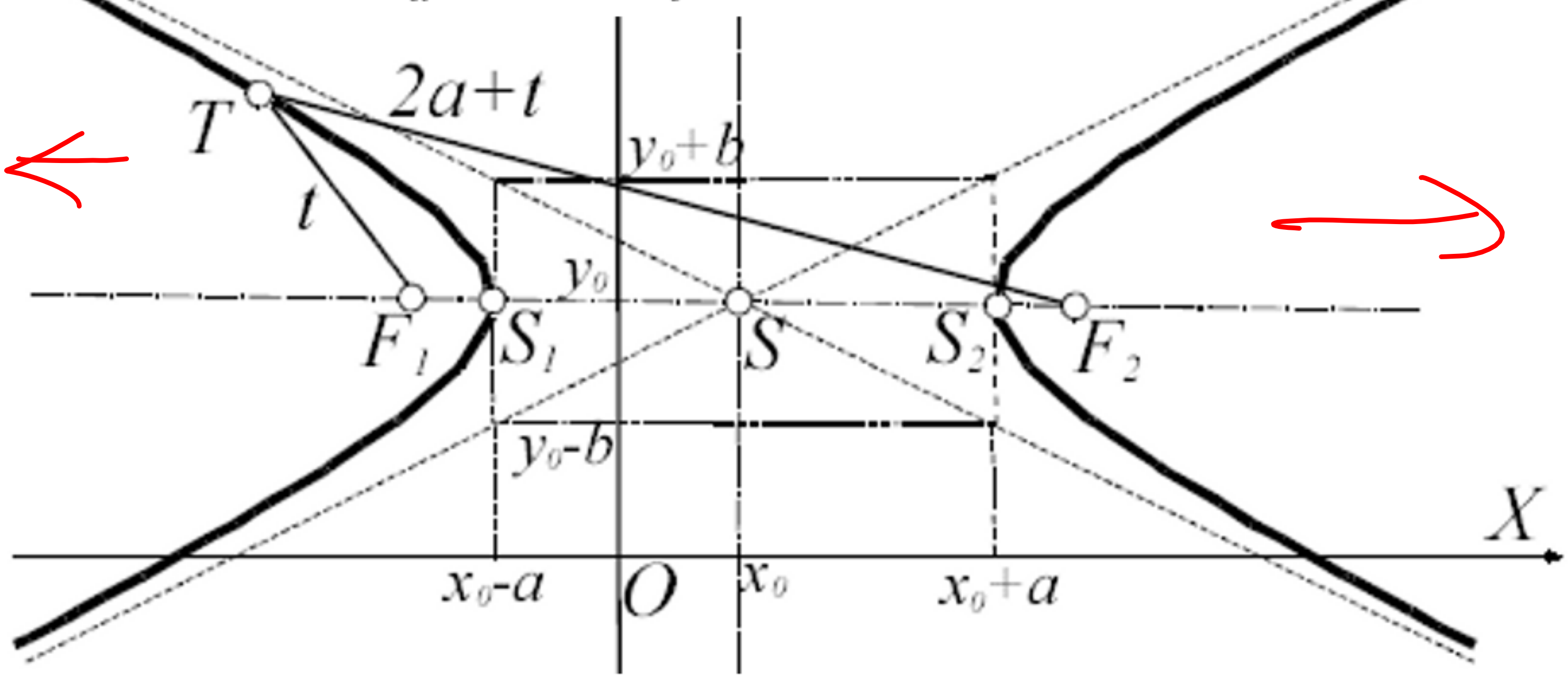
Poveznica na Wikipedijin članak

Definicija 2.3.2 *Neka su F_1 i F_2 točke u ravnini ρ i neka je a takav realni broj da je $0 < 2a < d(F_1, F_2)$. Točkovni podskup $\mathcal{H}(F_1, F_2; a) = \{T \mid |d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a\}$ od ρ nazivamo* ***hiperbolom****. Točke F_1, F_2 zovemo* ***žarištima*** *(ili* ***fokusima****), a broj $e \equiv \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$* ***geometrijskim ekscentricitetom*** *promatrane hiperbole. (Slučaj $e = 0$, tj. $F_1 = F_2$, nije moguć.) Dužinu $\overline{S_1S_2}$, gdje su S_1 i S_2 presječne točke od $\mathcal{H}$ pravcem F_1F_2, nazivamo* ***glavnom osi****; primijetimo da je duljina $d(S_1, S_2)$ glavne osi $2a$ i da je $e > a$.*



Hiperbola

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad b^2 \equiv e^2 - a^2.$$



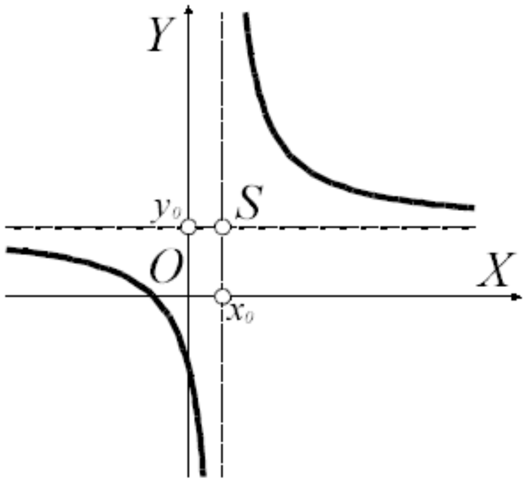
Relacija (21) je hiperbolina jednadžba u slučaju kad joj je velika os usporedna s X-osi. Točku $S = (x_0, y_0)$ nazivamo **središtem**, a dužinu $\overline{S_3S_4}$ **sporednom osi** od $\mathcal{H}$; duljina $d(S_3, S_4)$ sporedne osi jest $2b$. Pravce $y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ nazivamo hiperbolinim **asimptotama**. Nalaze li se hiperbolina žarišta na pravcu $x = x_0$ usporednom s Y-osi, u pripadnoj jednadžbi oblika (21) će $x - x_0$ i $y - y_0$ izmijeniti mjesta tj.

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{22}$$

Hiperbola

Neka se hiperbolina žarišta F_1 i F_2 nalaze na pravcu $y - y_0 = x - x_0$ (simetrično s obzirom na njezino središte $S = (x_0, y_0)$) i neka je $b = a$. Tada je $F_1 = (x_0 - a, y_0 - a)$, $F_2 = (x_0 + a, y_0 + a)$ i asimptote su usporedne s koordinatnim osimam (v. crtež), a hiperbolina jednadžba poprima oblik

$$(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a^2}{2}. \tag{23}$$



$f(x) = \frac{1}{x}$

Slično se, kad je $b = a$ i žarišta na pravcu $y - y_0 = -(x - x_0)$, za hiperbolinu jednadžbu dobiva

$$(x - x_0)(y - y_0) = -\frac{a^2}{2}. \tag{24}$$

Parabola

Definicija 2.3.3 *Neka je p pravac u ravnini ρ i neka je F točka u ρ izvan p. Skup $\mathcal{P}(F;p) = \{T \mid d(F,T) = d(F,p)\}$ svih točaka T u ravnini ρ jednako udaljenih od točke F i od pravca p nazivamo* **parabolom** *(ili* **hitnicom***). Za F kažemo da je* **žarište** *(ili* **fokus***), a za p da je* **ravnalica** *(ili* **direktrisa***) dotične parabole.*

Jednadžbe parabole

Ravnalica usporedna sa x-osi:

gleda prema desno

$(y - y_0)^2 = 2a(x - x_0)$

gleda prema lijevo

$(y - y_0)^2 = -2a(x - x_0)$.

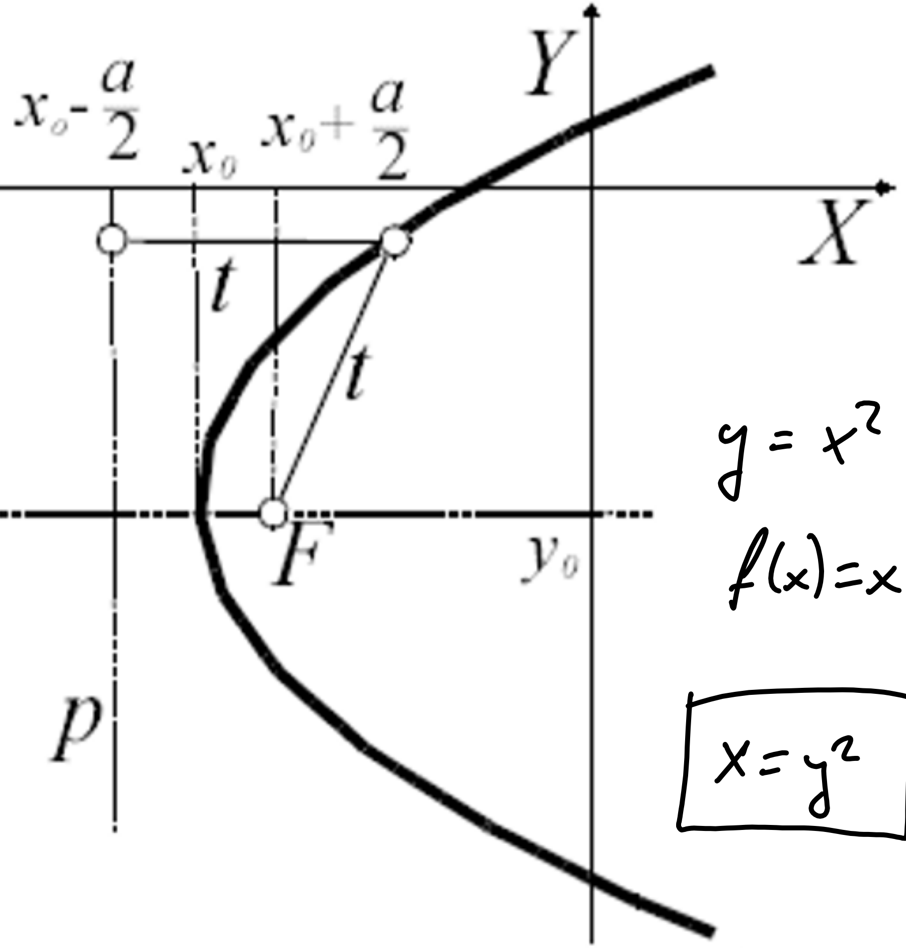
Ravnalica usporedna s y-osi:

gleda prema gore

$(x - x_0)^2 = 2a(y - y_0)$

gleda prema dolje

$(x - x_0)^2 = -2a(y - y_0)$



$y = x^2$

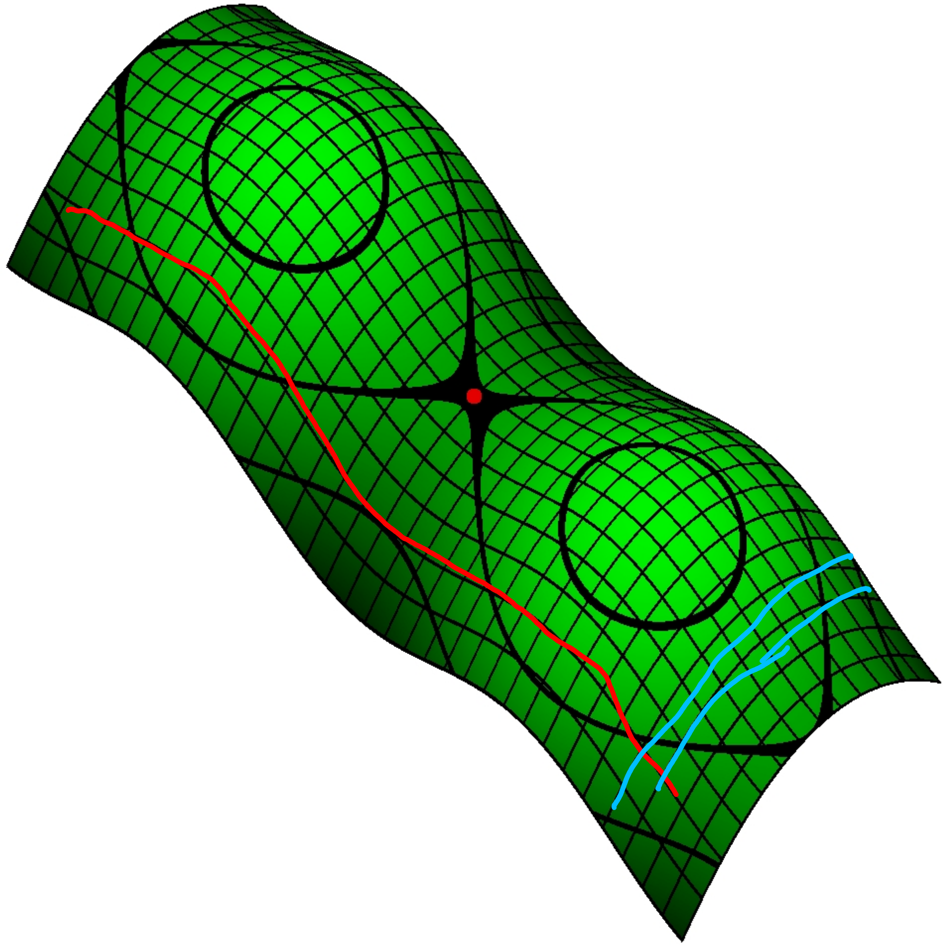
$f(x) = x^2$

$\boxed{x = y^2}$

Što je ploha?

Definicija

Značajno pojednostavljujući možemo reći da je ploha (lokalno) slika neprekidnog preslikavanja dijela ravnine u prostor. Također, plohu možemo definirati i kao skup nultočaka skalarne neprekidne funkcije u prostoru. Možemo reći da se lokalno na plohi u svakoj točki možemo kretati u dvije dimenzije, ali ploha posjeduje određenu zakrivljenost.



Slika: Primjer plohe s prikazanim razinskim krivuljama

Implicitno zadavanje funkcije više varijabli

$F(x, y) = 0$ (u $\mathbb{R}$) implicitno zadana realna funkcija jedne realne varijable.

jednadžba $F(x^1, \cdots, x^m, x^{m+1} \equiv y) = 0$
implicitno određuje skalarnu funkciju $(x^1, \cdots, x^m) = x \mapsto y = f(x)$
od m varijabla.

Primjer (sfera)

Neka je $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Tada $F(x, y, z) = 0$ (drugim riječima $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) određuje plohu — sferu radijusa 1 sa središtem u ishodištu na $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Imlicitno su zadane dvije funkcije:

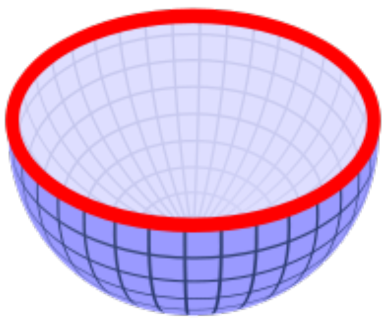
- $z = f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ određuje "gornju polusferu"
- $z = f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ određuje "donju polusferu"

Implicitno zadavanje funkcije više varijabli

Primjer (sfera)

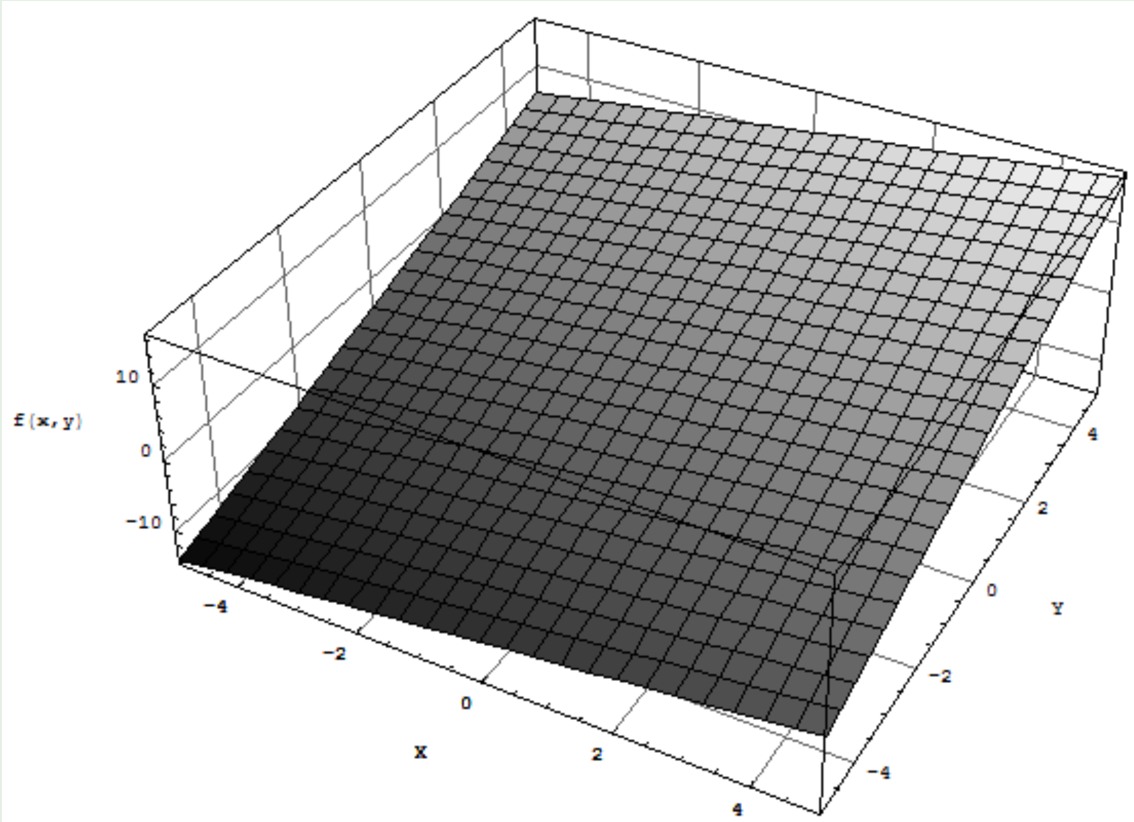
Neka je $F(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Tada $F(x,y,z) = 0$ (drugim riječima $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) određuje plohu — sferu radijusa 1 sa središtem u ishodištu na $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Imlicitno su zadane dvije funkcije:

- $z = f_1(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ određuje "gornju polusferu"
- $z = f_2(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ određuje "donju polusferu" ✓



Na slici lijevo: Donja polusfera, domena implicitne funkcije je krug radijusa 1 u xy-ravnini.

Primjer

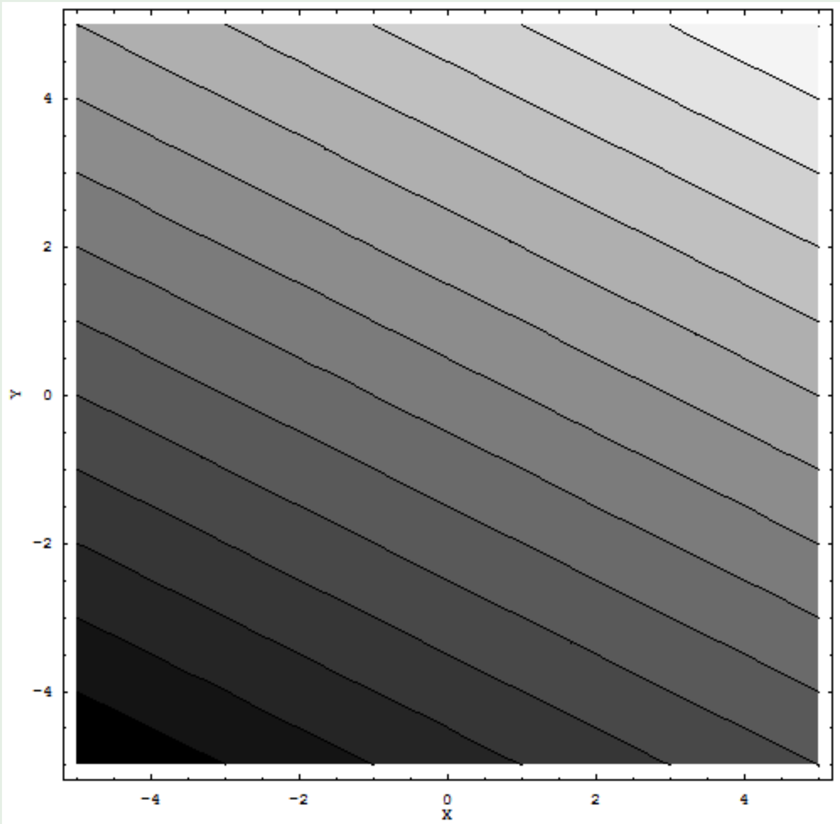


Slika: $f(x,y) = x + 2y + 1$

Ravnina u prostoru

Implicitno zadana sa $Ax + By + Cz + D = 0$, eksplicitno $z = f(x, y) = ax + by + c$

Primjer



$$z = f(x, y) = x + 2y + 1 = c$$

Razina $f(x, y) = c$ za $x + 2y + 1 = c \Longrightarrow$ krivulje $y = -\frac{1}{2}x + \frac{c-1}{2}$

Plohe drugog reda (kvadrike)

Promotrimo sada, po sličnosti s krivuljama drugoga reda, tzv. plohe drugoga reda. Neka je u prostoru $\mathbb{E}$ zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Pod **plohom drugoga reda** (ili **kvadrikom**) podrazumijevamo skup svih točaka $T = (x, y, z)$ u prostoru $\mathbb{E}$ koordinate kojih zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

s realnim koeficijentima A, B, C, D, E, F, G, H, J i K, pod uvjetom da je barem jedan od A, B, C, D, E ili F različit od nule. Posebno će nas zanimati samo neke kvadrike.

Klasifikacija obzirom na jednadžbu drugog stupnja

Jednadžbu kvadrike:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exy + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

možemo promatrati u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 & G/2 \\ D/2 & B & F/2 & H/2 \\ E/2 & F/2 & C & J/2 \\ G/2 & H/2 & J/2 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ili:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

Klasifikacija obzirom na jednadžbu drugog stupnja

Obzirom na rang matrica u zapisu jednadžbe kvadrike:

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 & G/2 \\ D/2 & B & F/2 & H/2 \\ E/2 & F/2 & C & J/2 \\ G/2 & H/2 & J/2 & K \end{bmatrix}$$

plohe možemo klasificirati kao:

$\mathrm{rang}(M_2) = 4$, $\mathrm{rang}(M_1) = 3$: elipsoide i hiperboloide

$\mathrm{rang}(M_2) = 4$, $\mathrm{rang}(M_1) = 2$: paraboloide

$\mathrm{rang}(M_2) = 3$, $\mathrm{rang}(M_1) = 3$: stožce (konuse)

$\mathrm{rang}(M_2) = 3$, $\mathrm{rang}(M_1) \leq 2$: valjčaste (cilindrične) plohe

$\mathrm{rang}(M_2) \leq 2$: ravnine

Kanonski primjeri kvadrika slijede...

Činjenica

Pogodnom rotacijom svaku kvadriku možemo postaviti tako da orijentacija glavnih osi plohe odgovara koordinatnim osima. Pogodnom translacijom kvadriku možemo "centrirati" u ishodištu.

Primjer

Cilindar koji leži u koso i sa strane može se ispraviti tako da se pruža duž osi z i da je centriran u ishodištu

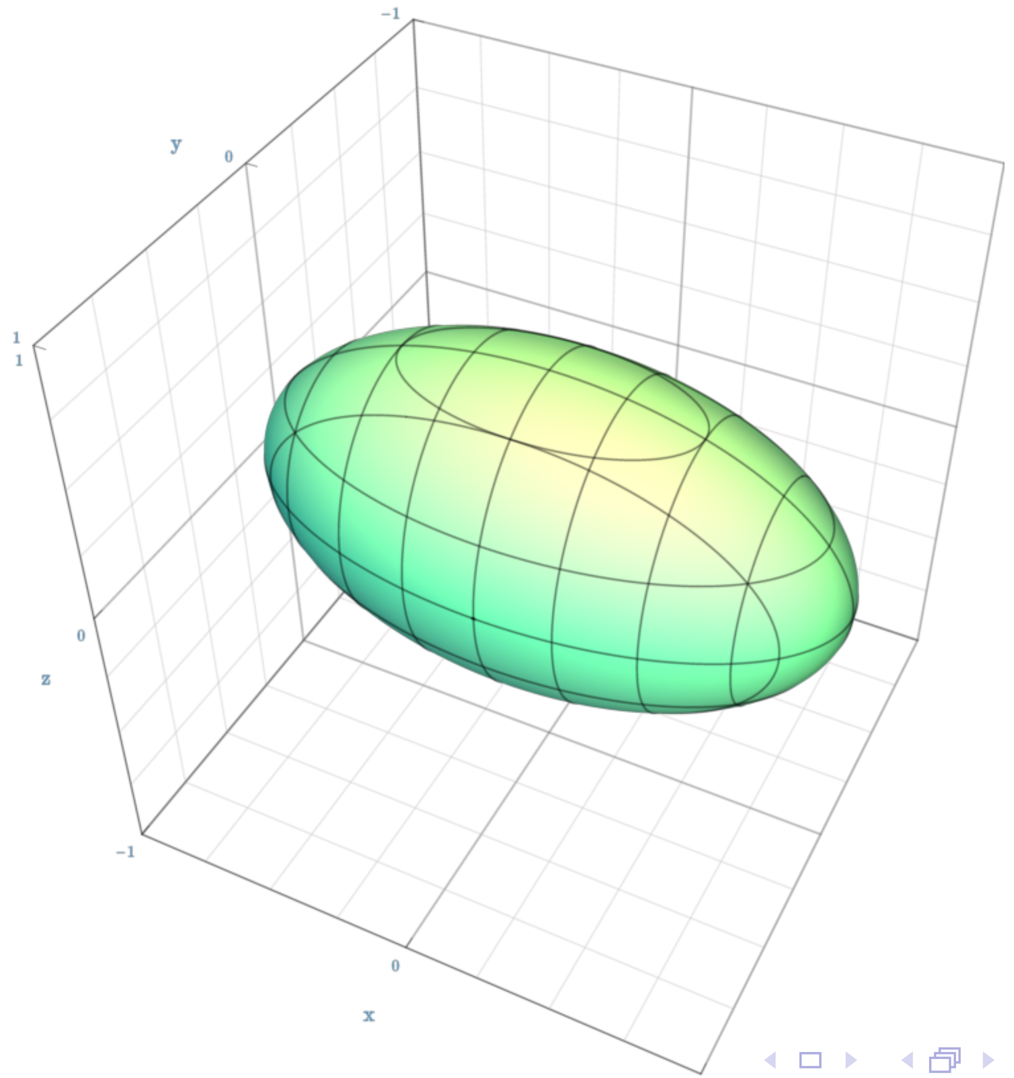
Za svaki tip kvadrike pokazati ću primjer u kanonskom obliku

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \pm \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = \pm 1$$

Elipsoid

Standardna jednadžba elipsoida centriranog u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ i orientiranog prema koordinatnim osima:

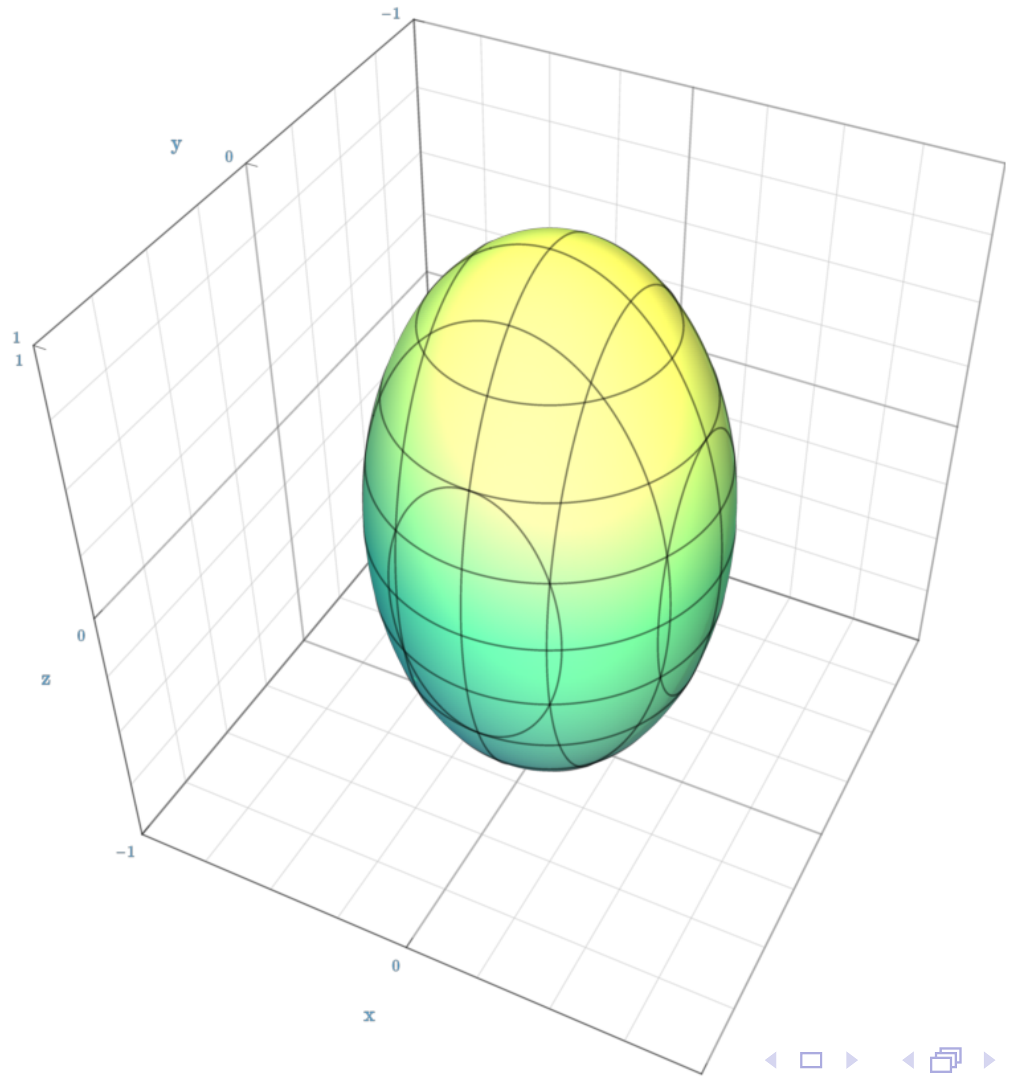
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$



Sferoid (elipsoid sa dvije osi jednake duljine)

Standardna jednadžba sferoida centriranog u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ orientiranog prema koordinatnim osima:

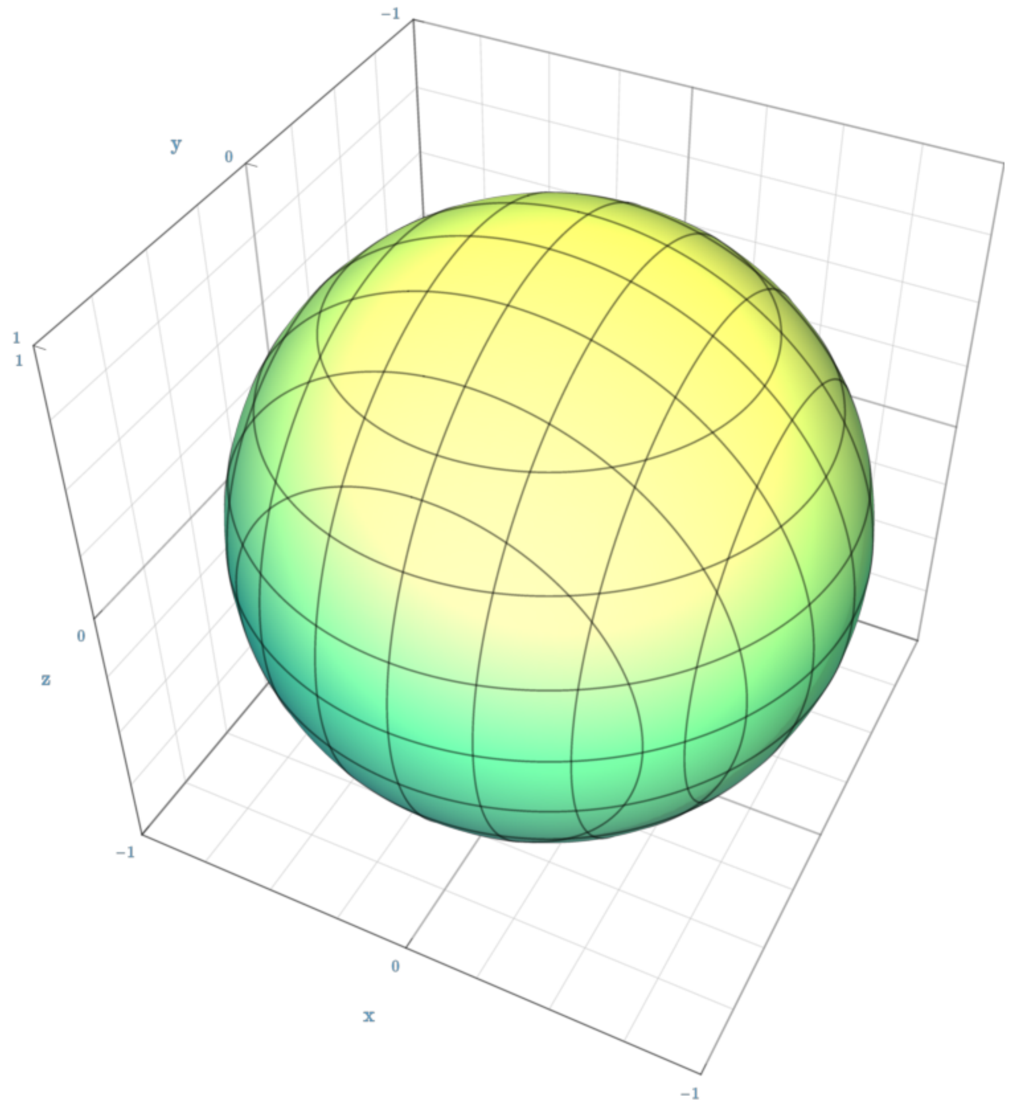
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} = 1$$



Kuglina ploha, sfera (podtip sferoida i elipsoida)

Standardna jednadžba sfere centrirane u točki $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{a^2} = 1$$

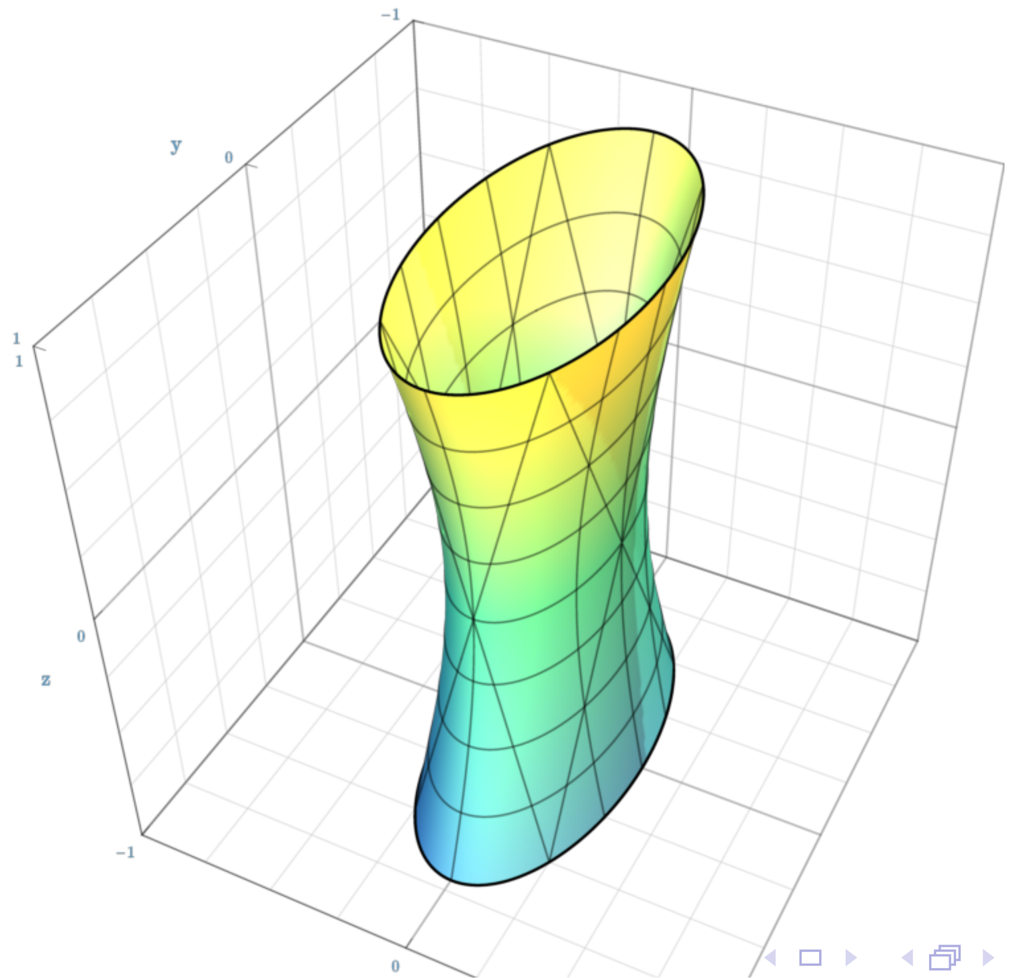


Jednokrilni eliptični hiperboloid

Standardna jednadžba jednokrilnog eliptičnog hiperboloida centriranog u točki $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Primjer. $16x^2+4y^2-z^2=1$

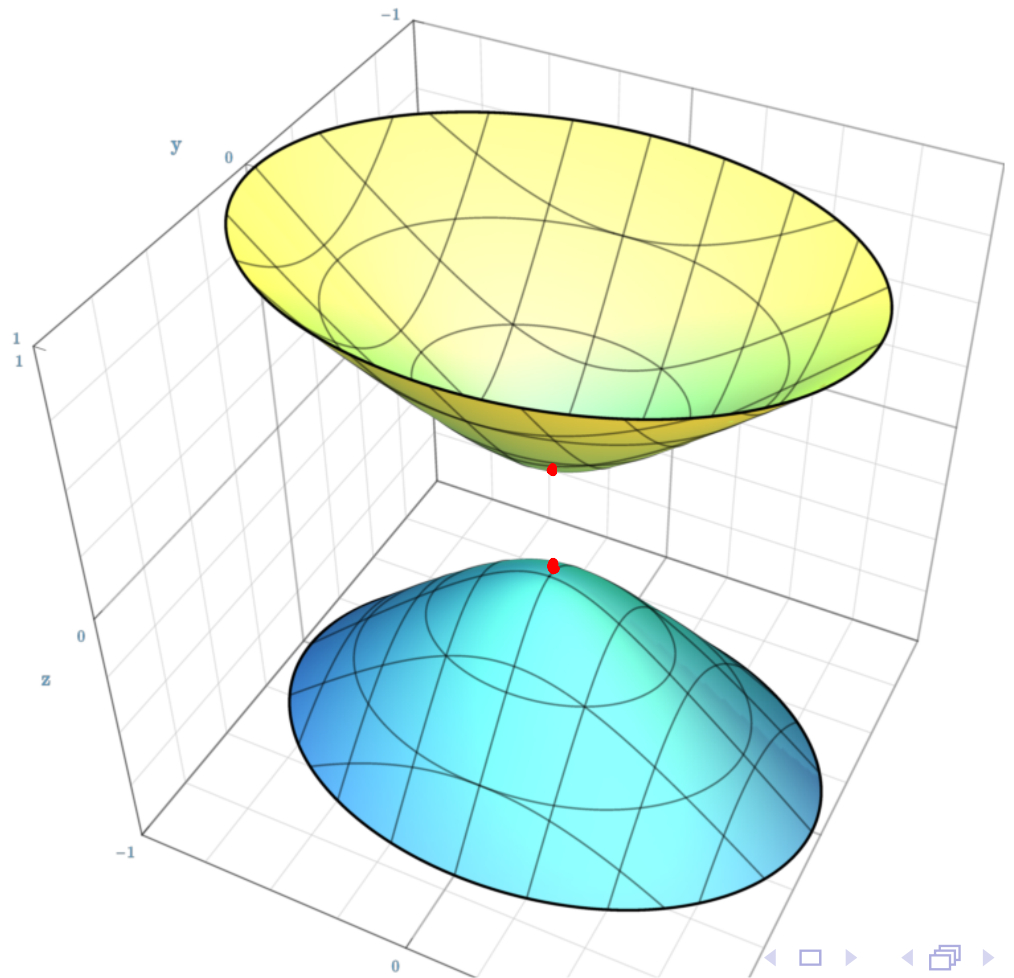


Dvokrilni eliptični hiperboloid

Standardna jednadžba dvokrilnog eliptičnog hiperboloida centriranog u točki $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

Primjer. $2x^2+4y^2-3z^2=-1$

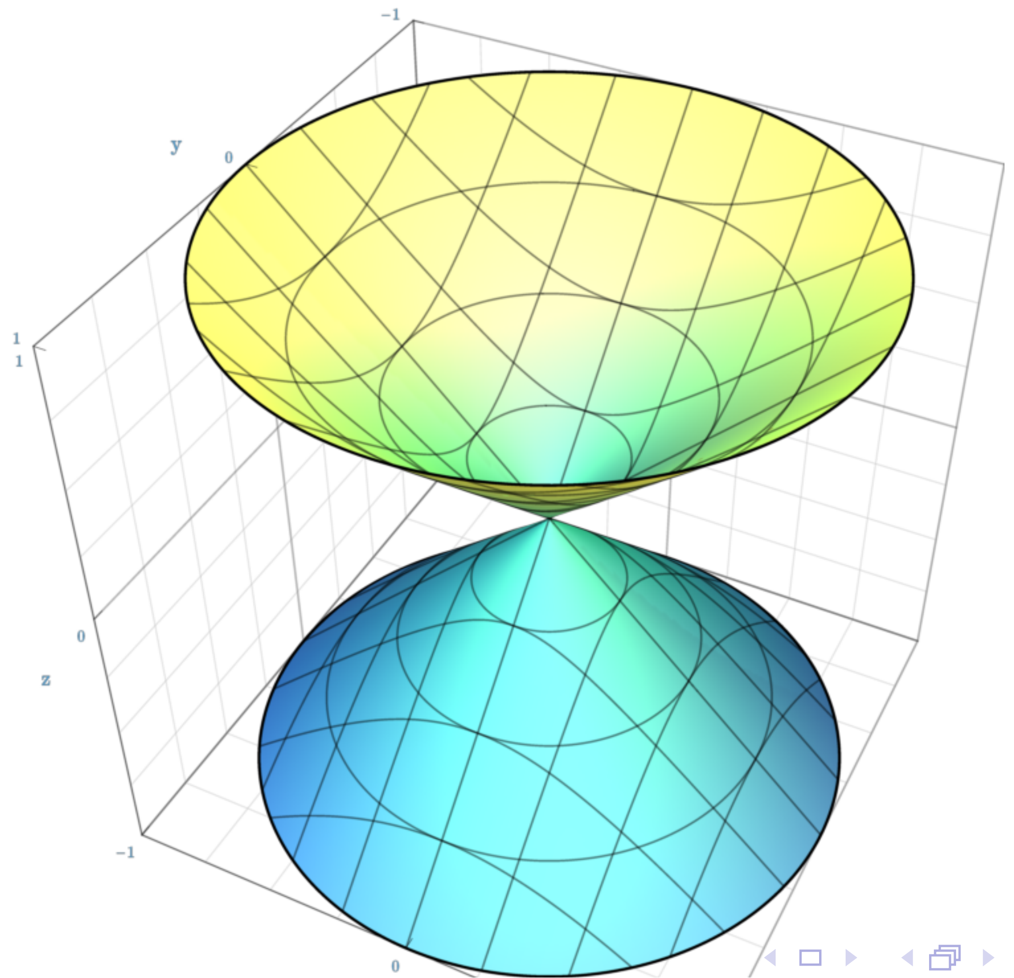


Stožasta ploha, konus

Standardna jednadžba eliptično stožaste plohe centrirane u točki $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$

Na slici je pravi stožac kojem je presjek kružnica: $x^2 + y^2 = z^2$



Eliptični paraboloid

Std. jednadžba eliptičnog paraboloida centriranog u $T(x_0, y_0, z_0)$:

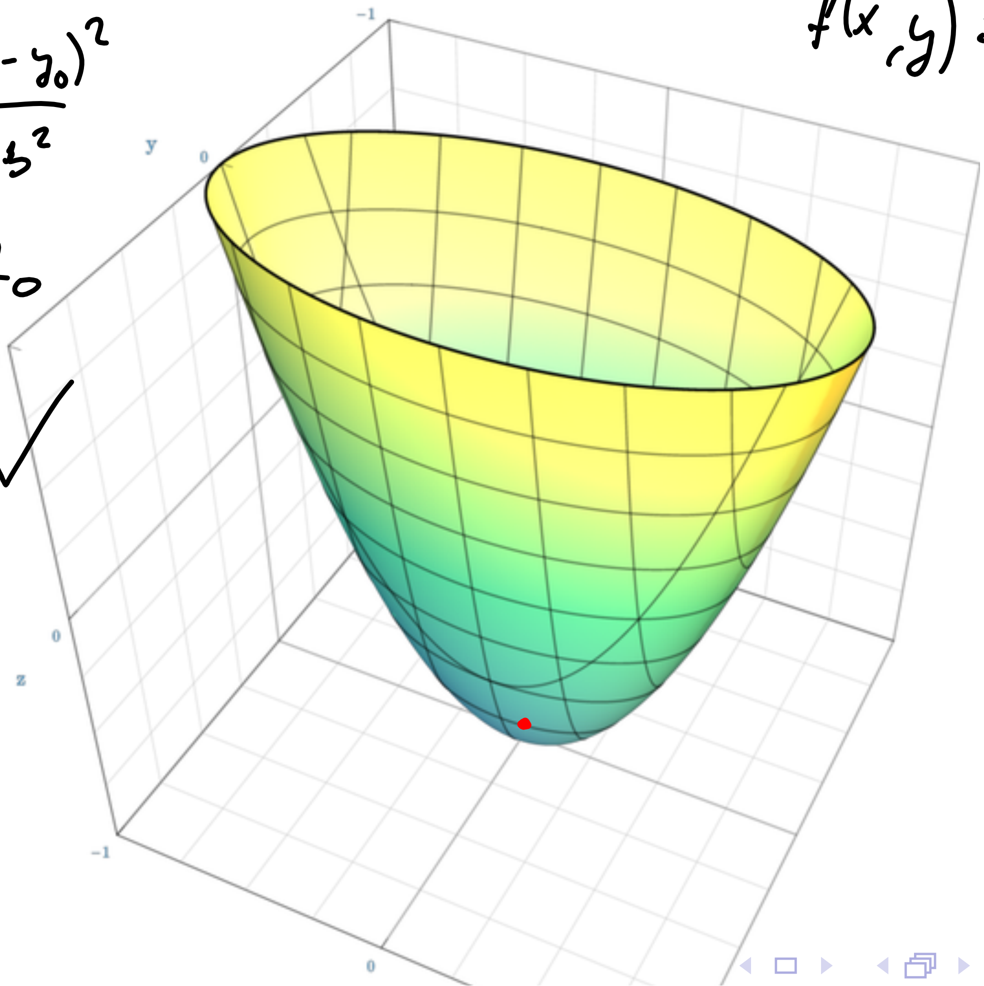
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - (z-z_0) = 0 \quad \text{gleda prema gore}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + (z-z_0) = 0 \quad \text{gleda prema dolje}$$

$f(x,y) = -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + z_0$

$z - z_0 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$

$f(x,y) = \quad -11 \quad + z_0$



MIN. $T(x_0, y_0)$ ✓

$= z_0$

MAX $T(x_0, y_0)$

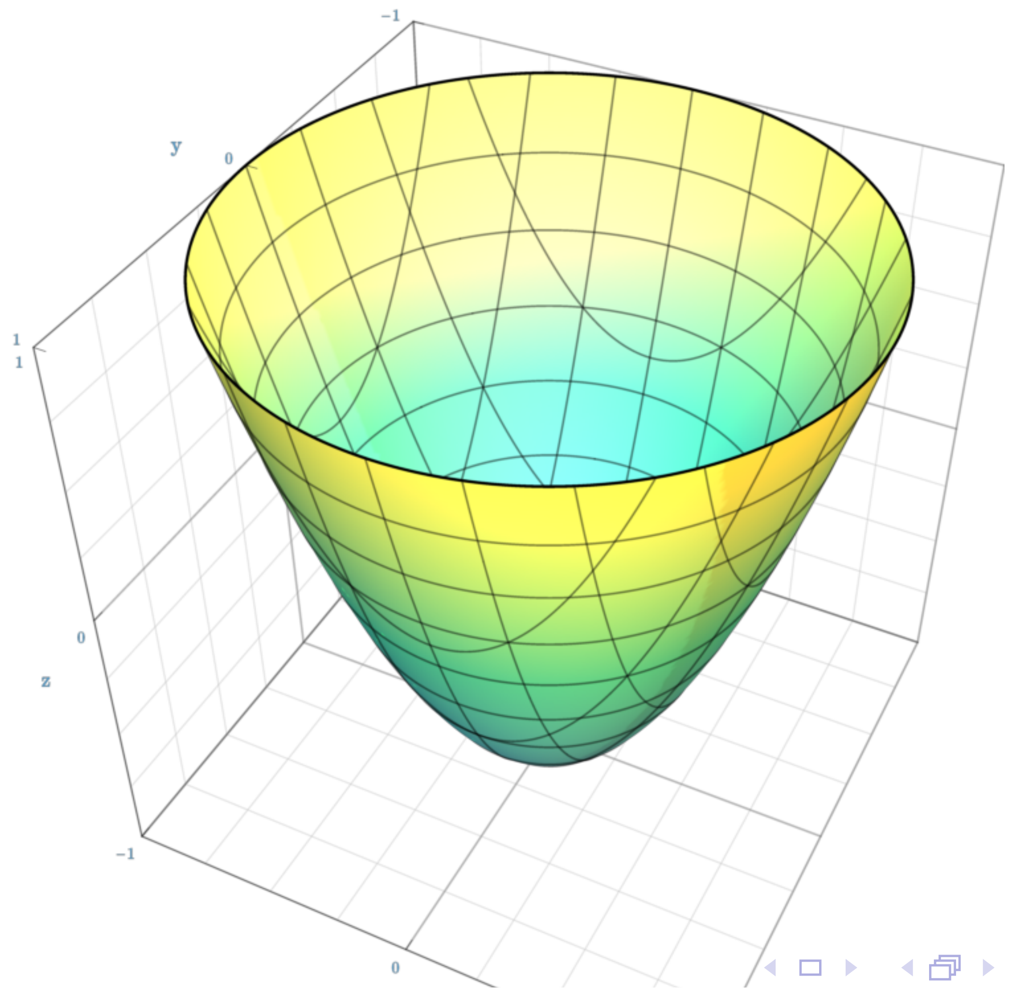
$= z_0$

Kružni paraboloid (podtip eliptičnog paraboloida)

Std. jednadžba kružnog paraboloida centriranog u $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - (z-z_0) = 0 \quad \text{gleda prema gore}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + (z-z_0) = 0 \quad \text{gleda prema dolje}$$



Hiberbolični paraboloid

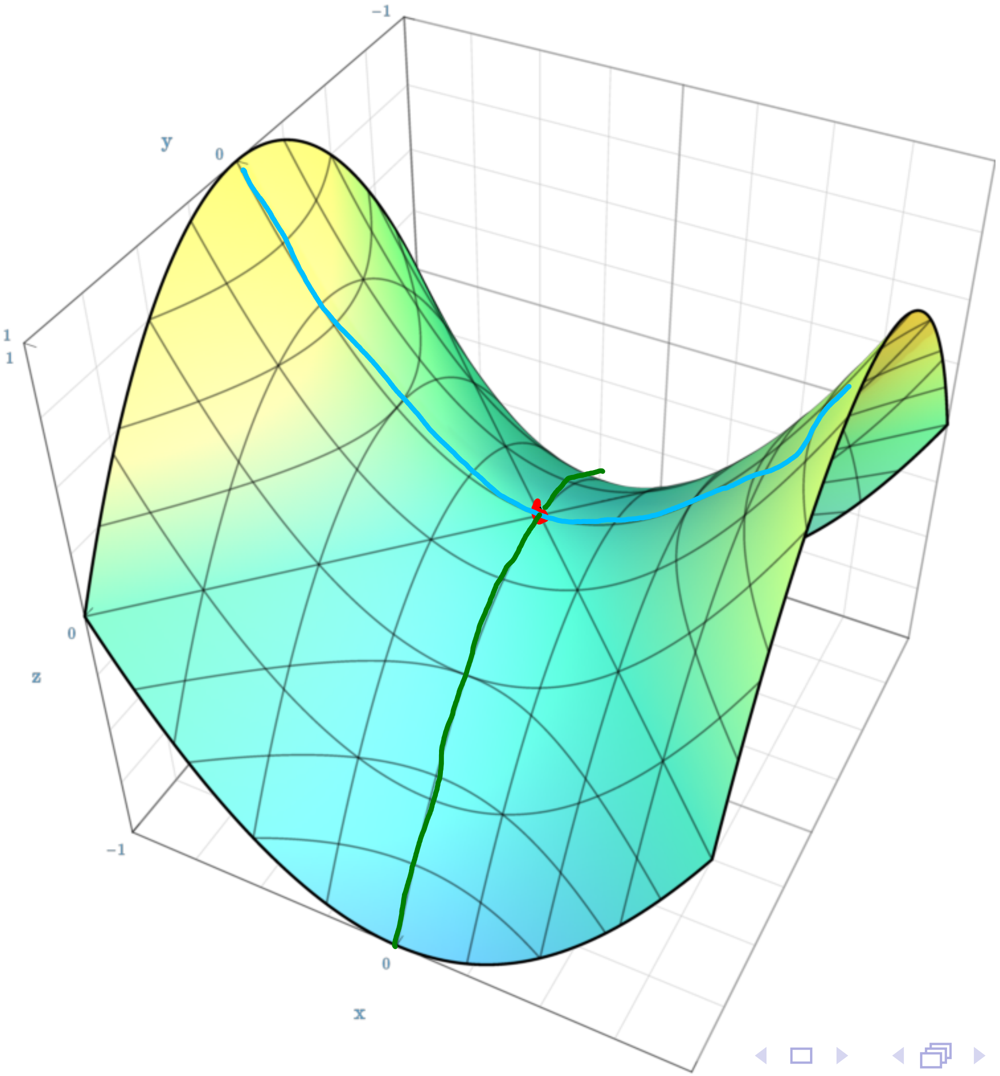
Standardna jednadžba hiperboličnog paraboloida centriranog u točki $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \pm (z-z_0) = 0$$

NEMA NITI

MIN NITI

MAX

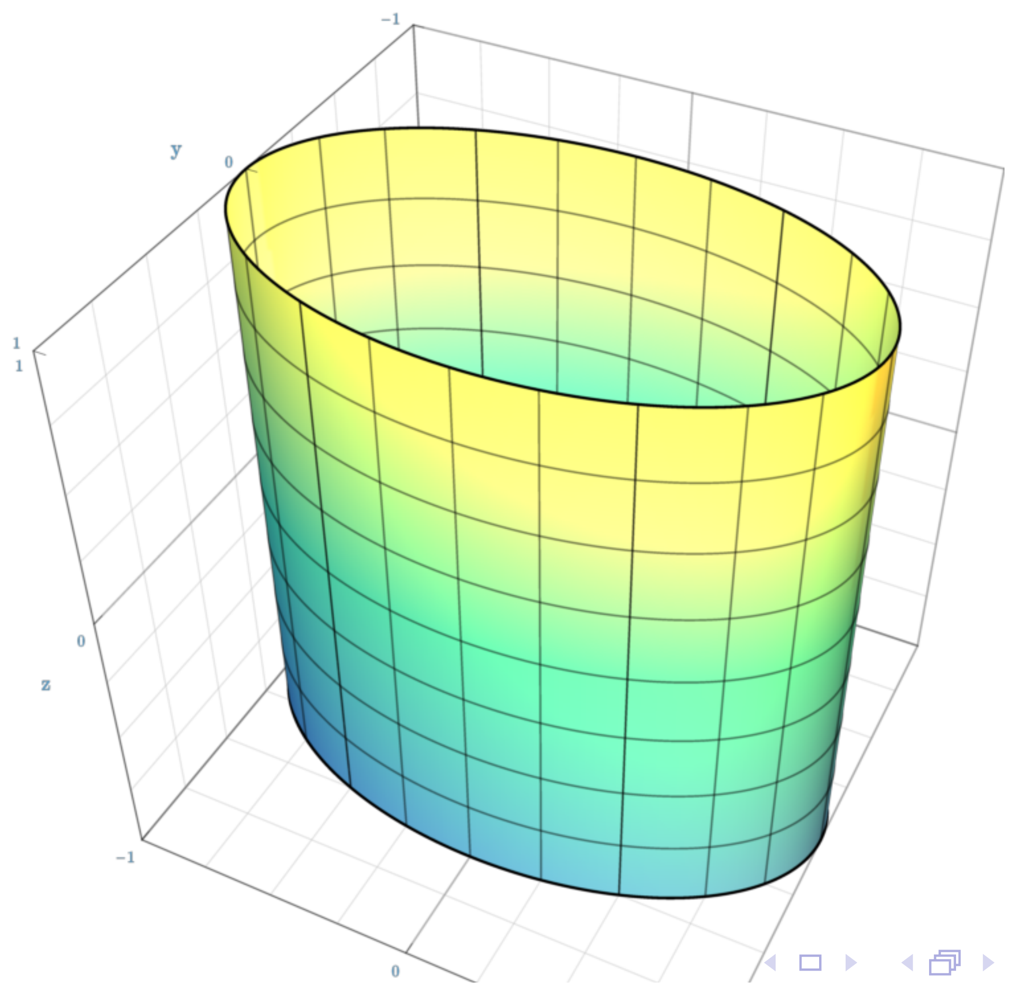


Valjčaste plohe

Standardna jednadžba eliptično valjčaste plohe centrirane u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ i usmjerene u z smjeru:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Primjer. $x^2 + 2y^2 = 1$ ✓

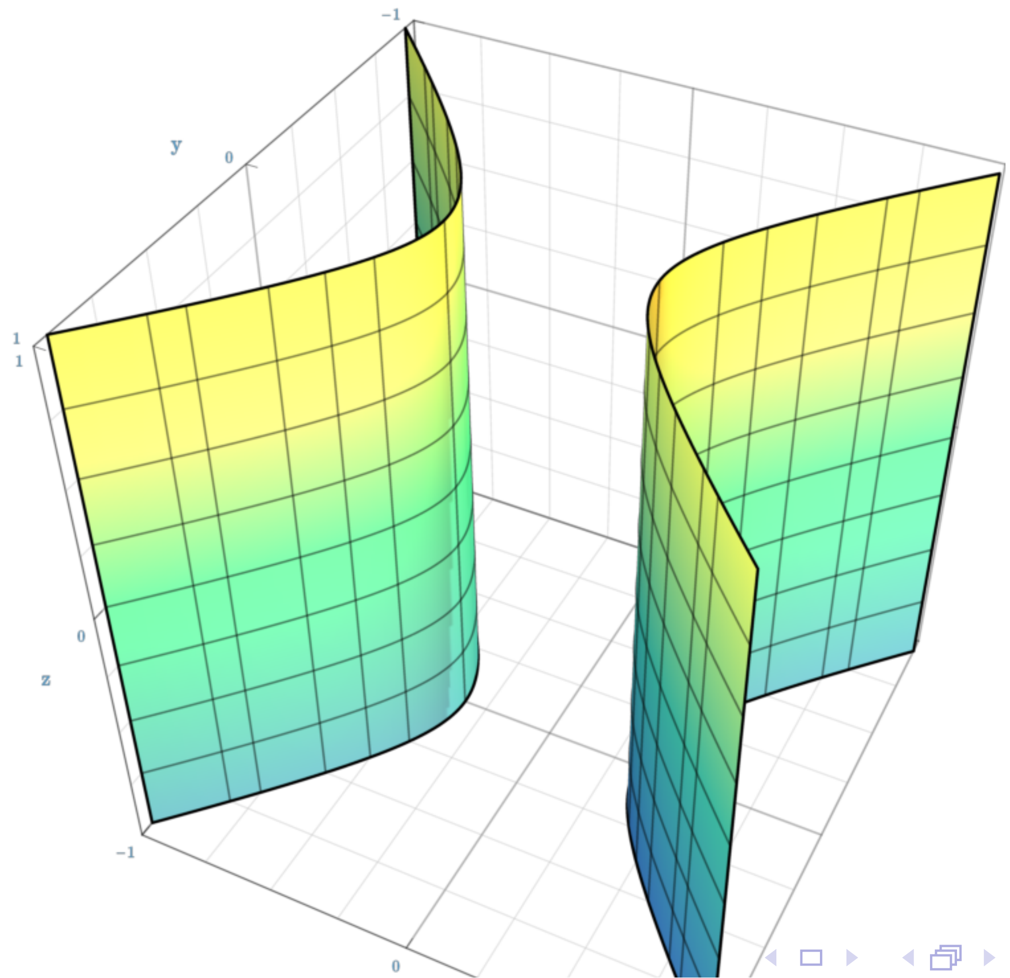


Valjčaste plohe

Standardna jednadžba hiperbolično valjčaste plohe centrirane u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ i usmjerene u z smjeru:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Primjer. $8x^2 - 8y^2 = 1$ ✓



Valjčaste plohe

Standardna jednadžba parabolično valjčaste plohe centrirane u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ i usmjerene u z smjeru:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm (y-y_0) = 0}$$

Primjer. $x^2 + y = 0$